2.1 Teilprojekt A1

Anisotrope Finite-Elemente-Diskretisierungen: parallele Auflösungsmethoden und Adaptivität

2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Heinrich
Fakultät für Mathematik, Professur Wissenschaftliches Rechnen

2.1.2 Projektbearbeiter

Dr. rer. nat. Thomas Apel, Projektmitarbeiter bis 3/97,
Grundausstattung Professur Numerische Analysis (Prof. Meyer) ab 4/97

Gerd Kunert, Professur Wissenschaftliches Rechnen (Prof. Heinrich)

2.2 Ausgangsfragestellung/Einleitung

Wenn die Lösung einer partiellen Differentialgleichung unterschiedliches Verhalten in verschiedenen Raumrichtungen aufweist, dann ist es eine natürliche Idee, dies auch in der Finite-Elemente-Approximation widerzuspiegeln. So können finite Elemente e (Dreiecke, Rechtecke, Tetraeder, Dreiecksprismen, Quader) mit verschiedenen Ausdehnungen in verschiedenen Richtungen benutzt werden, sogenannte anisotrope finite Elemente. Um diese Eigenschaft mathematisch zu beschreiben, bezeichnen wir mit h_e und ϱ_e den Um- bzw. Inkugeldurchmesser von e. Ist $h_e \gg \varrho_e$ oder sogar $h_e/\varrho_e \to \infty$ für $h_e \to 0$, dann nennt man e anisotrop. Im Gegensatz dazu werden isotrope Elemente durch $h_e = \mathcal{O}(\varrho_e)$ charakterisiert; diese Eigenschaft ist für Dreiecke äquivalent zur Zlámal'schen Minimalwinkelbedingung.

Bereits in den 50-er und 70-er Jahren wurde gezeigt, daß einige Klassen von lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen für anisotrope Elemente bewiesen werden können. Die Zlámal'sche Minimalwinkelbedingung wurde ersetzt durch eine Maximalwinkelbedingung [BA76, Gre75, Jam76, Syn57]. Trotzdem werden in der Mehrzahl der Veröffentlichungen zu Theorie und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode anisotrope Elemente ausgeschlossen. Auch kommerzielle Finite-Elemente-Programme beschränken zum Teil das maximale Verhältnis von h_e zu ϱ_e, zum Beispiel auf 5.

Seit Ende der 80-er Jahre wird die Idee der anisotropen Vernetzungen verstärkt aufgegriffen, zum Beispiel für Interpolationsaufgaben [AD92, AL94, AN97, Bä94, DS91, Kř91, Kř92, Rip92, ŽV95], in singulär gestörten Problemen und strömungsmechanischen Anwendungen [AHTV+96, AL96, Bec95, DR97, KR90, PVMZ87, Shi92, SO97, ZR93, ZW94], für die Behandlung von Kantensingularitäten [AD92, AN96, AN97, Pet89] und in adaptiven Verfahren [BD97, CHM95, Kun97, PVMZ87, Rac93, Sie96, ZW94]. Diese Liste ist sicherlich unvollständig, aber aus diesen Arbeiten kann man zwei Schlußfolgerungen ziehen.

- Anisotrope Vernetzungen haben ein großes Potential für die Konstruktion äußerst effektiver numerischer Verfahren (Interpolation, Finite-Elemente-Methode, Finite-Volumen-Methode, Randelementmethode), weit effektiver als es bei einer Beschränkung auf isotrope Elemente möglich ist.

- Es ist noch viel Forschungsarbeit zu leisten, um alle Bestandteile solcher Verfahren (inklusive A-priori- und A-posteriori-Fehlerabschätzungen und die Lösung der entstehenden Finite-Elemente-Gleichungssysteme) mathematisch zu fundieren.

Im Teilprojekt A1 waren insbesondere die folgenden vier Teilaufgaben angegangen worden:

Teilaufgabe „A-priori-Fehlerabschätzungen“.

> Wie müssen die Finite-Elemente-Vernetzungen gewählt werden? Wie kann man diese konstruieren?

Zu dieser Teilaufgabe gibt es seit Anfang der 90-er Jahre Untersuchungen in der Arbeitsgruppe des Antragstellers. Ziel war es im Berichtszeitraum vor allem, bereits vor Beginn des SFB begonnene Arbeiten zu einem vorläufigen Abschluß (der Habilitationsschrift von Th. Apel) zu bringen. Diese Arbeiten besitzen vorbereitenden Charakter für die anderen Teilaufgaben:

- Im Teilthema Vorkonditionierung sollen sinnvolle Diskretisierungen von Modellproblemen behandelt werden, das heißt, die Vernetzungen sollen bei optimaler Komplexität optimale Abschätzungen des Diskretisierungsfehlers gestatten.

- Die A-priori-Fehlerbetrachtungen zeigen auch diejenigen Klassen von Netzen auf, für die die Fehlerschätzer zuverlässig und effektiv arbeiten sollen.

- Bei der Untersuchung des Diskretisierungsfehlers wurden lokale Interpolationsfehlerabschätzungen benutzt, die für anisotrope Netze in vielen Fällen erst hergeleitet werden mußten. Solche Abschätzungen werden auch benötigt zur Begründung von Multilevel-/Multigrid-Techniken zur Lösung der Gleichungssysteme und zur analytischen Untersuchung von Fehlerschätzern.

Teilaufgabe „Vorkonditionierung“.

> Wie verändern anisotrope Finite-Elemente-Netze die Eigenschaften der zu lösenden Gleichungssysteme? Wie können diese Gleichungssysteme effektiv gelöst werden?

Zur Auflösung der entstehenden Finite-Elemente-Gleichungssysteme werden heute typischerweise Multigrid-Verfahren [Bra92, Hac85, Hac91, ST82], Varianten des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung (zum Beispiel Multilevel-Vorkonditionierer [AG83, AV89, AV90, BY93, BPX90, DK92, Gri94, JL91, Osw94, Xu89, Xu92, Yse86, Yse90, Zha92] und Gebietszerlegungsvorkonditionierer [BPS89, DW90, Tal94, Mey90, Nep91b, Nep91a, SBG96]) oder Kombinationen aus beiden Herangehensweisen genutzt. Theoretische Resultate bezüglich der Effektivität dieser Verfahren (zum Beispiel der Konditionszahl des vorkonditionierten Systems) wurden bisher fast ausschließlich für isotrope Netze hergeleitet. Ansätze zu einer Verallgemeinerung finden sich in den Arbeiten [Rac95, Sch98, Nep96]. Diese werden im Abschnitt 2.4.2 beschrieben.

Teilaufgabe „Fehlerschätzer“.

> Arbeiten die bekannten Fehlerschätzer auch für anisotrope Netze? Wie können sie gegebenfalls modifiziert werden? Kann man Zuverlässigkeit und Effizienz nachweisen? Wie können in einem adaptiven Verfahren anisotrope Lösungseigenschaften berücksichtigt werden?

Seit dem Ende der 70-er Jahre werden Fehlerschätzer und darauf aufbauende adaptive Finite-Elemente-Verfahren breit untersucht. Jedoch werden in den meisten numerisch-analytischen Arbeiten, siehe zum Beispiel [Ver96] und dort zitierte Referenzen, nur isotrope Netze betrachtet. Eine rigorose Analysis für anisotrope Netze (Rechtecke, Prismen, Quader) wurde nur in der Arbeit von Siebert [Sie96] durchgeführt. Erste Ergebnisse aus der Gruppe des Antragstellers wurden in [Kun95] dokumentiert.

Ziel der Arbeit im Teilprojekt war es, Fehlerschätzer für anisotrope Dreiecks- und Tetraedernetze zu konstruieren und analytisch zu untersuchen. Dabei wurden verschiedene Differentialgleichungen, verschiedene Typen von Fehlerschätzern und verschiedene Normen des Fehlers betrachtet, siehe Abschnitte 2.3.3.1 – 2.3.3.6.

