

Teilprojekt

A11

Gemischte Formulierungen: adaptive anisotrope finite
Elemente und parallele Löser

2.1 Teilprojekt A11

Gemischte Formulierungen: adaptive anisotrope finite Elemente und parallele Löser

2.1.1 Antragsteller

Prof. Dr. Arnd Meyer, TU Chemnitz, Professur Numerische Analysis

PD Dr. Thomas Apel, TU Chemnitz, an Professur Numerische Analysis

Thomas Apel ist Ende 2003 ausgeschieden, da er eine Professur an der Universität der Bundeswehr München angenommen hat.

2.1.2 Projektbearbeiter

PD Dr. Gerd Kunert, Professur Wissenschaftliches Rechnen (bis September 2003)

M.Sc. Sviatoslav Derezin, Professur Numerische Analysis

M.Sc. Alexander Smuglyakov (ab April 2002), Professur Numerische Analysis

Dipl.-Math. Peter Steinhorst (ab Okt. 2003), Professur Numerische Analysis

2.2 Ausgangsfragestellung / Einleitung

Gegenstand dieses Teilprojekts sind gemischte Finite-Elemente-Diskretisierungen für das Stokes- und das Reissner-Mindlin-Problem. Wir hatten uns zum Ziel gestellt, effiziente Simulationssoftware zu entwickeln, die auf theoretisch fundierten effizienten, d. h. adaptiven und lösungsangepassten, parallelen Lösungsstrategien beruht.

Bei der Simulation der Strömung viskoser Fluide entstehen Lösungen mit anisotropem Verhalten durch Kantensingularitäten oder Randschichten. Lösungsangepasste Diskretisierungen sind folglich auch *anisotrop*. Unser Ziel bestand darin, Elementepaare auf deren Eignung bei Diskretisierungen auf anisotropen Netzen zu untersuchen und *a posteriori* Fehlerschätzer für das Stokes-Problem mit anisotropen Netzen herzuleiten.

Die numerische Berechnung der Verformung von Platten und Schalen wurde im SFB 393 bisher mit den symmetrischen, positiv definiten Formulierungen nach Kirchhoff und Koiter untersucht. Wesentlich akzeptierter im Ingenieurbereich ist jedoch das Reissner-Mindlin-Plattenmodell in gemischter Formulierung, wobei insbesondere MITC-Elemente und deren stabilisierte Versionen verwendet werden. Im Rahmen des Projekts sollten für isotrope Vernetzungen parallele Auflösungsverfahren mit dem Bramble-Pasciak-Ansatz und *a posteriori* Fehlerschätzer entwickelt werden.

Auf die beiden Teilaufgaben wird im Folgenden durch die Kurztitel *Stokes* und *Plattenprobleme* Bezug genommen.

2.3 Forschungsaufgaben / Methoden

2.3.1 Stokes

Für effiziente, lösungsangepasste Algorithmen müssen Elemente mit beliebig großem Streckungsverhältnis, anisotrope Elemente, zugelassen werden. Das führt zu einer Reihe bisher noch unbefriedigend geklärter Fragestellungen. Der Kenntnisstand zum Zeitpunkt

der Antragstellung sowie die daraus für das Projekt abgeleiteten Fragestellungen werden in den folgenden Abschnitten besprochen.

Stabilität

Für die Stabilität gemischter Methoden müssen die approximierenden Räume eine diskrete Inf-Sup-Bedingung erfüllen, wobei die Konstante im Fall anisotroper Netze unabhängig vom Streckungsverhältnis der Elemente von der Null weg beschränkt sein muss. Zum Zeitpunkt der Antragstellung gab es dazu für den zweidimensionalen Fall eine Reihe geeigneter Elemente niedriger Ordnung, siehe Becker und Rannacher [BR95, Bec95], und hoher Ordnung, siehe z. B. Ainsworth/Coggins [AC00] und Schötzau/Schwab/Stenberg [SS98, SSS99]. Im Dreidimensionalen war als Element niedriger Ordnung nur das nicht-konforme Crouzeix-Raviart-Element als positives Beispiel bekannt, siehe Acosta/Durán [AD99] und Apel/Nicaise/Schöberl [ANS01]. Erste 3D-Ergebnisse zu *hp*-Methoden wurden in [TS03] angegeben.

