

Teilprojekt

**A13**

Randkonzentrierte Finite-Elemente-Methoden



## 2.1 Teilprojekt A13

Randkonzentrierte Finite-Elemente-Methoden

### 2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. W. Hackbusch	PD Dr. J.M. Melenk	Prof. Dr. R. Schneider
24.10.1948	19.8.1967	20.03.1957
Direktor am MPI für Mathematik i. d. Naturwissenschaften	Department of Mathematics The University of Reading	Professur Scientific Computing Universität Kiel
Inselstr. 22–26	PO Box 220	Christian-Albrechts-Platz 4
04103 Leipzig	Reading, RG6 6AX, UK	D-24118 Kiel
Tel.: (0341) 9959-750	Tel.: +44 (118) 378 6028	Tel.: (0431) 880-7470
Fax: (0341) 9959-999	Fax: +44 (118) 931 3423	Fax: (0431) 880-4464
wh@mis.mpg.de	j.m.melenk@reading.ac.uk	rs@numerik.uni-kiel.de

### 2.1.2 Projektbearbeiter

Dipl.-Math. techn. Tino Eibner (seit September 2002)

## 2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Eine Vielzahl von Problemen in den Naturwissenschaften und der Technik werden als elliptische Randwertaufgaben formuliert. Ihre effiziente numerische Lösung ist deshalb ein wichtiges Forschungsgebiet. Die wichtigsten Vertreter von Lösungsmethoden sind die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Randelementmethode (BEM) [Hac95, Ste03]. Während bei erster eine Diskretisierung des gesamten betrachteten Gebietes  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  benötigt wird, genügt bei zweiter eine Diskretisierung des Randes  $\partial\Omega$ . Da daher bei der BEM nur Mannigfaltigkeiten der Dimension  $d - 1$  diskretisiert werden müssen, kann die BEM effizienter als die klassische FEM sein. Ein weiterer Vorzug der BEM ist die Möglichkeit, Außenraumprobleme zu behandeln. Ein klassischer Nachteil der BEM besteht darin, dass die Steifigkeitsmatrix a priori voll besetzt ist, so dass Kompressions-techniken (*Wavelets* [Sch98a], *Panel Clustering* [HN89], *multipole expansions* [GR97] und neuerdings  $\mathcal{H}$ - und  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen [Hac99, GH03, HKS00]) zum Einsatz gebracht werden müssen. Weiterhin baut die BEM auf einer Umformulierung eines Randwertproblems auf eine auf dem Rand  $\partial\Omega$  gestellten Integralgleichung auf. Für diese Umformulierung wird die Fundamentallösung/Singulärfunktion der Differentialgleichung explizit benötigt; da in der Praxis diese nur für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekannt ist, ist die BEM nicht bei bei Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten einsetzbar. Die randkonzentrierte FEM, [KM03] verbindet die Flexibilität der klassischen FEM mit den guten Eigenschaften bzgl. Komplexität der BEM. Ziel des Teilprojekts A13 ist, diese neue Methode genauer zu untersuchen. Insbesondere soll zum einen ein besseres Verständnis der Approximationseigenschaften der Methode erarbeitet werden und zum anderen sollen Fragen ihrer effizienten Implementierung beantwortet werden.

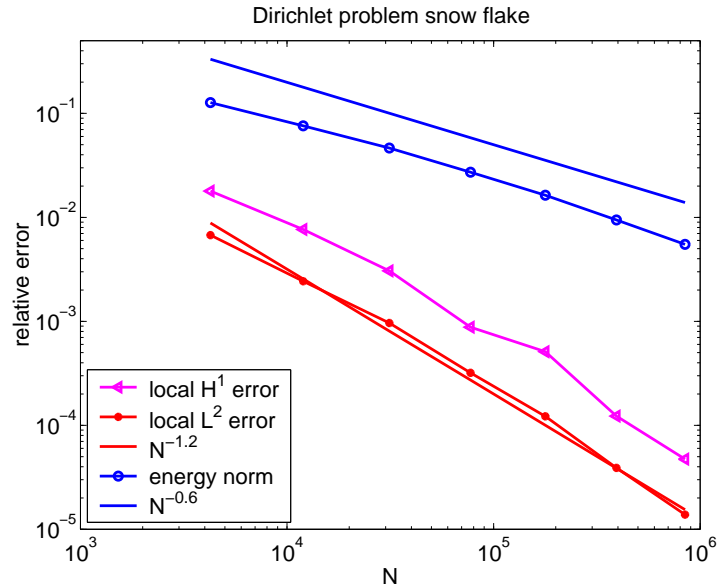
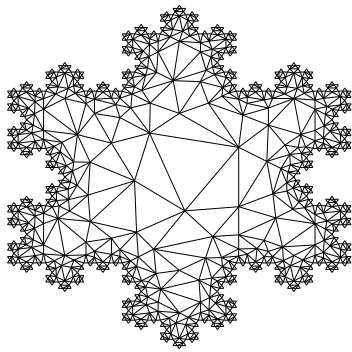