In einem adaptiven Algorithmus wird aus Informationen, die aus einer vorhergehenden Näherungslösung abgeleitet werden, ein neues Finite-Elemente-Netz konstruiert. Aus der Literatur sind dazu im wesentlichen drei Strategien bekannt: Neuvernetzung unter Ausnutzung der gewonnenen lokalen Informationen (siehe zum Beispiel den Überblicksartikel [Sim94] und die dort zitierte Literatur), Teilung der Elemente des vorhandenen Netzes (anisotrop durch *blaue* Verfeinerung [KR90]) und Knotenverschiebung (r-Version der FEM). Es ist außerhalb des Rahmens dieses Berichts, diese Strategien genauer zu diskutieren und zu werten. Die gewonnene Einsicht aus der Literatur ist, daß jede dieser Strategien für dreidimensionale Aufgaben eine sehr komplexe Programmieraufgabe ist. Deshalb wurde der Arbeitsschwerpunkt zunächst auf die Untersuchung der Fehlerschätzer und deren Realisierung innerhalb der parallelen 3D-Finite-Elemente-Codes *SPC-PMPo 3D* gelegt.

Teilaufgabe „Experimentalrealisierungen“.

Seit etwa 1995 arbeiten mehrere Arbeitsgruppen (mit verschiedenen Schwerpunkten) innerhalb des SFB 393 an der Implementierung der Finite-Elemente-Methode für verschiedene Problemklassen über dreidimensionalen Gebieten auf Parallelrechnern. Die Beiträge der Projektmitarbeiter Th. Apel und G. Kunert werden innerhalb des Berichts zum Teilprojekt A3 beschrieben.

2.3 Forschungsaufgaben/Methoden

2.3.1 Teilaufgabe „A-priori-Fehlerabschätzungen“

2.3.1.1 Lokale Interpolationsfehlerabschätzungen

In Zusammenarbeit von M. Dobrowolski (Würzburg) und Th. Apel wurden in einer grundlegenden Arbeit [AD92] anisotrope lokale Interpolationsfehlerabschätzungen für verschiedene Dreiecks-, Rechtecks- und Tetraederelemente hergeleitet. Anisotrop bedeutet hier, daß die Elementausdehnungen in den verschiedenen Richtungen auch in der Abschätzung auftreten, und zwar vor den jeweiligen Richtungsableitungen. Diese lokalen Abschätzungen wurden dann in Zusammenarbeit von Th. Apel mit S. Nicaise (Valenciennes) und G. Lube (Göttingen) verallgemeinert: in [AL94, AN96] für Tetraederelemente und Funktionen aus gewichteten Sobolevräumen und in [AL98] für höhere Ableitungen des Interpolationsfehlers (Dreiecks- und Tetraederelemente). Unbefriedigend oder nicht geklärt waren zum Zeitpunkt der Antragstellung die folgenden Punkte, die genauer untersucht werden sollten:

- Inwieweit lassen sich die Abschätzungen auf nicht-affine Vierecks- und Hexaederelemente übertragen? Falls sich herausstellen würde, daß das nicht möglich ist, wären Dreiecks- und Tetraederelemente im Kontext anisotroper Vernetzungen den Vierecks- und Hexaederelementen vorzuziehen.
- Für die Behandlung der Überlagerung von Kanten- und Eckensingularitäten (die in allgemeinen Polyedergebieten die Regel ist) müssen Fehlerabschätzungen auch für Funktionen aus Sobolevräumen $V^{k,p}_{\beta,\delta}$ mit zwei Gewichten hergeleitet werden.
- Wenn die betrachtete Funktion nicht genügend regulär ist (zum Beispiel die Lösung der Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen in einem dreidimensionalen Gebiet mit einer Kante mit überstumpfem Innenwinkel), dann ist die Lagrange-Interpolierende nicht wohldefiniert ($u \in W^{s,2}(\Omega) \not\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ für $s \leq 1.5$). Die Interpolation vom Clément- oder Scott-Zhang-Typ [Clé75, SZ90] ist für nichtglatte Funktionen (zum Beispiel $H^1(\Omega)$-Funktionen) definiert. Können entsprechende anisotrope lokale Fehlerabschätzungen bewiesen werden? Erste Ergebnisse für Rechteckelemente mit bilinearen Ansatzfunktionen wurden in [Bec95, Sie96] gezeigt.

2.3.1.2 Ecken- und Kantensingularitäten

Seit den Arbeiten [Pet89, AD92] ist bekannt, daß Kantensingularitäten in der Lösung des Poissonproblems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

in Polyedergebieten durch anisotrope Netzverfeinerung behandelt werden können.

- In den Arbeiten zur FEM [AD92, AN96] wurde eine höhere Regularität der rechten Seite vorausgesetzt. Kann auch der klassische Fall $f \in L^2(\Omega)$

behandelt werden? Dieser Fall ist insbesondere für die Herleitung von L^2-Fehlerabschätzungen mit dem Nitsche-Trick von Interesse.

- In den Arbeiten [AD92, AN96] wurden ausschließlich Kantensingularitäten behandelt. Aufgaben in allgemeinen Polyedergebieten, bei denen sich Kanten- und Eckensingularitäten überlagern, wurden nicht betrachtet. Anschaulich klar war, daß die anisotrope Verfeinerung nahe der Kanten durch eine entsprechende isotrope Verfeinerung in der Umgebung singulärer Ecken überlagert werden muß. Eine konstruktive (programmierbare) Beschreibung solcher Netze und die dazugehörige Fehlerabschätzung stand aus.

- Inwieweit können die Resultate für das Poissonproblem auf allgemeinere Aufgabenstellungen übertragen werden, zum Beispiel auf das anwendungsrelevantere Elastizitätsproblem?

2.3.1.3 Randschichten in singulär gestörten Problemen

Das Konvektions-Diffusions-Reaktionsproblem

$$-\varepsilon\Delta u + b\cdot\nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

ist für $\varepsilon \ll \|b\|$ oder $\varepsilon \ll \|c\|$ vom singulär gestörten Typ. Insbesondere treten in der Umgebung des Randes (eines Teils des Randes) im allgemeinen Schichten auf, in denen die n-te partielle Ableitung der Lösung senkrecht zum Rand wie ε^{-n} wächst. Solche Effekte könne vorteilhaft über anisotropen Netzen approximiert werden. Zum Zeitpunkt der Antragstellung waren dazu im wesentlichen Arbeiten zur Differenzenmethode bekannt, zum Beispiel [Shi92]. In Zusammenarbeit von G. Lube (Göttingen) und Th. Apel wurde eine stabilisierte Finite-Elemente-Methode vom Galerkin/Least-squares-Typ untersucht [AL96]. In den letzten Jahren ist internatinal eine große Anzahl von Arbeiten zu diesem Thema erschienen, siehe den Überblicksartikel [Roo97]. Spezifische Fragestellungen, die in unserer Arbeitsgruppe von Interesse sind, beinhalten die folgenden.

- Wie breit muß die Verfeinerungszone gewählt werden?

- Ist das reine Galerkin-Verfahren ausreichend, wenn das Netz adäquat gewählt wird? Oder ist ein stabilisiertes Verfahren nötig?

- Welchen Einfluß haben geometrische Singularitäten wie Ecken oder Kanten?

2.3.2 Teilaufgabe „Vorkonditionierung“

Die Wahl einer geeigneten Diskretisierung ist nur ein Teil der numerischen Lösung eines Randwertproblems. Desweiteren ist ein algebraisches Gleichungssystem für die Koeffizienten der Näherungslösung in einer bestimmten Basis zu lösen. Wir interessieren uns hier für Modellprobleme, deren adäquate Diskretisierung auf anisotrope Finite-Elemente-Netze führt. Beispiele mit symmetrischer und positiv definiter Systemmatrix sind das Poissonproblem in Gebieten mit Kanten (vergleiche 2.3.1.2) und das singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

$$-\varepsilon^2 \Delta u + cu = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

(vergleiche 2.3.1.3). Die Konstruktion und analytische Begründung entsprechender angepaßter Lösungsverfahren ist in kurzer Zeit nicht realisierbar. Erste Fragestellungen waren die folgenden.

- Wie robust sind klassische Lösungstechniken in bezug auf eine anisotrope Verzerrung der Finite-Elemente-Netze?
- Welche Erkenntnisse liefert die Literatur zum Thema Anisotropie?
- Welche Lösungsansätze sind vielversprechend und sollten eingehender untersucht werden?

Außerdem dienten die weiteren Arbeiten zu lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen (siehe 2.3.1.1) als analytische Voruntersuchungen für die Beweise, die innerhalb dieser Teilaufgabe zu führen sind.