Die Fragestellung im Teilprojekt bestand darin zu klären, welche Elementepaare für das angestrebte Ziel geeignet sind, d. h. eine stabile Diskretisierung auch bei der Verwendung anisotroper Netze liefern.

A posteriori Fehlerschätzer für die Stokes-Gleichungen

Eine wesentliche Aufgabe in diesem Teilprojekt ist die Herleitung von *a posteriori Fehlerschätzern* für die Stokes-Gleichungen, die auch auf *anisotropen Diskretisierungen* zuverlässig und effizient sind. Insbesondere für solche Finite-Elemente-Paare, für die Stabilität bewiesen wurde, sollen Fehlerschätzer hergeleitet werden. Die Voraussetzungen an die Diskretisierung sollen analysiert und so wenig restriktiv wie möglich formuliert werden.

Besondere Betonung soll auf eine umfassende und allgemeine Analysis gelegt werden, die sowohl den zwei- als auch den dreidimensionalen Fall sowie konforme und nichtkonforme Diskretisierungen umfassen soll. Die Elementtypen sollen möglichst Dreiecke und Vierecke (in 2D) sowie Tetraeder, Pentaeder (Prismen) und Hexaeder (in 3D) beinhalten. Von der methodischen Seite soll mit Fehlerschätzern vom Residuentyp begonnen werden, da diese relativ einfach und gut erforscht sind. Insbesondere existieren isotrope Fehlerschätzer für die Stokes-Gleichungen. Techniken zur Herleitung anisotroper Fehlerschätzer sind für andere Differentialgleichungen u.a. von Kunert entwickelt worden. Je nach den Ergebnissen wird sich die weitere Ausrichtung der Forschung gestalten.

Löser

Zur Auflösung von symmetrischen, indefiniten Gleichungssystemen, wie sie bei der Diskretisierung des Stokes-Systems entstehen, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Beim Uzawa-Algorithmus werden die Geschwindigkeitsfreiheitsgrade aus dem System eliminiert und ein positiv (semi-)definites Gleichungssystem für den Druck gelöst. Einen anderen Weg haben Bramble und Pasciak [BP88] beschrieben, indem sie zeigten, dass man ein positiv definites System in einem angepassten Skalarprodukt erhalten kann. Dieser *Bramble-Pasciak-CG* ist effizient, wenn man einen optimalen Vorkonditionierer für die Diskretisierung des Laplace-Operators zur Verfügung hat. Für einige konforme

anisotrope Diskretisierungen mit Elementen niedriger Ordnung sind solche Vorkonditionierer bekannt. Je nachdem, welche stabilen Elementepaare für das Stokesproblem eingesetzt werden sollen, können diese Vorkonditionierer verwendet werden oder es müssen modifizierte Vorkonditionierer entwickelt werden.

Implementierung

Die angestrebten Untersuchungen zu stabilen Elementen für das Stokes-Problem als Prototyp gemischter FEM erfordern ein Experimentalprogramm, das die wesentlichen Eigenschaften der Fehlerschätzer, der Netzsteuerung und der schnellen Lösung der (hier indefiniten) Gleichungssysteme leicht illustrieren kann.