Abbildung 2.1: Beispiel eines randkonzentrierten Gitters und des Fehlerverhaltens.

## 2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

Konvergenz der FEM kann prinzipiell auf mehrere Arten erzielt werden: Man kann die Approximationsordnung festhalten und Konvergenz durch Gitterverfeinerung erreichen ( $h$ -FEM); andererseits kann man die Approximationsordnung erhöhen und das Gitter festhalten ( $p$ -FEM). Wird sowohl das Gitter (zumindest lokal) verfeinert als auch die Approximationsordnung erhöht, so spricht man von der  $hp$ -FEM, [Sch98b, KS99]. Bei der randkonzentrierten FEM liegt eine Variante der  $hp$ -FEM vor: Es wird in Randnähe das Gitter verfeinert und die Approximationsordnung niedrig gehalten; im Inneren des Rechengebietes wird das Gitter festgehalten und Konvergenz durch Erhöhen der Approximationsordnung erzielt. Im Fall von Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten konnte in [KM03] gezeigt werden, dass die geeignete Gitterwahl und Verteilung der Approximationsordnung folgende, einfache Bedingungen erfüllen müssen:

$$h_K \sim h + \text{dist}(K, \partial\Omega), \quad (2.1)$$

$$p_K \approx \alpha \log(h_K/h). \quad (2.2)$$

Hier steht  $K$  für ein Element des Gitters,  $h_K$  für seinen Durchmesser und  $p_K$  für die Approximationsordnung, die auf Element  $K$  verwendet wird. Für ein typisches Gitter verweisen wir auf Abb. 2.1; man beachte, dass die Bedingung (2.1) dazu führt, dass ein quasi-uniformes Gitter mit Maschenweite  $h$  in Randnähe vorliegt. Der Parameter  $\alpha > 0$ , der in (2.2) auftritt, muss problemabhängig geeignet gewählt werden. Bezeichnet man mit  $V_N$  den  $hp$ -FEM Raum, der auf solchen Gittern und Polynomgradverteilungen basiert, so konnte in der Arbeit [KM03] für elliptische Probleme (mit analytischen Koeffizienten) in 2D gezeigt werden, dass gilt:

$$N = \dim V_N \sim h^{-1} \sim \text{Gitterpunkte auf } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{-\delta}, \quad (2.4)$$

wobei die Lösung  $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta > 0$ , angenommen wird. Drückt man die Konvergenz als ‘Fehler gegen Problemgröße’ aus, so sieht man ein Konvergenzverhalten, wie man

es von einer BEM kennt. Als FEM hat die randkonzentrierte FEM z.B. die Eigenschaft geerbt, dünn besetzt zu sein: da der maximale Polynomgrad  $p_{max} = O(|\ln h|) = O(\ln N)$  ist (vgl. 2.2), ergibt sich in 2D, dass jede Zeile der Steifigkeitsmatrix höchstens  $O(\ln^2 N)$  Einträge hat.

### 2.3.1 Implementierung, schnelle Löser, *hp*-Adaptivität

Wie im Antrag [Ant01] für die Periode 2002–2004 beschrieben, sollte in einem ersten Schritt die Methode vorerst in 2D implementiert werden. Dabei sollte nicht nur der Frage nachgegangen werden, wie die Gitter zu erzeugen seien, sondern es sollte auch untersucht werden, wie effiziente Quadraturen auf Dreiecken (mit der Möglichkeit der Erweiterung auf Tetraeder) zu bewerkstelligen sind. Dies ist von Interesse, da bei der *hp*-FEM typischerweise die Quadraturen beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix einen erheblichen Anteil an den Gesamtkosten haben. Für Referenzelemente, die Tensorproduktstruktur haben (z.B. das Quadrat in 2D und den Würfel in 3D), wurde bereits in [MGS01] ein Algorithmus vorgestellt, mit dem in optimaler Komplexität die Steifigkeitsmatrix (hinreichend genau) bestimmt werden kann. Ein analoger Algorithmus für Dreiecke und Tetraeder sollte im Rahmen dieses Projekts entwickelt und untersucht werden.