2.3.3 Teilaufgabe „Fehlerschätzer“

Die Grundlage der Arbeiten bildete die Definition geeigneter Fehlerschätzer, die auf anisotropen Netzen angewendet werden können. Die besondere Betonung lag jedoch auf einer rigorosen analytischen Betrachtung der oberen und unteren Schranke des Fehlers. Obwohl aus der Literatur etliche Heuristiken bekannt sind, beschränkte sich zum Beginn der Projektarbeit die bekannte Analysis auf [Sie96] und [Kun95]. Dort wurden Residuenfehlerschätzer für die H^1-Norm des Fehlers für die Poissongleichung untersucht.

Die typischen Aufgaben und Methoden der oben genannten Fehlerschätzer werden in den folgenden Abschnitten detaillierter beschrieben. Der von Kunert in [Kun95] und [Kun97] untersuchte Residuenfehlerschätzer in der H^1-Norm für das Poisson-Problem bildet dabei eine wesentliche Grundlage, sowohl für einen Teil der Beweise als auch für die Techniken und Hilfsmittel, die jeweils benutzt werden.

2.3.3.1 Poisson-Gleichung – H^1-Fehlerschätzer – lokales Problem

Für die Poissongleichung soll ein H^1-Fehlerschätzer auf der Basis eines lokalen Problems konstruiert werden. Es soll gezeigt werden, daß

- dieser Fehlerschätzer in einem gewissen Sinne zum H^1-Residuenfehlerschätzer äquivalent ist,
- der Fehler in der H^1-Norm nach oben und unten durch den Fehlerschätzer beschränkt wird.

Aus der Literatur sind mehrere isotrope Fehlerschätzer bekannt, wobei die Arbeit von Verfürth [Ver96] herauszuheben ist. Für die Konstruktion eines anisotropen Schätzers kann analog verfahren werden. Auch die Beweisideen sind prinzipiell ähnlich zu den in [Ver96] vorgestellten Prinzipien. Dabei werden diejenigen Bubble-Funktionen verwendet, die auch schon beim H^1-Residuenfehlerschätzer genutzt werden, sowie die entsprechenden Inversen Ungleichungen.

Die konkreten Beweise gestalten sich zum Teil zum Teil technisch schwieriger. Wo z.B. im isotropen Fall drei Raumrichtungen zur Verfügung stehen, kann im Anisotropen nur eine spezielle Richtung verwendet werden. Insbesondere in Verbindung mit Neumann- und Robin-Randbedingungen versagt dann die übliche Transformationstechnik, so daß eine ausgefeiltere Abbildung zum Tragen kommt. Dazu wird die Kompaktheit gewisser Mengen genutzt.

2.3.3.2 Poisson-Gleichung – Zienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzer

Für die Poissongleichung soll ein Zienkiewicz-Zhu-ähnlicher Fehlerschätzer konstruiert werden und gezeigt werden, daß

- dieser Fehlerschätzer in einem gewissen Sinne zum H^1-Residuenfehlerschätzer äquivalent ist,
- der Fehler in der H^1-Norm nach oben und unten durch den Fehlerschätzer beschränkt wird.

Im isotropen Fall sind Beweise von z.B. Rank/Zienkiewicz [RZ87] und Verfürth [Ver96] bekannt.

Ein anisotroper Fehlerschätzer für Quadernetze läßt sich vergleichsweise einfach konstruieren. Die Beweise sind nahezu vollständig analog zu [RZ87].

Für anisotrope Tetraedernetze konnte kein allgemeiner Fehlerschätzer gefunden werden, sondern es konnte nur der Spezialfall von tensorprodukt-artigen Tetraedernetze analysiert werden [Kun97]. Dabei kamen wiederum spezielle Transformationen zum Einsatz.

2.3.3.3 Poisson-Gleichung – L_2-Residuenfehlerschätzer

Für die Poissongleichung soll ein Residuenfehlerschätzer für die L_2-Norm des Fehlers konstruiert werden. Es soll gezeigt werden, daß der Fehler in der L_2-Norm nach oben und unten durch den Fehlerschätzer beschränkt wird.

Aus der Literatur der isotropen Fehlerschätzer ist die Arbeit von Eriksson/Johnson [EJ91] bekannt, wo auch ungleichmäßige Netze betrachtet werden. Die Verwendung der Dualität (Nitsche-Trick) spielt eine wesentliche Rolle, erschwert aber andererseits eine Analyse der auftretenden Konstanten.

Eine obere Schranke des Fehlers kann (wie auch beim H^1-Residuenfehlerschätzer) mit Hilfe einer anisotropen Interpolationsfehlerabschätzung gewonnen werden. Diese wird u.a. mittels der üblichen Transformations-Technik (auf ein Referenzelement) hergeleitet.

Der Beweis einer unteren Schranke des Fehlers folgt den Ideen des H^1-Residuenfehlerschätzers und benutzt Bubble-Funktionen und Inverse Ungleichungen. Aufgrund der anderen Norm und der dadurch bedingten höheren Glattheit müssen jedoch andere Bubble-Funktionen verwendet werden, was sich insbesondere bei den Bubble-Funktionen über den Tetraederflächen aufwendig gestaltet. Das erfordert neue Beweistechniken, da eine Transformation von Δv auf das Referenzelement schwierig ist.

2.3.3.4 Poisson-Gleichung – L_2-Fehlerschätzer – lokales Problem

Bei den H^1-Fehlerschätzern hat sich gezeigt, daß der Fehlerschätzer auf der Basis eines lokalen Problems zwar aufwendiger zu berechnen ist, gleichzeitig aber auch genauere Resultate liefert. Dies bestätigt zugleich die Analysis.

Aus diesen Gründen sollte untersucht werden, ob ein L_2-Fehlerschätzer auf der Basis eines lokalen Problems konstruiert werden kann, und ob dieser wiederum besser ist als der L_2-Residuenfehlerschätzer. Es soll insbesondere gezeigt werden, daß

- dieser Fehlerschätzer in einem gewissen Sinne zum L_2-Residuenfehlerschätzer äquivalent ist,
- der Fehler in der L_2-Norm nach oben und unten durch den Fehlerschätzer beschränkt wird.

Aus der Literatur ist kein entsprechendes Vorbild für isotrope Netze bekannt. Die Beweise fußen sowohl auf den Ideen des L_2-Residuenfehlerschätzers (z.B. Verwendung der L_2-Bubble-Funktionen und entsprechender Inversen Ungleichungen) als auch des H^1-Fehlerschätzers auf Basis eines lokalen Problems (generelle Beweisstruktur). Die geeignete Wahl der L_2-Bubble-Funktionen spielt hier eine entscheidende Rolle für Beweistechnik. Es wird vermutet, daß der Einfluß dieser L_2-Bubble-Funktionen auf die numerische Qualität des Fehlerschätzers wenigstens genauso groß ist.

2.3.3.5 Diffusions-Reaktions-Gleichung – Residuenfehlerschätzer

Ziel war die Konstruktion eines Fehlerschätzers für die singulär gestörte Diffusions-Reaktions-Gleichung

$$-\varepsilon\Delta u + u = f \qquad \text{in } \Omega \qquad\qquad u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega.$$

Für den isotropen Fall liegt mit Verfürth [Ver97] eine erste Arbeit vor, in der ein zum Fehler äquivalenter Fehlerschätzer für $\varepsilon \to 0$ beschrieben wird. Die dort verwendeten Ansätze wurden auf den anisotropen Fall übertragen, wobei wesentliche Teile des H^1-Fehlerschätzers beim Poisson-Problem genutzt wurden. Die Äquivalenz zum Fehler (auch für $\varepsilon \to 0$) wurde durch die geeignete Wahl der Koeffizienten erreicht und mit Hilfe spezieller Bubble-Funktionen bewiesen.

2.3.3.6 Neumann- und Robin-Randbedingungen

Ziel war es, die Fehlerschätzer auch bei Neumann- und Robin-Randbedingungen anwendbar zu machen. Insbesondere Robin-Randbedingungen wurden auch bei isotropen *a posteriori* Fehlerschätzern in der Literatur nicht ausreichend behandelt.