2.3.2 Plattenprobleme

Bei der numerischen Berechnung von Schalen- und Plattendeformationen steht am Anfang eine Hypothese über den Verlauf der Verschiebungen (und evtl. Spannungen/Verzerrungen) über die Dicke. Die so genannten *hierarchischen Modelle* wählen polynomiale Ansätze. Das einfachste Modell hieraus setzt einen linearen Verschiebungsverlauf über die Dicke an und ergibt die Reissner-Mindlin-Formulierung, bei zusätzlicher Kirchhoff-Hypothese entsteht die Kirchhoff-Platte (4. Ordnung) bzw. das Koitersche Schalenmodell. Für alle diese Modelle liegt der numerische Vorteil darin, dass (nach Dicken-Integration) eine mehr oder weniger komplizierte Differentialgleichung im Zweidimensionalen übrig bleibt. Ebenfalls gibt es für alle diese Modelle die üblichen Untersuchungen zur Konvergenz von Finite-Elemente-Näherungen und viele davon werden im Ingenieurbereich extensiv genutzt [Ber96].

Allerdings sind die numerischen Eigenschaften der resultierenden linearen Gleichungssysteme erheblich ungünstiger als bei vergleichbaren Differentialoperatoren 2. Ordnung, so dass für ihre schnelle Lösung nach wie vor kaum etwas bekannt ist. Erste Ergebnisse, die bekannte Multilevel-Techniken auf den Fall der Kirchhoff-Gleichung bzw. des Koiter-Modell übertragen, wurden in den vergangenen Jahren auch im SFB 393 erzielt [Mat97, The98]. Allerdings bezogen sich diese Ergebnisse auf eher selten benutzte Bogner-Fox-Schmidt- und Adini-Rechteck-Elemente (immerhin 12 bzw. 9 Freiheitsgrade pro Knoten bei Schalen, kubische Polynome). Ein weiterer Nachteil im behandelten Modell liegt in der Unmöglichkeit, Randschichten zu repräsentieren.

Hier bringt die Hinwendung zum Reissner-Mindlin-Modell die Vorteile von einfacheren Räumen (2. Ordnung). Es ist wieder möglich, Dreiecksvernetzungen zu nutzen. Im Gegensatz zu einfachen (nicht immer stabilen) Ansätzen für die Finite-Elemente-Räume, hat sich in den letzten Jahren auch im Ingenieurbereich die MITC-Elemente-Familie als ein erfolgreiches Werkzeug erwiesen [BBF89, CS98, LSV93, SS97]. Hiermit sind die gewünschten Fehlerabschätzungen garantiert. Obwohl die Matrix der resultierenden Gleichungssysteme wieder positiv definit ist (mit Teilblöcken zu den verschiedenen Freiheitsgraden), wurde dieses Problem hier aufgenommen, weil die Beweise dieser Fehlerabschätzungen auf äquivalente Sattelpunktsprobleme zurückgreifen müssen. Die Zielstellung für das Projekt bestand darin, hierarchische Löser eventuell auf Grundlage des Bramble-Pasciak-CG für die einfachsten MITC-Elemente zu entwickeln und zu implementieren.

Ein weiteres Problem besteht im Auftreten von Randschichten bei kleiner Plattendicke.

Daher ist die adaptive Arbeitsweise für die Auflösung der Randschichten bedeutsam; als Zielstellung sollte mit der Herleitung von Fehlerschätzern begonnen werden.

Aus der Analogie mit der singular gestörten Reaktions-Diffusionsgleichung wird eine adäquate lösungsangepasste Diskretisierung anisotrop sein. Es sollte untersucht werden, welche Elementtypen sich dafür eignen, d. h., bei welchen Elementen die Inf-Sup-Konstante gleichmäßig bezüglich des Streckungsverhältnisses der Elemente von der Null weg beschränkt ist.

