11. VL PWT

Notiztitel 1/11/2011

3.2 Leontief-Modell

3.2.1 geschlossenes Leontief-Modell

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}\bar{x} &= \bar{x} \\ \Leftrightarrow (\bar{I} - \bar{A})\bar{x} &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \text{Mengensystem} \qquad (3.2.1.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}\bar{A} &= \bar{p} \\ \Leftrightarrow \bar{p}(\bar{I} - \bar{A}) &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \text{Preissystem} \qquad (3.2.1.2)$$

- Beide Male wichtige Rolle $\bar{A}$!
- Technikdeterminierte Preise
- Konstante Skalenerträge
- Lösbarkeit ?
- linear-homogene Gleichungssysteme

- Wir wissen:

  (a) Triviale Lösung: Nullvektor

  $\Rightarrow rg(\bar{I} - \bar{A}) = n$

  (b) Unendlich viele von Null verschiedene Lösungen, wenn $rg(\bar{I} - \bar{A}) < n$

- Also: $\det(\bar{I} - \bar{A}) = 0$ (3.2.1.3)

- Mindestens 1 Spalte von $(\bar{I} - \bar{A})$ muss von den anderen Spalten linear abhängig sein

- Ökonomisch plausibel: Endnachfrage ist abhängig von den IO-Verflechtungen der Produktionssektoren

- (3.2.1.3) Endnachfrage darf die technisch bestimmten Produktionsmöglichkeiten werden

  (a) überschreiten $\Rightarrow$ nicht möglich

  (b) nach unterschreiten $\Rightarrow$ Arbeitslosigkeit

- (3.2.1.3) garantiert von Null verschiedene, aber nicht zwangsläufig nichtnegative Lösungen } nach links schieben

- n Gleichungen / Variablen, aber nur n-1 linear unabhängige Gleichungen

- Freiheitsgrad beseitigen: Preissystem -> Numéraire

- z.B. $p_n = w = 1 \left[\frac{MJ}{MJ}\right]$

$$p_i = 1 \left[\frac{\text{Mengeneinheit } i}{\text{Mengeneinheit } i}\right]$$

- Mengensystem: Arbeitsvolumen i.d.R. exogene Größe

- $x_n = \sum_{i=1}^{n} x_{ni} = L$ (Anzahl Mannjahre)

- Nichtnegative Lösungen?

- (3.2.1.1) und (3.2.1.2) als Eigenwert-problem interpretieren

- $\bar{A}\bar{x} = \phi\,\bar{x}$ (3.2.1.1')

$\uparrow$ $\phi = 1$

$\Leftrightarrow (\phi\,\bar{I} - \bar{A})\,\bar{x} = \bar{0}$

$\uparrow$ $\phi = 1$

- Charakteristisches Polynom: $\det(\phi\,\bar{I} - \bar{A}) = 0$ (3.2.1.4)

$\uparrow = \phi = 1$

- Falls gilt $\phi_m = 1$ für $\bar{A}$
  - -> Perron-Frobenius
  - -> Falls $\phi_m = 1$ => strikt positiver Eigenvektor (Mengenvektor $\bar{x}$)

- Zeige, dass $\phi_m = 1$ für $\bar{A}$

- <u>1. Schritt:</u>

- $a_{iK} := \dfrac{x_{iK}}{x_K}$

- $\underline{\underline{\bar{A} = \bar{X}\,\mathrm{diag}(\bar{x})^{-1}}}$ mit $\mathrm{diag}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} = \bar{I}$$

- $\bar{A} \rightarrow \bar{X}$ wird spaltenweise durch die Menge $\bar{x}$ geteilt

- Andere Normierungsmöglichkeit: $\bar{X}$ zeilenweise durch $\bar{x}$ teile

$$\bar{A}' := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \cdots & \frac{x_{1n}}{x_1} \\ \vdots & & \\ \frac{x_{11}}{x_n} & \cdots & \frac{x_{nn}}{x_n} \end{pmatrix}$$

- $\bar{A}'$ ist eine Matrix, deren Zeilensumme quo

Konstruktion alle gleich Eins sind

- Dann muss ϕ_m von $\bar{A}^{-1}$ auch gleich Eins sein (Zeilensummenkriterium!)

$$\bar{A} : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} \Bigg\} \text{spaltenweise}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_1} \\ \frac{x_{21}}{x_2} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} \Bigg\} \text{zeilenweise}$$

- 2. Schritt

- Zeige, dass wenn $\phi_m = 1$ für $\bar{A}^{-1}$ gilt, auch $\phi_m = 1$ für $\bar{A}$ gilt!