Je nach Typ des Fehlerschätzers war eine Modifikation der Bubble-Funktionen nötig, die ihrererseits die Inversen Ungleichungen etc. beeinflußt. Ein Teil dieser Ergebnisse sind auch für isotrope Netze neuartig.

Literaturverzeichnis zu 2.3 (eigene Vorarbeiten und Fremdliteratur)

[AHTV+96] D. Ait-Ali-Yahia, W.G. Habashi, A. Tam, M.-G. Vallet und M. Fortin. A directionally adaptive methodology using an edge-based error estimate on quadrilateral grids. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 23:673–690, 1996.

[AD92] Th. Apel und M. Dobrowolski. Anisotropic interpolation with applications to the finite element method. *Computing*, 47:277–293, 1992.

[AG83] O. Axelsson und I. Gustafsson. Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximation. *Math. Comp.*, 40:219–242, 1983.

[AL94] Th. Apel und G. Lube. Local inequalities for anisotropic finite elements and their application to convection-diffusion problems. Preprint SPC94_26, TU Chemnitz-Zwickau, 1994.

[AL96] Th. Apel und G. Lube. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods. *Numer. Math.*, 74:261–282, 1996.

[AL98] Th. Apel und G. Lube. Anisotropic mesh refinement for a singularly perturbed reaction diffusion model problem. *Appl. Numer. Math.*, 26:415–433, 1998. Revised version of Preprint SFB393/96-11, TU Chemnitz-Zwickau, 1996.

[AN96] Th. Apel und S. Nicaise. Elliptic problems in domains with edges: anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes. In J. Cea, D. Chenais, G. Geymonat und J. L. Lions, Hrsg., *Partial Differential Equations and Functional Analysis (In Memory of Pierre Grisvard)*, Seiten 18–34. Birkhäuser, Boston, 1996. Shortened version of Preprint SPC94_16, TU Chemnitz-Zwickau, 1994.

[AN97] Th. Apel und S. Nicaise. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. *Math. Methods Appl. Sci.*, 20: , 1997. To appear.

[AV89] O. Axelsson und P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods I. *Numer. Math.*, 56:157–177, 1989.

[AV90] O. Axelsson und P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(6):1569–1590, 1990.

[Bä94] E. Bänsch. Anisotropic interpolation estimates. Preprint 373, SFB 256, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 1994.

[BA76] I. Babuška und A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13:214–226, 1976.

[BD97] G. C. Buscaglia und E. A. Dari. Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1997. To appear.

[Bec95] R. Becker. *An adaptive finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations on time-dependent domains.* Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1995.

[BPS89] J. H. Bramble, J. E. Pasciak und A. H. Schatz. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring I–IV. *Math. Comp.*, 1986, 1987, 1988, 1989. 47, 103–134, 49, 1–16, 51, 415–430, 53, 1–24.

[BPX90] J. H. Bramble, J. E. Pasciak und J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 55:1–22, 1990.

[Bra92] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer, Berlin, 1992.

[BY93] F. A. Bornemann und H. Yserentant. A basic norm equivalence for the theory of multilevel methods. *Numer. Math.*, 64:455–476, 1993.

[CHM95] M. J. Castro-Diaz, F. Hecht und B. Mohammadi. New progress in anisotropic grid adaption for inviscid and viscous flow simulations. In *Proceedings of the* 4^{th} *Annual International Meshing Roundtable*, Seiten 73–85, Albuquerque, NM, 1995. Sandia national Laboratories.

[Clé75] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 2:77–84, 1975.

[DK92] W. Dahmen und A. Kunoth. Multilevel preconditioning. *Numer. Math.*, 63:315–344, 1992.

[DR97] M. Dobrowolski und H.-G. Roos. A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes, 1997. Extended version of Preprint MATH-NM-21-1996. Submitted.

[DS91] E. F. D'Azevedo und R. B. Simpson. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numer. Math.*, 59:321–348, 1991.

[DW90] M. Dryja und O. B. Widlund. Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems. In T. F. Chan, R. Glowinski, J. Periaux und O. B. Widlund, Hrsg., *Domain decomposition methods for partial differential equations*, Seiten 3–21, Philadelphia, 1990. SIAM. Proc. of the 3rd International Symposium, Houston, 1989.

[EJ91] K. Eriksson und C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:43–77, 1991.

[Gre75] J. A. Gregory. Error bounds for linear interpolation in triangles. In J. R. Whiteman, Hrsg., *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, Seiten 163–170. Academic Press, London, 1975.

[Gri94] M. Griebel. *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen.* Teubner, Stuttgart, 1994.

[Hac85] W. Hackbusch. *Multi-grid methods and applications.* Springer, Heidelberg, 1985.

[Hac91] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzer Gleichungssysteme.* Teubner, Stuttgart, 1991. English translation: Iterative solution of large sparse systems of equations. Springer, New York, 1994.

[Jam76] P. Jamet. Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés. *R.A.I.R.O. Anal. Numér.*, 10:43–61, 1976.

[JL91] M. Jung und U. Langer. Applications of multilevel methods to practical problems. *Surv. Math. Ind.*, 1:217–257, 1991.

[KR90] R. Kornhuber und R. Roitzsch. On adaptive grid refinement in the presence of internal and boundary layers. *IMPACT of Computing in Sci. and Engrg.*, 2:40–72, 1990.

[Kun95] G. Kunert. Ein Residuenfehlerschätzer für anisotrope Tetraedernetze und Dreiecksnetze in der Finite-Elemente-Methode. Preprint SPC95_10, TU Chemnitz–Zwickau, 1995.

[Kun97] G. Kunert. Error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. Preprint SFB393/97-16, TU Chemnitz, 1997.

[Kř91] M. Křížek. On semiregular families of triangulations and linear interpolation. *Appl. Math.*, 36:223–232, 1991.

[Kř92] M. Křížek. On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:513–520, 1992.

[Mey90] A. Meyer. A parallel preconditioned conjugate gradient method using domain decomposition and inexact solvers on each subdomain. *Computing*, 45:217–234, 1990.

[Nep91a] S. V. Nepomnyaschikh. Mesh theorems on traces, normalization of function traces and their inversion. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 6:1–25, 1991.

[Nep91b] S. V. Nepomnyaschikh. Method of Splitting into Subspaces for Solving Elliptic Boundary Value Problems in Complex–form Domains. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 6:151–168, 1991.

[Nep96] S. V. Nepomnyaschikh. Decomposition for elliptic problems with disproportional parameters, 1996.

[Osw94] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation: Theory and Applications.* Teubner, Stuttgart, 1994.

[Pet89] T. von Petersdorff. *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder — Singularitäten und Approximationen mit Randelementmethoden.* Dissertation, TH Darmstadt, 1989.

[PVMZ87] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan und O. C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computation. *J. Comp. Phys.*, 72:449–466, 1987.

[Rac93] W. Rachowicz. An anisotropic h-type mesh refinement strategy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 109:169–181, 1993.

[Rac95] W. Rachowicz. An overlappinf domain decomposition preconditioner for an anisotropic h-adaptive finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 127:269–292, 1995.

[Rip92] S. Rippa. Long and thin triangles can be good for linear interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:257–270, 1992.

[Roo97] H.-G. Roos. Layer-adapted grids for singular perturbation problems. Preprint MATH-NM-03-1997, TU Dresden, 1997.

[RZ87] E. Rank und O. C. Zienkiewicz. A simple error estimator in the finite element method. *Comm. Appl. Numer. Methods*, 3:243–249, 1987.

[SBG96] B. Smith, P. Bjorstad und W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, New York, 1996.

[Sch98] J. Schoeberl. Robust multigrid preconditioning for parameter-dependent problems I: the Stokes-type case. In W. Hackbusch und G. Wittum, Hrsg., *Multigrid Methods V. Proceedings of the fifth European Multigrid Conference, Stuttgart, 1996.* to appear, 1998.

[Shi92] G. I. Shishkin. *Mesh approximations of singularly perturbed elliptic and parabolic problems.* Russ. Acad. Sci., Ekaterinburg, 1992. In Russian.

[Sie96] K. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numer. Math.*, 73:373–398, 1996.

[Sim94] R. B. Simpson. Anisotropic mesh transformation and optimal error control. *Applied Numerical Mathematics*, 14:183–198, 1994.

[SO97] M. Stynes und E. O'Riordan. A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection-diffusion problem. *J. Math. Anal. and Appl.*, 214:36–54, 1997.

