8. VL PWT

Notiztitel 11/30/2010

- noch Wiederholung: Lineare Algebra

(e) Potenzen von Matrizen:

$$\bar{A}^n = \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdots \bar{A}}_{\text{„n-mal"}}$$

(f) Transponierte Matrizenmultiplikation

$$(\bar{A}\,\bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T \quad \Big\} \text{ geeignete Zeilen-/Spaltenzahl}$$

- nochmal (d): Matrizenmultiplikation

- ist im Allg. <u>nicht</u> kommutativ:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \neq \bar{B} \cdot \bar{A}$$

- $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\bar{A} \cdot \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$- \bar{B} \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Norm und Skalarprodukt

Definition 2.1.3.1: Sei $\bar{x}$ ein $(1 \times n)$-Vektor und $\bar{y}$ ein $(n \times 1)$-Vektor. Ihr Skalarprodukt (oder inneres Produkt) ist

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\bar{x}$ und $\bar{y}$ heißen orthogonal, wenn $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, d.h. die Vektoren stehen im rechten Winkel aufeinander.

Definition 2.1.3.2: Die euklidische Norm (oder „Länge") $\|\vec{x}\|$ eines $(n \times 1)$-Vektors $\bar{x}$ ist

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Der Vektor $\bar{x}$ heißt normiert, wenn $\|\bar{x}\| = 1$.

- Beispiel : $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}} = \sqrt{(1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

2.1.4 Lineare Unabhängigkeit

- Linearkombination : Erzeuge eines Vektors $\bar{x}$ durch Skalarmultiplikation und Addition anderer Vektoren

- Beispiel 1 : $\bar{x} = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2$, $a_i \in \mathbb{R}$

- " 2 : $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- $\bar{x} = 1 \cdot \bar{x}_1 + 0 \bar{x}_2 + 3 \cdot \bar{x}_3 - 2 \cdot \bar{x}_4$

$$= \begin{pmatrix} 1 & - & 3 & + 8 \\ 2 & - & 6 & + 10 \\ 3 & - & 9 & + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Beispiel 2'

$$\bar{x} = -3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Darstellung von $\bar{x}$ als Linearkombination von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ und $\bar{x}_4$ <u>nicht</u> eindeutig

<u>Definition 2.1.4.1</u> Falls die Linearkombination

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \cdots + a_n\bar{x}_n = \bar{0}$$

nur die Lösung $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ besitzt, heißen die Vektoren $\bar{x}_1, \bar{x}, \ldots, \bar{x}_n$ linear unabhängig. Sie heißen linear abhängig, wenn die obige Linearkombination andere Lösungen hat

- Wenn $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ linear abhängig sind, kann mindestens einer von ihnen als Linearkombination der der anderen dargestellt werden.

- Beispiel: $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- z. B. $\bar{x}_3 = -\bar{x}_1$

- Aber $\bar{x}_2$ kann nicht als Linearkombination von $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_3$ erzeugt werden.

2.1.5 Der Rang einer Matrix

<u>Definition 2.1.5.1</u> Der Rang $rg(\bar{A})$ einer Matrix $\bar{A}$ ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten von $\bar{A}$

- Anmerkungen: Der Rang kann genauso über die Zahl linear unabhängiger Zeilen definiert werden.

$$rg(\bar{A}) = rg(\bar{A}^T)$$

- Es gilt für $(m \times n)$-Matrix:

$$rg(\bar{A}) \leq \min(m, n)$$

<u>Definition 2.1.5.1</u> Eine quadratische Matrix $\bar{A}$ heißt regulär, falls sie den vollen Rang hat, d.h. $rg(\bar{A}) = n$ ($(n \times n)$-Matrix $\bar{A}$).

