7. VL PWT

Notiztitel 11/23/2010

- Exkurs: Dimensionsanalyse (DA)
- DA -> Cobb-Douglas PF
- Makroökonomische Dimensionen:
  - (i) Money: [M]
  - (ii) Güter: [G] (Aggregationsproblem sei gelöst)
  - (iii) Labour: [H]
  - (iv) Time: [T]
  - (v) „Reine Zahlen": [1]
- Unterschied: Dimensionen vs Maßeinheiten

  Dimensionen ↓ Qualität

  Maßeinheiten ↓ Quantität
- z.B. [T], gemessen in Sekunden oder Minuten
- Cobb-Douglas-PF: Physische Interpretation

$$\underbrace{Y\left[\frac{g}{T}\right]}_{\text{Strom-größe}} = c[?] \underbrace{\left(L\left[\frac{H}{T}\right]\right)^{a}}_{\text{Strom-größe}} \cdot \underbrace{\left(K[g]\right)^{1-a}}_{\text{Bestands-größe}}$$

Niveau-parameter (value = 1)

- Dimensional homog?
- c muss Dimensionskonstante sein
- Dimensional homog, wenn

$$[c] = \left[H^{-a} g^{a} T^{a-1}\right] \qquad (1.4.4.2)$$

- $$\left[H^{a} T^{-a} g^{1-a}\right]\left[H^{-a} g^{a} T^{a-1}\right]$$

$$= \left[\underbrace{H^{a} H^{-a}}_{H^{0}=[1]} \underbrace{T^{-a} T^{a-1}}_{[T^{-1}]} \underbrace{g^{1-a} g^{a}}_{[g^{1}]}\right] = \left[T^{-1} g^{1}\right]$$

$$= \left[\frac{g}{T}\right]$$

- Probleme:

(a) Dimensionskonstante c abhängig von Maßeinheiten

(b) Nicht-ganzzahlige Exponenten
(z.B. Quadratwurzel aus einer Maschine)
→ Bedeutung? Unsinn?

- Physische Interpretation → erheblicher Diskussionsbedarf

- Monetäre Interpretation?

$$\underbrace{Y\left[\frac{M}{T}\right]}_{\text{Strom}} = c\,[?]\ \underbrace{\left(L\left[\frac{M}{T}\right]\right)}_{\text{Strom}}^{\alpha}\ \underbrace{\left(K\,[M]\right)}_{\text{Bestand}}^{1-\alpha} \qquad (1.4.4.3)$$

- Dimensional homogen, wenn

$$[c] = \left[T^{\alpha-1}\right] \qquad (1.4.4.4)$$

- Analoge Problematik:
  - (a) Dimensionskonstante
  - (b) Nicht-ganzzahlige Exponente
- Monetäre Interpretation -> erhebliche Diskussionsbedarf
- Cobb / Douglas 1928: Indizes

$$\frac{Y}{Y_0}[1] = c[1] \left(\frac{L}{L_0}[1]\right)^{\alpha} \left(\frac{K}{K_0}[1]\right)^{1-\alpha} \quad (1.4.4.5)$$

- Reine Zahlen -> alle math. Operationen jetzt erlaubt, die vorher problematisch waren!
- Aber keine PF mehr!

- Cobb-Douglas-PF -> extrem diskussionswürdig!

1.4 Resümee

- Klassik: AWT im Interesse des aufstrebenden

Bürgertums

- „Aufklärungsfunktion" der Pol. Ökonomie im Einklang mit pol. Interesse des Bürgertums

- Daher auch Frage nach Entwicklungsfähigkeit des Kapitalismus

- Neoklassik : Abkehr von AWT -> Subjektive Werttheorie

- „Kapitalismus" kommt nicht mehr vor

- „Ahistorischer Modellplatonismus" (Hans Albert)

- Ideologiefunktion dominiert die Aufklärungsfunktion

- Rücksichtslos gegenüber Logik und Erkenntnisgegenstand

- Vulgärökonomie, Affirmation

2. Mathematische Grundlagen

2.1 Wiederholung: Lineare Algebra

2.1.1 Matrizen und Vektoren

- Leydold, Josef: Mathematik für Ökonomen, 2. Aufl., München 2000
- Anhang im Lehrbuch von Pasinetti (Literaturliste)
- <u>Definition 2.1.1.1</u> Unter einer reellen $(m \times n)$-Matrix (m und $n \in \mathbb{N}$) versteht man das folgende Rechteckschema:

$$\bar{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Eine $(n \times 1)$-Matrix heißt Spaltenvektor,

eine $(1 \times n)$-Matrix heißt Zeilenvektor.