Die “Formel” (2.2) mit dem geeignet zu wählenden Parameter  $\alpha$  stellt das optimale Konvergenzverhalten  $O(N^{-\delta})$  in (2.4) sicher. Eine adaptive Strategie zur Wahl der Gitter und der Polynomgradverteilung ist dennoch von Interesse: Zum einen ist die genaue Wahl des Parameters  $\alpha$  a priori nicht bekannt, zum anderen ist die optimale Wahl des Gitters und der Polynomgradverteilung problemabhängig. Die Frage nach *hp*-Adaptivität sollte deshalb in Betracht gezogen werden.

Weiter sollte in dem Zeitraum 2002–2004 die Frage effizienter Löser angegangen werden. Hier können sowohl direkte wie auch iterative Verfahren zum Zuge kommen. Es konnte bereits in [Yse99, KM03] gezeigt werden, dass bei Dirichletproblemen die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix nur polylogarithmisch von der Problemgröße abhängt. Das Gleichungssystem ist somit gut konditioniert und einfache Iterationsverfahren wie das CG-Verfahren reichen aus. Bei anderen Randbedingungen wird jedoch Vorkonditionierung bzw. ein Multilevelansatz benötigt.

### 2.3.2 Lokale Fehleranalyse

Im Rahmen des Projektziels, die Eigenschaften der randkonzentrierten FEM besser zu verstehen, steht eine Analyse ihres lokalen Verhaltens. Als Motivation für solche Fragestellungen möge noch einmal der oben gemachte Vergleich mit der Galerkin-BEM dienen. Bei der Galerkin-BEM ist bekannt, dass Einsetzen der BEM-Lösung in die Greensche Darstellungsformel zu punktwisen Approximationen im Gebiet führt, die im Wesentlichen doppelt so schnell konvergieren wie die BEM in der Energienorm (siehe z.B. Abb. 2.1, 2.5). Eine solche Verdopplung der Konvergenzgeschwindigkeit in inneren Punkten beobachtet man auch bei der randkonzentrierten FEM, und sowohl die numerische als auch theoretische Untersuchung dieses Phänomens war Teil der Forschung im Antragszeitraum.

## Literaturverzeichnis zu 2.3 (eigene Vorarbeiten und Fremdliteratur)

- [Ant01] SFB 393 - Numerische Simulation auf massiv parallelen Rechnern. Finanzierungsantrag 2002–2003–2004, TU Chemnitz, 2001.
- [GH03] L. Grasedyck and W. Hackbusch. Construction and arithmetics of  $\mathcal{H}$ -matrices. *Computing*, 70:295–334, 2003.
- [GR97] L. Greengard and V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the Laplace in three dimensions. In *Acta Numerica 1997*, pages 229–269. Cambridge University Press, 1997.
- [Hac95] W. Hackbusch. *Integral Equations. Theory and Numerical Treatment*. Birkhäuser, 1995.
- [Hac99] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on  $\mathcal{H}$ -matrices. Part I: Introduction to  $\mathcal{H}$ -matrices. *Computing*, 62:89–108, 1999.
- [HKS00] W. Hackbusch, B. Khoromskij, and S.A. Sauter. On  $\mathcal{H}^2$ -matrices. In H. Bungartz, R. Hoppe, and C. Zenger, editors, *Proceedings of the symposium organized by the SFB 438 on the occasion of Karl-Heinz Hoffmann's 60th birthday*, pages 9–29. Springer-Verlag, 2000.
- [HN89] W. Hackbusch and Z.P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54:463–491, 1989.
- [KM03] B.N. Khoromskij and J.M. Melenk. Boundary concentrated finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1):1–36, 2003.
- [KS99] G.E. Karniadakis and S.J. Sherwin. *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, 1999.
- [MGS01] J.M. Melenk, K. Gerdes, and C. Schwab. Fully discrete *hp*-FEM: fast quadrature. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 190:4339–4364, 2001.
- [Sch98a] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*. Advances in Numerical Mathematics. Teubner, 1998.
- [Sch98b] C. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods*. Oxford University Press, 1998.
- [Ste03] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme: Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, 2003.
- [Yse99] H. Yserentant. Coarse grids spaces for domains with a complicated boundary. *Numerical Algorithms*, 21:387–392, 1999.