[ST82] K. Stüben und U. Trottenberg. Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. In W. Hackbusch und U. Trottenberg, Hrsg., *Multigrid Methods, Proceedings of the Conference held at Köln–Porz, November 23–27, 1981*, Jgg. 960 of *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 1–176, Berlin, 1982. Springer.

[Syn57] J. L. Synge. *The hypercircle in mathematical physics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

[SZ90] L. R. Scott und S. Zhang. Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54:483–493, 1990.

[Tal94] P. Le Tallec. Domain Decomposition Methods In Compututional Mechanics. *Computational Mechanics Advances (North Holland)*, 1:121–220, 1994.

[Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh–refinement techniques.* Wiley, Chichester, 1996.

[Ver97] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimators for the singularly perturbed Helmholtz equation. *Numer. Math.*, , to appear.

[Xu89] J. Xu. *Theory of Multilevel Methods.* Dissertation, Cornell University, 1989.

[Xu92] J. Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review*, 34:581–613, 1992.

[Yse86] H. Yserentant. On the multi–level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.

[Yse90] H. Yserentant. Two preconditioners based on the multi–level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 58:163–184, 1990.

[ŽV95] A. Ženíšek und M. Vanmaele. The interpolation theorem for narrow quadrilateral isoparametric finite elements. *Numer. Math.*, 72:123–141, 1995.

[Zha92] X. Zhang. Multilevel Schwarz methods. *Numer. Math.*, 63:521–539, 1992.

[ZR93] G. Zhou und R. Rannacher. Mesh orientation and anisotropic refinement in the streamline diffusion method. In M. Křížek, P. Neitaanmäki und R. Stenberg, Hrsg., *Finite Element Methods: Fifty Years of the Courant Element*, Jgg. 164 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Seiten 491–500. Marcel Dekker, Inc., New York, 1993. Also published as Preprint 93-57, Universität Heidelberg, IWR, SFB 359, 1993.

[ZW94] O. C. Zienkiewicz und J. Wu. Automatic directional refinement in adaptive analysis of compressible flows. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 37:2189–2210, 1994.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Teilaufgabe „A-priori-Fehlerabschätzungen"

2.4.1.1 Lokale Interpolationsfehlerabschätzungen

Viereckselemente. Lokale Interpolationsfehlerabschätzungen werden im allgemeinen auf einem Referenzelement $\hat{e}$ bewiesen und dann auf das betrachtete Element e transformiert, $e = F(\hat{e})$. Im betrachteten Fall anisotroper nicht-affiner Viereckselemente treten jedoch folgende Schwierigkeiten auf:

- Da das Element anisotrop ist, muß die Abschätzung auf dem Referenzelement dahingehend verschärft werden, daß einige Terme auf der rechten Seite im Gegensatz zur klassischen Theorie (isotrope Elemente) nicht auftreten. Das ist für alle Elementtypen so und wurde bereits in [AD92] behandelt.

- Bereits im einfachsten nicht-affinen (subparametrischen) Fall ist die Abbildung F nichtlinear (multilinear). Die Folge ist, daß bei der Transformation einiger Terme der rechten Seite der Abschätzung (nämlich der gemischten Ableitungen) infolge der Anwendung der Kettenregel Terme entstehen, die die Asymptotik verderben. Im Falle der isotropen Viereckselemente kann man das durch eine Verschärfung der Abschätzung auf dem Referenzelement umgehen, indem die gemischten Ableitungen vermieden werden.

Leider kann man nicht gleichzeitig alle in diesen beiden beiden Punkten genannten Terme auf der rechten Seite vermeiden. In der Arbeit [Ape98a] wurden zunächst die gemischten Ableitungen mit transformiert. Die Suboptimalität der entstehenden Abschätzung für e führte zunächst zur Einschränkung auf physische „Fast-Rechteckelemente“.

Die Abschätzung konnte aber inzwischen durch Verfeinerung der Beweistechnik verbessert werden [Ape98c], so daß anisotrope Viereckselemente in ihrer Anwendbarkeit *nicht* hinter anisotropen Dreieckselementen zurückstehen. Die Theorie wurde für Lagrange-Elemente beliebig hohen Grades und die einfachste subparametrische Abbildung (die multilineare) für Vierecks- und Hexaederelemente entwickelt.

Funktionen aus Sobolevräumen mit 2 Gewichten. In einer gemeinsamen Arbeit [AN97] mit S. Nicaise (Valenciennes) konnten die in den Anwendungen benötigten Abschätzungen für den Fall linearer Ansatzfunktionen in Tetraederelementen bewiesen werden, wobei die Abschätzungen aus [AN96] direkt verallgemeinert werden konnten. Ansatzfunktionen höheren Grades wurden in [Ape98c] mit eingeschlossen.

Interpolation nichtglatter Funktionen. Zunächst zeigte es sich, daß anisotrope Fehlerabschätzungen in einer L^p-Norm sowohl für den Clément- als auch für den Scott-Zhang-Operator bewiesen werden können [Ape97a]. Man kann sich jedoch leicht an einem Beispiel verdeutlichen, daß dies im allgemeinen nicht mehr für *Ableitungen* des Fehlers gilt.

Ein Ausweg besteht darin, eine eingeschränkte Klasse von Funktionen zu definieren, für die die gewünschte Abschätzung gilt. Dieser Zugang wurde von Siebert [Sie96] vorgeschlagen und in [Kun97] weiterverfolgt, wobei der Clément-Operator im Falle (multi-)linearer Ansatzfunktionen betrachtet wurde. Neu ist in [Kun97] die Betrachtung von Dreiecks- und Tetraederelementen.

Ein zweiter Ausweg wurde in [Ape97a] verfolgt. In dieser Arbeit wurden drei Modifikationen des Scott-Zhang-Operators untersucht und anisotrope Abschätzungen für fünf verschiedene Elementtypen (zwei- und dreidimensional) und Ansatzfunktionen beliebig hohen Grades gezeigt, wobei tensorproduktartige Netze zugrundegelegt wurden. Die Idee für zwei dieser Operatoren wurde bereits in [Bec95] geäußert. Dort wurde jedoch nur einer davon im Spezialfall der bilinearen Rechteckelemente untersucht.

2.4.1.2 Ecken- und Kantensingularitäten

Kanten und $f \in L^2(\Omega)$. Es zeigte sich, daß mit Hilfe der modifizierten Scott-Zhang-Operatoren optimale Fehlerabschätzungen (optimale Ordnung, keine unnötig starke graduelle Verfeinerung) beweisbar sind, sowohl in der $H^1(\Omega)$-Norm als auch in der $L^2(\Omega)$-Norm. Leider können nur Tensorproduktgebiete behandelt werden, da eine Verallgemeinerung der modifizierten Scott-Zhang-Operatoren auf allgemeine Netze noch aussteht.

Allgemeine Polyedergebiete. In gemeinsamer Arbeit mit S. Nicaise (Valenciennes) wurde ein Algorithmus zur Netzanpassung an Ecken- und Kantensingularitäten entwickelt. Der Grundgedanke besteht in einer Zerlegung des Gebiets Ω in Subgebiete (Tetraeder), die nur maximal je eine Verfeinerungsecke oder -kante besitzen, so daß Netze nur für die vier entstehenden Fälle konstruiert werden müssen [AN97]. Es wurde bewiesen, daß der Fehler in der optimalen Ordnung abklingt, wenn nur die Verfeinerungsparameter klein genug gewählt werden. Abbildung 2.1 zeigt ein solches Netz am Beispiel der Fichera-Ecke und ein Diagramm, aus dem die optimale Fehlerordnung hervorgeht (Poisson-Problem $-\Delta u = R^{-1}$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, R ist der Abstand zur Ecke).