Die Elemente a_{ij} nennt man Koeffiziente.

<u>Definition 2.1.1.2:</u> Wir vereinbaren die folgende Schreibweise:

(1) $\bar{A} :=$ Matrix

(2) $\bar{a} :=$ Vektor

(3) $a :=$ Skalar $\in \mathbb{R}$

(4) $\bar{O} :=$ Nullmatrix

(5) $\bar{o} :=$ Nullvektor

(6) $\bar{A}^T := (a_{ij})^T := (a_{ji})$ (Transponierte Matrix)

(7)

(a) $\bar{x} \geqq \bar{o}$ falls $x_i \geq 0 \ \forall i$,

(b) $\bar{x} \geq \bar{o}$ falls $x_i \geq 0 \ \forall i$ und $x_i > 0$ für einige i

(c) $\bar{x} > \bar{o}$ falls $x_i > 0 \ \forall i$.

(8)

(a) $\bar{A} \geqq \bar{0}$ falls $a_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$

(b) $\bar{A} \geq \bar{0}$ falls $a_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$ und $a_{ij} > 0$ für einige i,j

(c) $\bar{A} > \bar{0}$ falls $a_{ij} > 0 \ \forall i,j$

<u>Definition 2.1.1.3:</u> Ein reeller Vektor $\bar{x}$ bzw. eine reelle Matrix $\bar{A}$ heiße:

(1) nichtnegativ, wenn $\bar{x} \geqq \bar{0}$ bzw. $\bar{A} \geqq \bar{0}$

(2) semipositiv, wenn $\bar{x} \geq \bar{0}$ bzw. $\bar{A} \geq \bar{0}$

(3) strikt positiv, wenn $\bar{x} > \bar{0}$ bzw. $\bar{A} > \bar{0}$

<u>Definition 2.1.1.4:</u> Spezielle Matrizen

(1) Eine $(n \times n)$-Matrix heißt quadratische Matrix

(2) Eine obere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Koeffizienten unterhalb der

Hauptdiagonale alle Null sind

(3) Eine untere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Koeffizienten oberhalb der Hauptdiagonale alle Null sind.

(4) Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Komponenten außerhalb der Hauptdiagonale Null sind

(5) Eine Einheitsmatrix $\bar{I}$ ist eine Diagonalmatrix, bei der die Hauptdiagonale ausschließlich aus Einsen besteht.

- Beispiele:

(a) $\bar{x} = (1, 2, 3) \rightarrow$ Zeilenvektor

(b) $\bar{x} = (1, 2, 3)^T \rightarrow$ Spaltenvektor

(c)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{obere Dreiecksmatrix}$$

(d) $\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (3\times 3)$ - Einheitsmatrix

2.1.2 Rechenoperationen mit Matrizen

(a) Gleichheit von Matrizen:

$$\bar{A} = \bar{B}, \quad \text{falls} \quad a_{ij} = b_{ij} \qquad (2.1.2.1)$$

(b) Skalarmultiplikation

$$\alpha \bar{A} = (\alpha\, a_{ij}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2.1.2.2)$$

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(c) Addition zweier $(m\times n)$- Matrizen

$$\bar{A} + \bar{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad (2.1.2.3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- Beachten: Zeilen- und Spaltenzahl

(d) Multiplikation zweier Matrizen

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{C}$$

- nur definiert, falls $(m \times n)$-Matrix $\bar{A}$ und $(n \times p)$-Matrix $\bar{B}$

- Ergebnis ist eine $(m \times p)$-Matrix $\bar{C}$

- $\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{C}$

$$\bar{C}_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \, b_{sj} \qquad (2.1.2.4)$$

- Falksches Schema

- Beispiel:

$$\bar{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\substack{m \times n \\ 3 \times 3}} \quad \text{und} \quad \bar{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\substack{n \times p \\ 3 \times 2}}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$