Literaturverzeichnis zu 2.3 (eigene Vorarbeiten und Fremdliteratur)

- [AC00] M. Ainsworth and P. Coggins. The stability of mixed hp -finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38:1721–1761, 2000.
- [AD99] G. Acosta and R. G. Durán. The maximum angle condition for mixed and non-conforming elements. Application to the Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37:18–36, 1999.
- [ANS01] Th. Apel, S. Nicaise, and J. Schöberl. A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. *IMA J. Numer. Anal.*, 21:843–856, 2001.
- [BBF89] F. Brezzi, K.-J. Bathe, and M. Fortin. Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 28:1787–1801, 1989.
- [Bec95] R. Becker. *An adaptive finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations on time-dependent domains*. PhD thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1995.
- [Ber96] M. Bernadou. *Finite element methods for thin shell problems*. Wiley, Chichester, 1996.
- [BP88] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50:1–17, 1988. Corrections in 51:387–388, 1988.
- [BR95] R. Becker and R. Rannacher. Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equations on anisotropically refined meshes. In *Fast solvers for flow problems*, volume 49 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 52–62, Wiesbaden, 1995. Vieweg.
- [CS98] D. Chapelle and R. Stenberg. An optimal low-order locking-free finite element method for Reissner-Mindlin plates. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8:407–430, 1998.
- [LSV93] M. Lyly, R. Stenberg, and T. Vihinen. A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 110:343–357, 1993.
- [Mat97] H. Matthes. *Die nichtüberlappende Gebietszerlegungsmethode zur Parallelisierung und Vorkonditionierung iterativer Verfahren zur Lösung von Platten- und Schalenproblemen*. PhD thesis, TU Chemnitz, 1997.
- [SS97] R. Stenberg and M. Suri. An hp error analysis of MITC plate elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34:544–568, 1997.

- [SS98] D. Schötzau and Ch. Schwab. Mixed hp -FEM on anisotropic meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8:787–820, 1998.
- [SSS99] D. Schötzau, Ch. Schwab, and R. Stenberg. Mixed hp -FEM on anisotropic meshes II: Hanging nodes and tensor products of boundary layer meshes. *Numer. Math.*, 83:667–697, 1999.
- [The98] M. Theß. Parallel multilevel preconditioners for thin smooth shell finite element analysis. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 5:401–440, 1998.
- [TS03] A. Toselli and C. Schwab. Mixed hp -finite element approximations on geometric edge and boundary layer meshes in three dimensions. *Numer. Math.*, 94:771–801, 2003.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Stokes

Stabilität

Für ein gegebenes Finite-Elemente-Netz bezeichnen X_h und M_h die Finite-Elemente-Räume zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck. Die Größe

$$\gamma_h := \inf_{0 \neq p_h \in M_h} \sup_{0 \neq u_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} p_h \operatorname{div} u_h}{\|u_h\|_{1,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega}}$$

bezeichnet die (netzabhängige) Inf-Sup-Konstante, die durch Lösung eines Eigenwertproblems berechnet werden kann. Stabilität der Diskretisierung bedeutet, dass diese netzabhängige Größe für beliebige Finite-Elemente-Netze nach unten von der Null weg beschränkt ist,

$$\exists \gamma > 0 : \quad \gamma_h > \gamma \quad \forall h > 0.$$

Im Folgenden soll dargestellt werden, für welche Elementepaare und Vernetzungsstrategien wir in den letzten drei Jahren Ergebnisse erzielt haben.

Konforme Elemente niedriger Ordnung nach Fortin und Bernardi/Raugel

Das tiefgehendste Stabilitätsresultat während der Bearbeitungsphase wurde von Apel und Nicaise für konforme Elemente niedriger Ordnung erzielt und in [AN03] veröffentlicht. Es soll im Weiteren erläutert werden.

Betrachtet wird ein zweidimensionales Polygonebiet, das zunächst grob mit Vierecken und Dreiecken in Teilgebiete zerlegt wird. In jedem Teilgebiet kann eine aus drei möglichen Vernetzungsstrategien gewählt werden, die man mit (a) *keine Verfeinerung*, (b) *anisotrope Verfeinerung zu einer Kante hin* und (c) *anisotrope Verfeinerung zu zwei Kanten hin* beschreiben kann. Diese Vorgehensweise folgt der Arbeit [SSS99], geht aber insofern darüber hinaus, dass auch (nicht-affine) Trapezelemente zugelassen werden. Für Illustrationen verweisen wir auf die Originalarbeit [AN03].

