9. VL PWT

Notiztitel 12/7/2010

2.2 Eigenwertprobleme

2.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 2.2.1.1: Ein (reeller) Vektor $\bar{x}$ mit $\bar{x} \neq \bar{o}$ heißt Eigenvektor einer quadratischen Matrix $\bar{A}$ zum (reellen) Eigenwert $\phi \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\bar{A}\bar{x} = \phi \bar{x} \qquad (2.2.1.1)$$

Die Eigenwerte von $\bar{A}$ sind alle ϕ, für die ein Eigenvektor existiert.

- Beispiel:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\bar{x} \qquad (2.2.1.2)$$

- $\bar{x} = \bar{e}_1$ ist Eigenvektor von $\bar{A}$ zum Eigenwert

  $\phi = a_{11}$

2.2.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Gegeben: $(n \times n)$-Matrix $\bar{A}$ (reell)

$$\bar{A}\bar{x} = \phi \bar{x} \qquad (2.2.2.1)$$

- linear-homogenes Gleichungssystem

$$\bar{A}\bar{x} - \phi \bar{x} = \left(\bar{A} - \phi \bar{I}\right)\bar{x} = \bar{0} \qquad (2.2.2.2)$$

- Falls $(\bar{A} - \phi \bar{I})^{-1}$ existiert:

$$\bar{x} = (A - \phi \bar{I})^{-1} = \bar{0} \qquad (2.2.2.3)$$

- triviale Lösung $\bar{x} = \bar{0}$
- Nicht-triviale Lösung:

$$\nexists\ (\bar{A} - \phi \bar{I})^{-1}$$

- Die Inverse existiert nicht, wenn

$\det(\bar{A} - \phi \bar{I}) = 0$

- $(\bar{A} - \phi \bar{I})$ ist nicht regulär;
  kein voller Rang

<u>Definition 2.2.2.1:</u> Der Ausdruck $\det(\bar{A} - \phi \bar{I})$ heißt das <u>charakteristische Polynom</u> von $\bar{A}$.

- Beispiel: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

- $\det(\bar{A} - \phi \bar{I}) = \begin{vmatrix} 1-\phi & -2 \\ 1 & 4-\phi \end{vmatrix} = 0$

$= (1-\phi)(4-\phi) - (-2 \cdot 1)$

$= 4 - \phi - 4\phi + \phi^2 + 2$

$= \underbrace{\phi^2 - 5\phi + 6}$

Polynom 2. Grades $\rightarrow$ (2×2) - Matrix

Polynom n. Grades $\rightarrow$ $(n \times n)$ - Matrix

- $\phi^2 - 5\phi + 6 \rightarrow \phi_1 = 2$ und $\phi_2 = 3$
- Allg.: charakt. Polynom n-ten Grades
  - $\rightarrow$ n (mehrfach) Nullstellen
  - $\rightarrow$ n (mehrfache) Eigenwerte
- Eigenwerte können komplex statt reell sein
  - $\rightarrow$ Aber nicht in unseren Anwendungen hier
- Für uns wichtig: maximaler Eigenwert ϕ_m
- Eigenvektoren?
- Berechnung für $\phi_1 = 2$

$$(\bar{A} - \phi \bar{I})\,\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Alternative Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Lineare Abhängigkeit}$$

- Unendlich viele Lösungen

- $x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2$

- Sei $x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = -2\alpha$
  für beliebige $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\bar{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenvektoren zu $\phi_1 = 2$ sind $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und jedes nicht verschwindende Vielfache von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Analoge Berechnung mit $\phi_2 = 3$:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{linear abhängig}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2$$

- Sei $x_2 = \alpha \rightarrow \bar{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Allg.: Falls $\bar{x}$ Eigenvektor zu ϕ ist, dann ist auch jedes Vielfache $\alpha\bar{x}$ ein

Eigenvektor zu ϕ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

2.2.3 Eigenschaften nichtnegativer Matrizen

- nichtnegativ: $\bar{A} \geqq \bar{O}$
- noch wichtig: Zerlegbarkeit

Definition 2.2.3.1 Eine (reelle) quadratische Matrix $\bar{A}$ heißt zerlegbar, wenn sie durch eine geeignete Vertauschung von Spalten und Zeilen (Permutation) in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{O} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.2.3.1)$$

$\bar{A}_{11}$ und $\bar{A}_{22}$ sind quadratische Submatrizen von $\bar{A}$. Ist die Umformung zum Ausdruck (2.2.3.1) nicht möglich, so heißt $\bar{A}$ unzerlegbar

- Beispiel: (3×3)-Matrix als „Inputmatrix"

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{1}_{\bar{A}_{11}} & \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}}_{\bar{A}_{22}} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} & \text{Input Sektor 1} & \text{Input S. 2} & \text{Input S. 3} \\ \bar{A}^{-1} = & \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

- Sektor 1 bekommt keine Lieferung von Sektor 2 <u>und</u> Sektor 3

- Produkt 2 und Produkt 3 gehen weder <u>direkt</u> und <u>indirekt</u> (Vorleistung einer Vorleistung) in die Produktion von Produkt 1 ein

- Produkt 2 und 3 sind sogenannte

<u>Nicht - Basisware</u>

- Produkt 1 geht direkt und indirekt

in Produktion von Produkt 2 und 3 ein

- Basisware : geht in jeden Sektor direkt

<u>oder</u> indirekt als Input ein

- Unzerlegbare Matrix : Nur Basisware
- Zerlegbare " : Es gibt Nicht-Basisware

- Vollständig zerlegbar :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{O} \\ \bar{O} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}$$

- Ökonomisch ? -> 2 separate Volkswirtschaften

ohne Lieferverflechtungen

- Satz von Perron und Frobenius

  ↳ zwei Fälle:

  (i) unzerlegbare nichtnegatives $\bar{A}$

  (ii) zerlegbar " "

- Interessant für uns: (i)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \phi_n = 7 \text{, weil beide}$$

Zeilensumme = 7 sind

- Zeilensumme- / Spaltensummenkriterium