## 2.4 Ergebnisse

### 2.4.1 Implementierung, schnelle Löser, *hp*-Adaptivität

#### Implementierung

Die Implementierung der randkonzentrierten FEM in 2D wurde in dem Paket BC-FEM2D realisiert.

In einem ersten Schritt wurde die Erzeugung geeigneter Gitter in Angriff genommen. Im Prinzip gibt es mehrere Zugangsmöglichkeiten, z.B. Verfahren, die auf *Quadrees* basieren und Verfahren vom *advancing front* Typ. Implementiert und untersucht wurden zwei verschiedene Techniken: zum einen wurden mit einem *advancing front* Algorithmus Gitter ausgehend von einer Triangulierung des Randes erzeugt, wobei die gewünschte Größe der zu generierenden Elemente in der *front* mit Hilfe von (2.1) gesteuert wird; zum anderen wurden Gitter durch Verfeinerung eines Grobgitters erzeugt. Letztere, schnellere Technik, führt zudem in natürlicher Weise auf Hierarchien von Gittern, die (2.1) erfüllen.

In einem zweiten Schritt wurde dann die *hp*-FEM variabler Ordnung realisiert; variable Ordnung bedeutet hier, dass jedem Element  $K$  sein individueller Polynomgrad zugewiesen werden kann und die Erzeugung von  $H^1$ -konformen Formfunktionen im Rahmen der Assemblierung sichergestellt wird. Verschiedene Wahlen von Polynombasen wurden zugelassen, insbesondere solche, die auf integrierten Legendrepolyomen und solche, die auf Lagrangeschen Interpolationspolynomen (z.B. in Gauß-Lobatto-Punkten) basieren.

Einer der Gründe, warum Basisfunktionen, die auf Lagrangeschen Interpolationspolynomen beruhen, berücksichtigt wurden, war die dadurch gegebene Möglichkeit, die numerische Quadratur wesentlich zu beschleunigen. In [MGS01] wurde diese Option für Referenzelemente mit Tensorproduktstruktur untersucht. Dort wurde gezeigt, dass man, falls die Formfunktionen als Lagrangeinterpolationspolynome in den Quadraturpunkten gewählt werden, optimale Komplexität für das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix erhält. Es wurde für skalare elliptische Probleme zweiter Ordnung gezeigt, dass exponentielle Konvergenz, die bei exakter Auswertung aller Integrale erzielt werden kann, auch hier gewährleistet ist. Im Rahmen des TP A13 wurden diese Ideen auf Dreiecke übertragen. Die Grundidee ist dabei folgende: Die Quadratur auf einem Dreieck wird mit Hilfe der sog. Duffy-Transformation auf eine gewichtete Quadratur auf einem Viereck überführt; für diese Quadratur auf dem Viereck werden dann Tensorproduktquadraturformeln vom Typ Gauß-Lobatto/Gauß-Jacobi-Lobatto (aufgrund des Gewichtes) eingesetzt. Die Verwendung von Lagrangeinterpolationspolynomen in den zugehörigen Quadraturpunkten liefert dann wieder eine Methode optimaler Komplexität. Für einen effizienten Einsatz in einem *hp*-FEM-Code mit variablem Polynomgrad sind noch weitere Techniken wie z.B. die *sum factorization* von Karniadakis/Sherwin [KS99] vonnöten. Abb. 2.2 zeigt erste Ergebnisse dieser Implementierung. Verglichen wird die "Standardquadratur", welche in 2D Komplexität  $O(p^6)$  hat, mit der Beschleunigungstechnik der *sum factorization*, die Komplexität  $O(p^5)$  hat, sowie mit der neuen Routine, die die optimale Komplexität  $O(p^4)$  erreicht. An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass der neue Algorithmus einen Ansatzraum verwendet, der mehr "innere Formfunktionen" benutzt (im Wesentlichen werden so viele Formfunktionen verwendet wie auf einem Viereck). Da diese inneren Freiheitsgrade typischerweise mit Hilfe von statischer Kondensation bereits auf Elementebene entfernt werden, wurde die Rechenzeit für die statische Kondensation in Abb. 2.2 zu Vergleichszwecken ebenfalls aufgeführt. Die Erweiterung des vorgeschlagenen Algorithmus auf Tetraeder ist prinzipiell möglich. Diese Erweiterung sowie genauere Untersuchungen werden Bestandteil der Dissertation von Tino Eibner [Eibit] sein. Weiterhin wurden inzwischen die Datenstrukturen des Codes so angelegt, dass Experimente zu *hp*-Adaptivität im Verlauf des Jahres 2004 durchgeführt werden können.