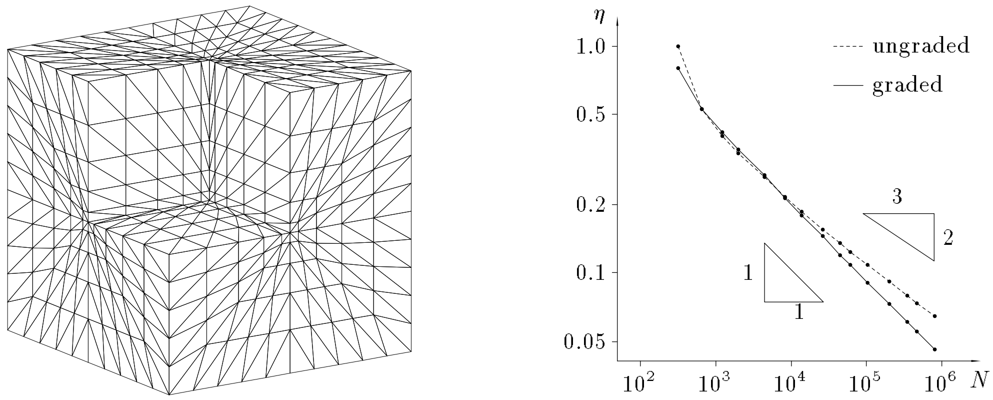

Abbildung 2.1: Angepaßte Vernetzung einer Fichera-Ecke und Fehlerdiagramm mit Vergleich von angepaßter und uniformer Vernetzung.

Wir unterstreichen, daß dieser Zugang der Philosophie im parallelen 3D-FEM-Programm *SPC-PMPo 3D* [Ape95, AMT95, AR97] entspricht, wo ein grobes Netz die Grundlage für die Lastbalancierung und die Kommunikation bildet.

Allgemeinere Aufgaben. Wir nehmen an, daß der beschriebene Zugang zur Netzanpassung für eine größere Klasse von Problemen anwendbar ist, da die singularitäten in gleicher Weise für allgemeine Randwertprobleme 2. Ordnung (Systeme von Differentialgleichungen eingeschlossen) charakterisiert werden können. Die entsprechende Theorie für isotrope Netzanpassung wurde in dieser Allgemeinheit in [ASW96] entwickelt. Im anisotropen Fall sind jedoch noch einige Fragen ungeklärt.

2.4.1.3 Randschichten in singulär gestörten Problemen

Beiträge zur Approximation in Randschichten bei singulär gestörten Modellproblemen wurden in zwei Artikeln, [AL96] (Konvektions-Diffusions-Reaktions-Problem) und [AL98] (Reaktions-Diffusions-Problem), geleistet. Auf einzelne Punkte wurde auch in [Ape98a, Ape97b, Ape98b] eingegangen. Eine Zusammenfassung der Resultate und die Ergänzung wichtiger weiterer Aspekte findet man in [Ape98c].

Zusammenfassend kann zunächst festgestellt werden, daß anisotrope Netzverfeinerung in den Randschichten geeignet ist, um die optimale Konvergenzordnung der FEM gleichmäßig bezüglich des Störungsparameters ε zeigen zu können. Stärken der genannten Arbeiten sind die Behandlung *allgemeiner* polygonaler/polyhedraler Gebiete und die Untersuchung von Ansatzfunktionen *beliebig hohen* Grades. Dazu wurden allerdings in den meisten Fällen (heuristisch begründete) Annahmen an die Lösung getroffen, die (bisher) nicht bewiesen werden konnten. Dieses Vorgehen ist in der internationalen Literatur auf diesem Gebiet durchaus verbreitet.

Wir wollen nun einzelne Ergebnisse anhand der in 2.3.1.3 aufgeworfenen Fragen darlegen.

Breite der Verbreiterungszone. Betrachten wir eine Randschicht, in der sich (vereinfachend gesagt) der Randschichtterm u_b in der Lösung u durch

$$|u_b(x)| \leq Ce^{-\gamma \mathrm{dist}(\mathrm{x},\partial\Omega)/\varepsilon}$$

beschreiben läßt. Dann ist u_b (samt aller Ableitungen) für $\mathrm{dist}(\mathrm{x},\partial\Omega) \geq \mathrm{a}_0\varepsilon|\ln\varepsilon|$ (mit hinreichend großem a_0) abgeklungen. Eine naheliegende Wahl der Breite der Verfeinerungszone ist folglich $a = a_0\varepsilon|\ln\varepsilon|$. Die konkurrierende Idee Shishkins ist jedoch eine von der globalen (gröbsten) Schrittweite abhängige Wahl in der Form $a = a_0\varepsilon|\ln h|$. Die Fehlerabschätzungen für beide Varianten, siehe [SO97, DR97] und die oben genannten eigenen Arbeiten, unterscheiden sich in entsprechenden Potenzen von $|\ln\varepsilon|^{-1}$ und $|\ln h|^{-1}$. (Die Beweise sind allerdings für beide Varianten unterschiedlich.) Da in praktischen Rechnungen $h \gg \varepsilon$ ist, ist $a = a_0\varepsilon|\ln h|$ zu favorisieren, allerdings sind die Unterschiede marginal.

Reines oder stabilisiertes Galerkinverfahren. Für ein Konvektions-Diffusions-Problem und das reine Galerkinverfahren über einem Netz mit $a = a_0\varepsilon|\ln h|$ konnte in [SO97] die (bis auf einen logarithmischen Faktor) optimale Konvergenz (*gleichmäßig bezüglich* ε) in der ε-gewichteten H^1-Norm bewiesen werden. Allerdings ist die Stabilität des Verfahrens (in praktischen Rechnungen) sehr sensibel bezüglich der Wahl der Konstanten a_0 [Roo97], so daß hier stabilisierte Verfahren, wie zum Beispiel in [AL96] untersucht, favorisiert werden müssen.

Beim selbstadjungierten Reaktions-Diffusions-Problem liefert das reine Galerkinverfahren (für jedes Netz) den kleinsten Fehler in der Energienorm (Projektionseigenschaft). Es konnte jedoch in [AL98] gezeigt werden, daß die Konvergenzordnung auch bei einer stabilisierten Variante erhalten bleibt, so daß eine gewisse Steuerungsmöglichkeit (zum Beispiel zur Optimierung des Fehlers in der Maximumnorm) gewonnen wird.

Eckensingularitäten. Aus der Regularitätstheorie ist bekannt, daß die Lösung elliptischer Randwertaufgaben im allgemeinen Singularitäten in der Umgebung von Ecken und Kanten aufweist. Diese treten nur dann nicht auf, wenn die Daten gewisse Kompatibilitätsbedingungen erfüllen. Diese geometrischen Singularitäten führen zu einer Verringerung der Konvergenzordnung, wenn das numerische Verfahren nicht entsprechend gegensteuert, zum Beispiel durch lokale Netzverfeinerung. Bei singulär gestörten Problemen sind also im allgemeinen zwei Netzverfeinerungen zu überlagern. Dieses komplexe Problem wird bisher allerdings kaum behandelt, es ist uns dazu lediglich die Arbeit [SSX96] zur *hp*-Version der FEM bekannt.

In der Mehrzahl der Arbeiten zur Netzverfeinerung bei geometrischen Singularitäten werden alle Daten als $\mathcal{O}(1)$ betrachtet. In der Literatur zu singulär gestörten

Problemen weren geometrische Singularitäten entweder ignoriert, oder es werden Anstrengungen unternommen, die Kompatibilitätsbedingungen herzuleiten, siehe zum Beispiel [DR97]. In [Ape98c] wurde für das zweidimensionale singulär gestörte Reaktions-Diffusions-Problem die adäquate Familie von Netzen für die h-Version der FEM beschrieben und die entsprechenden optimalen Finite-Elemente-Fehlerabschätzungen hergeleitet. Auch hier wurden allgemeine polygonale Gebiete und beliebiger Polynomgrad zugelassen.

2.4.2 Teilaufgabe „Vorkonditionierung“

Robustheit klassischer Lösungstechniken. Wir mußten feststellen, daß der BPX-Vorkonditionierer für das CG-Verfahren modifiziert werden muß, wenn anisotrope Finite-Elemente-Netze betrachtet werden.

Tabelle 2.1 zeigt Iterationszahlen, die bei der Lösung des Poissonproblems in einem Gebiet mit Kante beobachtet wurden. Der Parameter μ charakterisiert die Stärke der graduellen Verfeinerung: $\mu = 1$ entspricht dem nicht-graduierten Netz, für $\mu < 2/3$ ergibt sich eine anisotrope Verfeinerung, für die man die optimale Konvergenz des Approximationsfehlers beweisen kann. Wir sehen, daß die Iterationszahl für $N \to \infty$ bei $\mu = 1$ konstant wird, für $\mu < 1$ jedoch stark ansteigt.