- Argument:
  (a) Ähnliche Matrizen haben identische Eigenwerte
  (b) $\bar{A}$ und $\bar{A}'$ sind ähnlich

- Zwei Matrizen $\bar{B}$ und $\bar{C}$ sind ähnlich, falls eine invertierbare Matrix $\bar{P}$ existiert, für die gilt:

$$\bar{C} = \bar{P}\,\bar{B}\,\bar{P}^{-1}$$

- Hier: $\bar{A}' = \operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}\bar{X}$; $\bar{A} = \bar{X}\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}$

- Ähnlich, wenn: $\bar{X}\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1} = P\left(\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}\bar{X}\right)P^{-1}$

- Sei $\bar{P} = \bar{X}$:

$$\bar{X}\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1} = \bar{X}\left(\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}\bar{X}\right)\bar{X}^{-1}$$

$$= \bar{X}\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}\underbrace{\bar{X}\bar{X}^{-1}}_{\bar{I}} = \bar{X}\operatorname{diag}(\bar{x})^{-1}$$

- $\bar{A}$ und $\bar{A}'$ sind ähnlich!

- $\phi_m = 1$ für $\bar{A}$! $\rightarrow$ $\bar{x} > \bar{0}$

- Lösung für (3.2.1.2) analog

$$\bar{p}\,\bar{A} = \underbrace{\phi}_{\phi = 1}\,\bar{p} \qquad (3.2.1.2')$$

- Wir wissen schon, dass $\phi_m = 1$ für $\bar{A}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{- } \bar{p} \rightarrow \text{linksseitiger Eigenvektor} \\ \text{- } \bar{x} \rightarrow \text{rechtsseitiger} \quad \text{"}\end{array}\right\}\ \text{gehören zum selben Eigenwert } \phi_m$$

- $\bar{p}$ muss strikt positiv sein; $\bar{p} > \bar{0}$

- Beachte: $\alpha\bar{p}$ und $\alpha\bar{x}$ $(\alpha > 0)$ sind allesamt links- bzw. rechtsseitige Eigenvektoren bezüglich $\phi_m = 1$ und $\bar{A}$

- Lösungssystem relative Preise und relative Mengen

- Struktur des ökonomischen Modells wird bestimmt, aber nicht die absolute Ausprägung von Output- und Preisniveau

3.2.2 Das offene Leontief-Modell

- Bisher: $\bar{A}$ enthielt Endverbrauchssektor

- Jetzt: $\bar{A}$ enthält nur noch die IO-Verflechtungen der Produktionssektoren

- $(n \times n)$-Matrix $\bar{A}$: n Produktionssektoren bzw. ohne Kuppelproduktion zugleich n Waren

- Offenes Leontief-Modell

$$\underbrace{\bar{A}\bar{x}}_{\text{Input-vektor}} + \underbrace{\bar{y}}_{\text{letzte Verw.}} = \underbrace{\bar{x}}_{\text{Brutto-output}} \qquad (3.2.2.1)$$

- Neu: Koeffizienten der direkten Arbeit l_i $(i = 1 \dots, n)$

$$l_i := \frac{\text{Arbeitskraft}}{x_i} \left[\frac{\text{My}}{\text{Mengeneinheit}} \right]$$

- $\bar{l} := (l_1, \dots, l_n)$ (Zeilenvektor)

- Nochmal:

$$\bar{A}\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{I} - \bar{A})\bar{x} = \bar{y} \qquad (3.2.2.2)$$

- $\bar{A}$ enthält die Produktionstechnik für n prinzipiell unabhängige Produktionsprozesse

- $rg(\bar{A}) = n \rightarrow rg(\bar{I} - A) = n$

- $\det(\bar{I} - \bar{A}) \neq 0$, d.h. $(\bar{I} - \bar{A})^{-1}$ existiert:

$$\bar{x} = \underbrace{(\bar{I} - \bar{A})^{-1}}_{\text{Leontief-Inverse}} \bar{y} \qquad (3.2.2.3)$$

- (3.2.2.3) ist die Lösung des offene Leontief-Modells

- Interpretation von $(\bar{I} - \bar{A})^{-1}$

- Sinnvolle Lösung setzt $(\bar{I} - \bar{A})^{-1} \geq \bar{O}$ voraus
-> später

- Sei $\bar{D} = (d_{ik}) := (\bar{I} - \bar{A})^{-1}$

- (3.2.2.3) ausschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \vdots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n \end{pmatrix} \qquad (3.2.2.4)$$