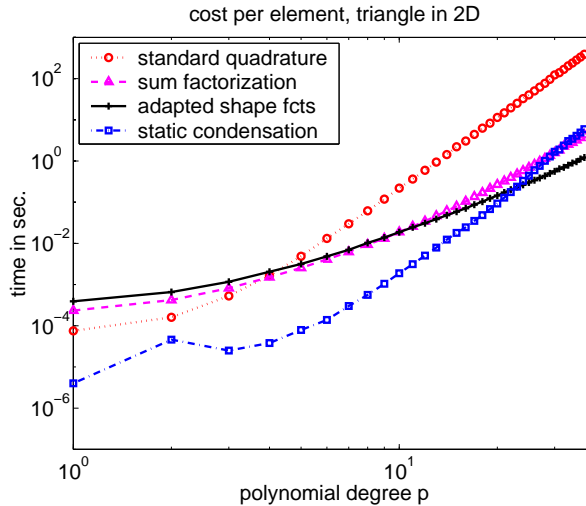


Abbildung 2.2: Verschiedene Quadraturverfahren im Vergleich.

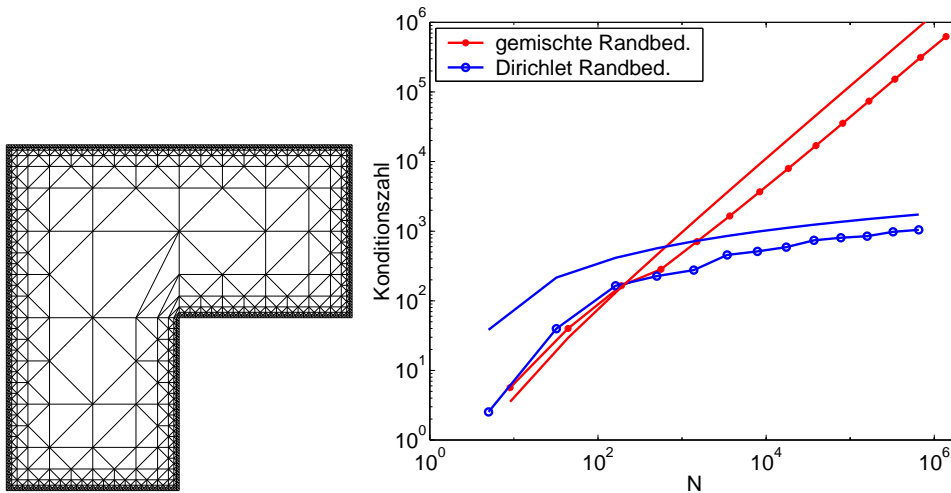


Abbildung 2.3: Links: Gebiet. Rechts: Konditionszahlen in Abhängigkeit von Randbedingungen.

**Löser**

Wie bereits in [Yse99, KM03] bemerkt, wächst bei Dirichletproblemen die Konditionszahl  $\kappa$  nur polylogarithmisch, d.h.  $\kappa = O(\log^\beta N)$ , wobei  $\beta \geq 0$  von der genauen Wahl der Polynombasis abhängt. Für andere Randbedingungen muss mit einem  $O(N \log^\beta N)$  gerechnet werden. Das verschiedene Verhalten wird in Abb. 2.3 illustriert.