	Netzgraduierung $\mu =$			
N	1.0	0.8	0.6	0.4
225	21	22	23	26
1377	31	34	40	54
9537	36	41	54	88
70785	40	48	73	140
545025	42	55	97	217

Tabelle 2.1: Anzahl der Iterationen für das Poissonproblem (Vorkonditionierung mit BPX)

	uniformes Netz $\varepsilon =$			Shishkin-Netz $\varepsilon =$		
N	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}
81	11	13	13	16	15	14
289	15	18	18	29	28	24
1089	17	21	22	41	55	46
4225	19	24	25	49	111	101
16641	20	25	27	57	214	161

Tabelle 2.2: Anzahl der CG-Iterationen für das Reaktions-Diffusions-Problem bei Vorkonditionierung mit BPX-MDS

Ähnliche Erfahrungen wurden bei einem Reaktions-Diffusions-Problem,

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega,$$

gesammelt, siehe Tabelle 2.2. Auf dieses Beispiel kommen wir später noch einmal zurück, da wir hier erfolgreich eine Modifikation des Vorkonditionierers testen konnten. Zur Motivation soll der nächste Abschnitt dienen.

Literatur zur Anisotropie. Zunächst ist zu bemerken, daß es eine Vielzahl von Arbeiten gibt, zum Beispiel [BZ, GO95, Hac85, Hac89, KW98], die anisotrope Differentialgleichungen, zum Beispiel $\varepsilon u_{xx} + u_{yy} = f$, betrachten, um die Robustheit von Lösungstechniken gegenüber einer Degenerierung der Koeffizienten in der Differentialgleichungen zu untersuchen. Dazu ist zunächst zu bemerken, daß dies zum einen ein andersgeartetes Anisotropieproblem ist, als es in unserer Arbeitsgruppe von Interesse ist. Desweiteren konzentrieren sich diese Arbeiten auf die Auflösung der Gleichungssysteme und betrachten nicht den singulär gestörten Charakter dieses Problems, der sich in einer adäquaten Diskretisierung niederschlagen müßte.

Nichtsdestotrotz führen die genannte wie auch die bei uns interessierenden Aufgaben zu anisotropen diskreten Problemen. Wir können aus den zitierten Arbeiten lernen, daß Knoten mit einer starken Kopplung im linearen Gleichungssystem in geeigneter Weise gemeinsam betrachtet werden müssen, zum Beispiel in einem Linien-Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter im Multigrid-Verfahren.

Ein Vorkonditionierer auf der Basis der überlappenden Gebietszerlegung $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ wird in [Rac95] für ein Poissonproblem mit anisotroper Diskretisierung betrachtet. Die Erkenntnis ist, daß die Gebiete Ω_j isotrop sein müssen und die minimale Überlappung $\Omega_j \cap \bigcup_{i \neq j} \Omega_i$ von der Größenordnung des Durchmessers von Ω_j sein muß. Allerdings wurde aus der Arbeit nicht klar, welcher Löser für das anisotrope Problem im isotropen Gebiet Ω_j eingesetzt wurde.

Probleme mit schlechten Parametern werden in [Sch98] betrachtet. Als Motivation wird das Poissonproblem in einem Streifengebiet $\Omega = (0,1) \times (0,\varepsilon)$ behandelt. Für $h > \varepsilon$ besitzt das Rechtecknetz nur 1 Element in y-Richtung. Die Knotenpaare mit gleichen x-Koordinaten werden im Glätter gemeinsam betrachtet. Der resultierende Jacobi-Glätter auf der Basis einer Blockdiagonalmatrix mit 2×2-Blöcken führt zu einem h-abhängigen, aber ε-unabhängigen Verfahren.

Ansätze zur Lösung der Finite-Elemente-Gleichungssysteme bei anisotroper Diskretisierung. Die studierte Literatur führte uns auf die Idee, den BPX-MDS-(Multilevel Diagonal Scaling) Vorkonditionierer dahingehend zu modifizieren, daß nicht die (Inversen der) Diagonalmatrizen verwendet werden, sondern Tridiagonalmatrizen. Diese entstehen aus den Diagonalen der Steifigkeitsmatrizen (für jedes Level eine Matrix) und denjenigen Nebendiagonalelementen, die zu stark (anisotrop) koppelnden Knoten gehören, siehe Bild 2.2. Die Komplexität des Verfahrens wird bei diesem Vorgehen nicht erhöht, es zeigt sich jedoch eine wesentliche Verbesserung der Iterationszahlen, siehe Tabelle 2.3.

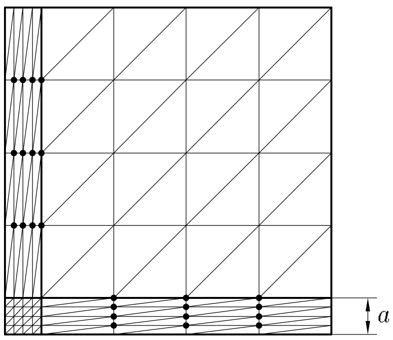

Abbildung 2.2: Illustration der Vernetzung beim Reaktions-Diffusions-Problem

	Shishkin-Netz $\varepsilon =$		
N	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}
81	11	13	–
289	16	16	18
1089	19	19	21
4225	21	22	23
16641	22	27	24

Tabelle 2.3: Iterationszahlen für das Reaktions-Diffusions-Problem bei Vorkonditionierung mit BPX-3

Wir wollen folgrnde Ideen in Zukunft weiter untersuchen. Für das Poissonproblem in Gebieten mit Kanten:

- Multigrid-Methoden mit in Blöcken gemeinsam betrachteten Knoten,
- BPX-artige Vorkonditionierer auf der Basis der gleichen Idee.

Diese Ideen sollen auch beim Reaktions-Diffusions-Problem verfolgt werden, jedoch zusätzlich:

- Multigrid-Verfahren mit ILU-Glättern,
- klassische Gebietszerlegung (in Bild 2.2 bieten sich 4 Gebiete mit gleichmäßiger Unterteilung geradezu an).

2.4.3 Teilaufgabe „Fehlerschätzer“

Die von G. Kunert bearbeiteten Aufgaben und wesentlichen Methoden sind im Kapitel 2.3.3 erwähnt, so daß die erhaltenen Ergebnisse hier recht kurz dargestellt werden. Nach unserem Wissen gibt es keine weiteren anisotropen *a posteriori* Fehlerschätzer für Tetraedernetze, die auch analytisch begründet sind.

2.4.3.1 Poisson-Gleichung – H^1-Fehlerschätzer – lokales Problem

Ein Fehlerschätzer konnte konstruiert werden und seine Äquivalenz zum Fehler sowie zum H^1-Residuenschätzer gezeigt werden [Kun97]. Dabei spielt die passende Ausrichtung des anisotropen Netzes zur anisotropen Lösung eine wesentliche Rolle, was sich auch in den entsprechenden Formeln niederschlägt. Eine analytische Quantifizierung dieser Ausrichtung bzw. Übereinstimmung liegt derzeit noch nicht vor. Erste Ergebnisse legen jedoch nahe, daß eine numerische Approximation der entsprechenden Werte möglich ist. Außerdem scheinen heuristisch gut gewählte Netze ausreichend für eine gute Qualität des Schätzers zu sein.
Erste numerische Resultate (mit zweidimensionalen Gebieten) stehen im Einklang mit der Theorie dieses Fehlerschätzers, d.h. die vorhergesagte Äquivalenz zwischen Fehler und Fehlerschätzer tritt auf.

2.4.3.2 Poisson-Gleichung – Zienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzer

Für den gefundenenen Fehlerschätzer konnten die Fehlerschranken im Spezialfall tensorprodukt-artiger Tetraedernetze bewiesen werden [Kun97]. Bei anderen Netzen kann der Schätzer versagen.

2.4.3.3 Poisson-Gleichung – L_2-Residuenfehlerschätzer

Ein Fehlerschätzer konnte konstruiert werden und seine Äquivalenz zum Fehler gezeigt werden [Kun97]. Wiederum ist die Ausrichtung des anisotropen Netzes zur Lösung wichtig, was jedoch heuristisch erreichbar ist. Erste numerische Resultate (2D und 3D) bestätigen die Theorie des Fehlerschätzer.