2.1.6 Koeffizientenmatrizen und Gleichungssysteme

- lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 &+ a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 &+ a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 &+ a_{m2} x_2 + \dots \; a_{mn} x_n = b_m
\end{aligned} \qquad (2.1.6.1)$$

- In Matrizenschreibweise

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b} \qquad (2.16.2)$$

mit $(m \times n)$-Matrix $\bar{A}$
und $(n \times 1)$-Vektor $\bar{x}$ und $(n \times 1)$-Vektor $\bar{b}$

- Erweiterte Koeffizientenmatrix $(\bar{A}, \bar{b})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen:

Ein System von m linearen Gleichungen $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ mit n Unbekannten hat

(i) keine Lösung, wenn $rg(\bar{A}) < rg(\bar{A}, \bar{b})$
(dann ist $\bar{b}$ von $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ linear

unabhängig)

(ii) <u>genau eine Lösung</u>, wenn $rg(\bar{A}) = rg(\bar{A}, \bar{b})$

(iii) <u>unendlich viele Lösungen</u>, wenn

$$rg(\bar{A}) = rg(\bar{A}, \bar{b}) = K < n$$

- linear homogene Gleichungssysteme

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{o} \qquad (2.1.6.3)$$

- Es gilt: $rg(\bar{A}) = rg(\bar{A}, \bar{o})$, weil $\bar{o}$ nie von anderen Vektoren linear unabhängig ist

(ii) <u>genau eine Lösung</u>, wenn $rg(\bar{A}) = n$

$\bar{x} = \bar{o}$ (triviale Lösung)

(iii) <u>unendlich viele von Null verschiedene Lösungen</u>, wenn $rg(\bar{A}) = K < n$

2.1.7 Die inverse Matrix

- Beispiel: $\bar{A}\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}$ (2.1.7.1)

- Nach $\bar{x}$ auflösen?

$$\bar{y} = \bar{x} - \bar{A}\bar{x} \tag{2.1.7.2}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = (\bar{I} - \bar{A})\bar{x}$$

- Wie kann man durch $(\bar{I} - \bar{A})$ „teilen"?

- reelle Zahl: $y = (1-a)x$ (2.1.7.3)

$$\Leftrightarrow \frac{y}{(1-a)} = x$$

- Division gelingt, weil die inverse Zahl $(1-a)^{-1}$ definiert ist, für die gilt: $(1-a)^{-1}(1-a) = 1$

Definition 2.1.7.4 Falls für eine quadratische Matrix $\bar{A}$ eine Matrix $\bar{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\bar{A} \cdot \bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1}\bar{A} = \bar{I}$$

existiert, dann heißt $\bar{A}^{-1}$ die inverse Matrix von $\bar{A}$

- Anmerkung: $\bar{A}^{-1}$ existiert nur im Falle quadratischer Matrizen

- Lösung von (2.1.7.2)

$$\left.\begin{aligned} \bar{y} &= (\bar{I}-\bar{A})\bar{x} \\ (\bar{I}-\bar{A})^{-1}\bar{y} &= \bar{x} \end{aligned}\right\} \text{von links mit } (\bar{I}-\bar{A})^{-1} \text{ multiplizieren} \qquad (2.1.7.4)$$

- Aber existiert $(\bar{I}-\bar{A})^{-1}$ überhaupt?
- 0^{-1} existiert nicht!
- Beispiel: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ } nicht regulär

- Jedes beliebige Produkt $\bar{A}\bar{B}$ enthält in der letzten Zeile ausschließlich Nullen, kann also nicht $= \bar{I}$ sein

- $\bar{A}$ ist nicht invertierbar!

- Verallgemeinerbar:

  $\bar{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ ist regulär

2.1.8 Die Determinante

Definition 2.1.8.1 Die Determinante ist eine Funktion, die jeder $(n \times n)$-Matrix $\bar{A}$ eine reelle Zahl $\det(A)$ zuordnet und die folgende Eigenschaften* hat:

(1) $\det(\bar{A}) = 0$, falls ein Spaltenvektor von $\bar{A}$ der Nullvektor ist

(2) die Spaltenvektoren von $\bar{A}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(\bar{A}) = 0$

(3) die Matrix $\bar{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(\bar{A}) \neq 0$

* Die Determinante hat noch weitere Eigenschaften, von denen wir hier absehen

2.1.9 Berechnung von Determinanten

2.1.9.1 (2×2)-Matrize

$$\det(\bar{A}) = |\bar{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (2.1.9.2)$$

- Beispiel: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(\bar{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = \underline{\underline{-2}}$$

2.1.9.2 (3×3)-Matrize

- Regel von Sarrus:

$$\det(\bar{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \left| \begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (21.9.21)$$

- Beispiel:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} ; \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array} \right|$$

$$\det(\bar{A}) = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8$$

$$- 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

- $\bar{A}$ ist nicht invertierbar! → lineare Abhängigkeit