Im Rahmen des Projektes wurde in [KM02] für zweidimensionale Probleme ein direkter Löser vorgestellt. Das wesentliche Element des vorgeschlagenen Profilflösers ist ein Algorithmus zur Nummerierung der Unbekannten mit der Eigenschaft, dass der Speicherbedarf  $O(N \log^4 N)$  und die Rechenzeit für die Cholesky- bzw. die LU-Faktorisierung  $O(N \log^8 N)$  beträgt. Für den speziellen Fall  $p = 1$  vereinfachen sich die Aufwandsabschätzungen zu  $O(N \log^2 N)$  und  $O(n \log^4 N)$ ; diese wurden numerisch in [KM02] getestet; ein Beispiel findet sich in Abb. 2.4.

Es ist geplant, die Möglichkeiten eines effizienten Multilevel-Lösers zu untersuchen. We-

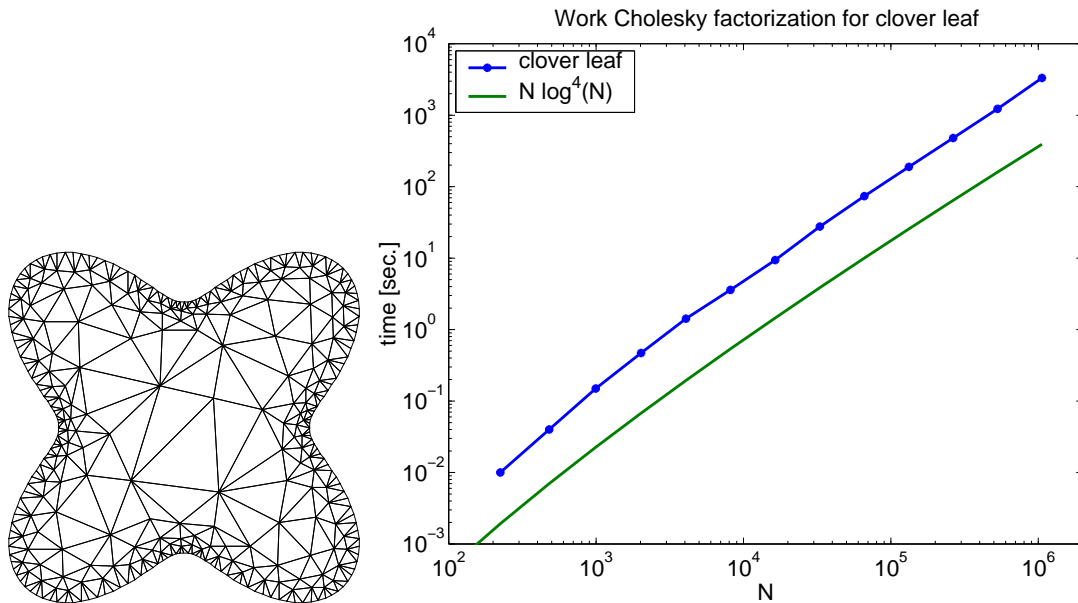


Abbildung 2.4: CPU-Zeit in Sekunden gegen Problemgröße für Faktorisieren nach geeigneter Nummerierung der Unbekannten.

sentliche Vorarbeiten sind hierfür bereits getätigt: Wie oben beschrieben kann eine geschichtete Gitterhierarchie von randkonzentrierten Gittern erzeugt werden, welche die Möglichkeit bietet, effiziente Löser für den Fall stückweise linearer Approximationen zu konstruieren. Hier bestehen enge fachliche Anknüpfungspunkte an TP A12. Ein einfacher möglicher Glätter im Kontext von  $hp$ -FEM könnte im Lösen von lokalen Problemen auf überlappenden *Patches* (d.h. der Vereinigung von Elementen, die sich einen gemeinsamen Knoten teilen) sein. Zumindest im zweidimensionalen Fall (mit Elementen variabler Ordnung) konnte in [EM04] das wesentliche Werkzeug für die Analyse dieser Glätters, die Existenz von stabilen Zerlegungen, bereitgestellt werden.