2.4.3.4 Poisson-Gleichung – L_2-Fehlerschätzer – lokales Problem

Ein Fehlerschätzer konnte konstruiert werden und seine Äquivalenz zum Fehler sowie zum L_2-Residuenschätzer gezeigt werden.

2.4.3.5 Diffusions-Reaktions-Gleichung – Residuenfehlerschätzer

Es wurde ein Fehlerschätzer gefunden, der auch bei $\varepsilon \to 0$ äquivalent zum Fehler ist [Kun97].

2.4.3.6 Neumann- und Robin-Randbedingungen

Offenbar erstmalig wurden (sowohl im isotropen und anisotropen Fall) die Robin-Randbedingungen $\partial u/\partial n = \alpha(g_R - u)$ in einen *a posteriori* Fehlerschätzer korrekt eingebaut. Dabei zeigte sich, daß ein zu den Neumann-Randbedingungen völlig analoges Vorgehen zu einem falschen Fehlerschätzer führen kann. Dies tritt bei geeigneten Werten des Austauschkoeffizients α und der lokalen Netzdichte h (isotroper Fall) bzw. $h1, h2, h3$ (anisotroper Fall) ein. Betrachtet wurden der H^1-Residuenfehlerschätzer und der H^1-Fehlerschätzer auf Basis eines lokalen Problems.

2.4.3.7 Programmtechnische Realisierung

Für dreidimensionale Aufgaben wird ein paralleles Programmpaket genutzt und weiterentwickelt; für zweidimensionale Aufgaben ein serielles Programm.

Für die 2D-Poisson-Gleichung wurden bisher (neben dem H^1-Residuenschätzer) der H^1-Fehlerschätzer auf der Basis eines lokalen Problems und der L_2-Residuenfehlerschätzer implementiert. Die Qualität der Netzausrichtung wurde durch die numerische Approximation einer gewissen Funktion erfaßt.

Für die 3D-Poisson-Gleichung wurden bisher ein H^1-Residuenschätzer und der L_2-Residuenfehlerschätzer implementiert. Die Qualität der Netzausrichtung wurde ebenfalls approximiert.

Literaturverzeichnis zu 2.4

eigene Veröffentlichungen im Berichtszeitraum

Referierte Literatur

[AL96] Th. Apel und G. Lube. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods. *Numer. Math.*, 74:261–282, 1996.

[AL98] Th. Apel und G. Lube. Anisotropic mesh refinement for a singularly perturbed reaction diffusion model problem. *Appl. Numer. Math.*, 26:415–433, 1998.

[AN96] Th. Apel und S. Nicaise. Elliptic problems in domains with edges: anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes. In J. Cea, D. Chenais,

G. Geymonat und J. L. Lions, Hrsg., *Partial Differential Equations and Functional Analysis (In Memory of Pierre Grisvard)*, Seiten 18–34. Birkhäuser, Boston, 1996.

[AN97] Th. Apel und S. Nicaise. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. *Math. Methods Appl. Sci.*, 20, 1997.

[Ape97a] Th. Apel. Interpolation of non-smooth functions on anisotropic finite element meshes. Preprint SFB393/97-6, TU Chemnitz-Zwickau, 1997. Eingereicht bei Math. Modeling Numer. Anal.

[Ape97b] Th. Apel. Treatment of boundary layers with anisotropic finite elements. In *Proc. GAMM-Jahrestagung 1997*, eingereicht.

[Ape98a] Th. Apel. Anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral finite elements. *Computing*, 60:157–174, 1998.

[Ape98b] Th. Apel. Anisotropic mesh refinement for the treatment of boundary layers. In M. Bach, C. Constanda, G. C. Hsiao, A.-M. Sändig und P. Werner, Hrsg., *Analysis, numerics and applications of differential and integral equations*, Jgg. 379 of *Pitman Research Notes in Mathematics*, Seiten 12–16, Harlow, 1998. Longman.

[ASW96] Th. Apel, A.-M. Sändig und J. R. Whiteman. Graded mesh refinement and error estimates for finite element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 19:63–85, 1996.

Sonstige Arbeiten

[AMT95] Th. Apel, F. Milde und M. Thess. *SPC-PMPo 3D* — Programmer's Manual. Preprint SPC95_34, TU Chemnitz-Zwickau, 1996.

[Ape95] Th. Apel. *SPC-PMPo 3D* — User's Manual. Preprint SPC95_33, TU Chemnitz-Zwickau, 1996.

[Ape98c] Th. Apel. Anisotropic finite elements: Local estimates and applications. Manuskript, TU Chemnitz, 1998 (wird eingereicht).

[AR97] Th. Apel und U. Reichel. Partitioning of finite element meshes for parallel computing: A case study. Preprint SFB393/96-18a, TU Chemnitz-Zwickau, 1997.

[Kun95] G. Kunert. Ein Residuenfehlerschätzer für anisotrope Tetraedernetze und Dreiecksnetze in der Finite-Elemente-Methode. Preprint SPC95_10, TU Chemnitz–Zwickau, 1995.

[Kun97] G. Kunert. Error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. Preprint SFB393/97-16, TU Chemnitz, 1997 (wird eingereicht).

weitere zitierte Literatur

[AD92] Th. Apel und M. Dobrowolski. Anisotropic interpolation with applications to the finite element method. *Computing*, 47:277–293, 1992.

[Bec95] R. Becker. *An adaptive finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations on time-dependent domains.* Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1995.

[BZ] J. H. Bramble und X. Zhang. Uniform convergence of the multigrid V-cycle for an anisotropic problem. Preprint, Texas A&M University.

[DR97] M. Dobrowolski und H.-G. Roos. A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes, 1997. Extended version of Preprint MATH-NM-21-1996. Submitted.

[GO95] M. Griebel und P. Oswald. Tensor product type subspace splittings and multi-level iterative methods for anisotropic problems. *Adv. Comput. Math.*, 4:171–206, 1995.

[Hac85] W. Hackbusch. *Multi-grid methods and applications.* Springer, Heidelberg, 1985.

[Hac89] W. Hackbusch. The frequency decomposition multi-grid method. Part I: Application to anisotropic equations. *Numer. Math.*, 56:229–245, 1989.

[KW98] B. N. Khoromskij und G. Wittum. Robust interface reduction for highly anisotropic elliptic equations. In W. Hackbusch und G. Wittum, Hrsg., *Proceedings of the Fifth European Multi-Grid Conference.* to appear, 1998.

[Rac95] W. Rachowicz. An overlappinf domain decomposition preconditioner for an anisotropic h-adaptive finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 127:269–292, 1995.

[Roo97] H.-G. Roos. Layer-adapted grids for singular perturbation problems. Preprint MATH-NM-03-1997, TU Dresden, 1997.

[Sch98] J. Schoeberl. Robust multigrid preconditioning for parameter-dependent problems I: the Stokes-type case. In W. Hackbusch und G. Wittum, Hrsg., *Multigrid Methods V. Proceedings of the fifth European Multigrid Conference, Stuttgart, 1996.* to appear, 1998.

[Sie96] K. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numer. Math.*, 73:373–398, 1996.

[SO97] M. Stynes und E. O'Riordan. A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection-diffusion problem. *J. Math. Anal. and Appl.*, 214:36–54, 1997.

[SSX96] C. Schwab, M. Suri und C. Xenophontos. The *hp* finite element method for problems in mechanics with boundary layers. Research report 96-20, ETH Zürich, Seminar für Angewandte Mathematik, 1996.

2.5 Offene Fragen/Ausblick

Die Arbeiten zu Auflösungsmethoden stehen für Finite-Elemente-Diskretisierungen auf anisotropen Netzen erst am Anfang. Ideen für eine Weiterführung wurden bereits in 2.4.2 geäußert. Wir beantragen diese im Rahmen des Teilprojekts A3.

Für einen qualitativ guten Fehlerschätzer ist es notwendig, daß das anisotrope Netz zur anisotropen Lösung paßt. Weitere Untersuchungen sind nötig, um das zu garantieren. Weiterhin ist interessant, wie aus Finite-Elemente-Näherungen weitere Informationen erhalten werden können, die der Steuerung der anisotropen Netze (Anisotropieachsen und Maß der Ansiotropie) dienen können.