Weiterhin wurden erste Erfahrungen mit der Verwendung von  $\mathcal{H}$ -Matrizen zum Lösen der bei der randkonzentrierten FEM entstehenden Gleichungssysteme gemacht. Numerische Experimente zeigen, dass die berechnete  $\mathcal{H}$ -Matrix-Inverse sehr schnell mit dem Blockrang  $k$  gegen die exakte Inverse konvergiert. Die Erweiterung des Resultats von Bebendorf/Hackbusch [BH03], welches dieses Verhalten für den Fall der klassischen FEM (stückweise lineare Ansatzfunktionen, quasiuniforme Gitter) erklärt, auf den vorliegenden Fall hoher Approximationsordnung und nicht quasiuniformer Gitter ist beabsichtigt.

## 2.4.2 Lokale Fehleranalyse

Bei der Galerkin-BEM ist bekannt, dass durch Auswertung von linearen Funktionalen wie Punktauswertungen oder Auswertungen von Ableitungen im Inneren des Gebietes eine Verdopplung der Konvergenzgeschwindigkeit erhofft werden kann. Erste numerische Ergebnisse zeigen ein ähnliches Verhalten der randkonzentrierten FEM (vgl. Abb. 2.1 und Abb. 2.5). In den theoretischen Untersuchungen in [EM04] konnte dann für Dirichletprobleme auf kompakten Teilmengen  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$  tatsächlich eine verbesserte Konvergenzordnung gezeigt werden. Genauer: Es existiert ein  $\beta > 0$  und ein  $C_{\tilde{\Omega},k}^- > 0$ , so dass

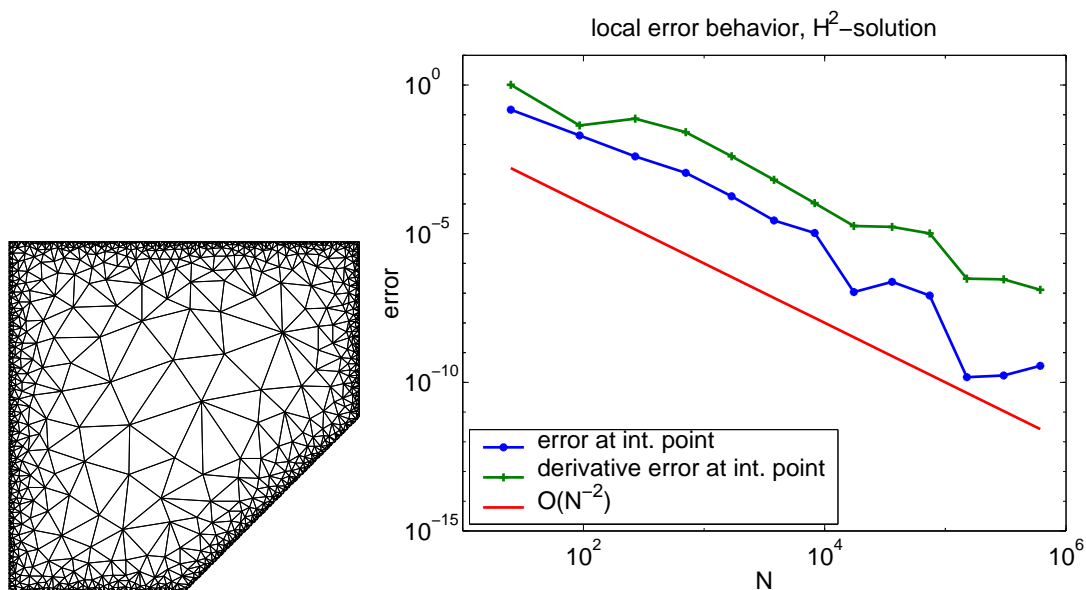


Abbildung 2.5: lokales Konvergenzverhalten einer Lösung mit  $H^2$ -Reglarität.

im Falle von Energienormkonvergenz  $\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{-\delta}$  gilt:

$$\max_{K \subset \tilde{\Omega}} \|u - u_N\|_{W^{k,\infty}(K)} \leq C_{k,\tilde{\Omega}} (\log N)^{2k+2} N^{-\delta-\beta}. \quad (2.5)$$

Numerisch beobachtet man in den Abbildungen 2.1, 2.5 sogar  $\beta = \delta$ . Zum Beweis dieses Resultates sei angemerkt, dass die klassischen dualitätsbasierten Argumente, die auf  $H^2$ -Regularität und (lokalen) Approximationseigenschaften des Ansatzraumes basieren, nicht ausreichen, denn im vorliegenden Fall liegt zwar  $H^2$ -Regularität im Inneren des Gebietes vor, jedoch haben nach (2.1), (2.2) die Elemente  $K \subset \tilde{\Omega}$  die Größe  $h_K = O(1)$  und einen Polynomgrad  $p_K = O(\log N)$ . Damit ist ein Faktor  $N^{-\beta}$  nicht zu erreichen. Um dieses Problem zu umgehen, wurde in [EM04] mit geeigneten Gewichtsfunktionen gearbeitet, was jedoch den Einsatz von Hardyungleichungen erforderlich machte. Die Verwendung letzterer ist der Grund für die Restriktion auf Dirichletprobleme.

## Literaturverzeichnis

- [Ant01] Sfb 393 - numerische simulation auf massiv parallelen rechnern. Finanzierungsantrag 2002–2003–2004, TU Chemnitz, 2001.
- [Ber01] Sfb 393 - numerische simulation auf massiv parallelen rechnern. Arbeits- und ergebnisbericht 1999–2000–2001, TU Chemnitz, 2001.
- [BH03] M. Bebendorf and W. Hackbusch. Existence of  $\mathcal{H}$ -matrix approximants to the inverse FE-matrix of elliptic operators with  $L^\infty$ -coefficients. *Numer. Math.*, 95(1):1–28, 2003.
- [Eibit] T. Eibner. *Algorithmik der randkonzentrierten FEM*. PhD thesis, TU Chemnitz, (in Arbeit).
- [EM04] T. Eibner and J.M. Melenk. Local error analysis of the boundary concentrated fem. Technical Report 04-05, SFB 393, 2004.

- [KM02] B.N. Khoromskij and J.M. Melenk. An efficient direct solver for the boundary concentrated FEM in 2D. *Computing*, 69:91–117, 2002.
- [KM03] B.N. Khoromskij and J.M. Melenk. Boundary concentrated finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1):1–36, 2003.
- [KS99] G.E. Karniadakis and S.J. Sherwin. *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, 1999.
- [MGS01] J.M. Melenk, K. Gerdes, and C. Schwab. Fully discrete *hp*-FEM: fast quadrature. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 190:4339–4364, 2001.
- [Yse99] H. Yserentant. Coarse grids spaces for domains with a complicated boundary. *Numerical Algorithms*, 21:387–392, 1999.

## 2.5 Offene Fragen / Ausblick

Verschiedene Aspekte der randkonzentrierten FEM, wie z.B. ihre effiziente Implementierung und das Lösen der entstandenen Gleichungssysteme, wurden in Angriff genommen. Erkenntnisse, die insbesondere der Projektbearbeiter Tino Eibner beim Entwickeln und Untersuchen der Methode gewonnen hat, können sehr gut in andere Teilprojekte einfließen. Z.B. können Varianten der randkonzentrierten FEM für die in TP A12 betrachteten Kontaktprobleme eingesetzt werden. Bei Kontaktproblemen (linear) elastischer Körper ist eine relativ hohe Auflösung der Lösung in Randnähe hilfreich, um die genaue Kontaktfläche zu finden; im Inneren der elastischen Körper ist die Lösung typischerweise glatt, so dass hohe Approximationsordnungen sehr effizient sind. Man kann also erwarten, dass die randkonzentrierte FEM hier gut funktioniert. Wenn die genaue Kontaktfläche im Laufe der Iteration gefunden wird, reicht natürlich eine lokale Verfeinerung. Hier gliedern sich die Fragestellungen der *hp*-Adaptivität gut ein. In Hinblick auf eine verstärkte Anwendung der randkonzentrierten FEM in Bereichen wie Kontaktproblemen wäre ein Ausbau der vorhandenen Implementierung auf 3D sehr wünschenswert. Dies betrifft sowohl die Erzeugung der Gitter als auch das effiziente Aufstellen der Steifigkeitsmatrizen.

Wie in Abschnitt 2.4.1.2 erwähnt, ist die Erfahrung mit Multilevellösern aus TP A3 wichtig für die Entwicklung von schnellen Lösern für die randkonzentrierte FEM.

Weitere Problemstellungen, in die die gewonnenen Erkenntnisse der randkonzentrierten FEM einfließen können, sind Kontrollprobleme mit Randkontrolle; hier gibt es natürliche Anknüpfungspunkte an TP A15.