Der Raum zur Approximation der Geschwindigkeit besteht aus stetigen Vektorfunktionen, die elementweise wie folgt beschrieben werden können. Für Dreieckelemente ist der Raum neundimensional und durch

$$\mathcal{P}_T := \mathcal{P}_1^2 \oplus \operatorname{span} \{n^{(1)} \lambda_2 \lambda_3, n^{(2)} \lambda_3 \lambda_1, n^{(3)} \lambda_1 \lambda_2\}$$

definiert, wobei λ_i die linearen Ansatzfunktionen und $n^{(i)}$ die äußeren Normalen an die Dreiecksseiten bezeichnen, $i = 1, 2, 3$. Der zwölfdimensionale Raum für das Viereckselement ist analog auf der Basis von \mathcal{Q}_1 definiert. Zur Approximation des Drucks werden jeweils elementweise konstante Funktionen verwendet. Die Freiheitsgrade werden in der üblichen Notation in folgender Zeichnung dargestellt.



Diese Räume gehen auf die Arbeiten [For81] und [BR85] zurück, weswegen wir die Elemente auch als Bernardi-Fortin-Raugel-Elemente bezeichnen.

Durch Angabe eines Fortin-Operators wurde zunächst die Stabilität lokal in Teilgebieten mit den Vernetzungsstrategien (a) und (b) gezeigt. Daraus konnte mit Hilfe einer Substrukturtechnik die Stabilität in Teilgebieten mit der Vernetzungsstrategie (c) gefolgert werden. Nochmalige Anwendung der Substrukturtechnik führte dann zum globalen Stabilitätsresultat.

Das Resultat kann nicht mit der gleichen Technik auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden, da sich die benötigten Eigenschaften und Gleichungen, die im Zweidimensionalen auf Kanten gelten, im Dreidimensionalen teilweise auf Kanten und teilweise auf Seitenflächen beziehen.

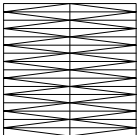
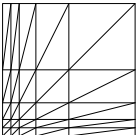
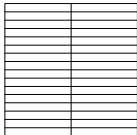
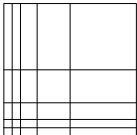
Die Paare $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0$, $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{Q}'_2 - \mathcal{Q}_0$

Aus dem von uns gezeigten Stabilitätsresultat folgt die Stabilität aller Elementpaare mit dem gleichen Raum zur Approximation des Drucks und einem umfassenderen Raum für die Geschwindigkeit, wie $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0$, $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{Q}'_2 - \mathcal{Q}_0$. Dabei ist festzuhalten, dass die Paare $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0$ und $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_0$ bereits in [SS98, SSS99] untersucht wurden, dort aber keine anisotropen Trapezelemente zugelassen wurden.

Taylor-Hood-Elemente

Die Untersuchung von Taylor-Hood-Elementen wurde von Herrn Randrianarivony im Rahmen seiner Masterarbeit begonnen [Ran01], weitere Ergebnisse sind in [AR03] dokumentiert. Auf einigen Folgen von Finite-Elemente-Netzen (Vernetzungsstrategien) wurden die oben definierten Größen γ_h berechnet. Durch Angabe von Beispielen, in denen γ_h gegen Null konvergierte, konnte gezeigt werden, dass das Paar $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ im Allgemeinen nicht stabil ist. Für einige der in oben für das Bernardi-Fortin-Raugel-Element beschriebenen Vernetzungsstrategien konvergierte γ_h jedoch nicht gegen Null. Es ist uns jedoch nicht gelungen, einen theoretischen Beweis dafür zu finden.

Die numerischen Untersuchungen wurden während des Aufenthalts von Herrn Apel an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg in Zusammenarbeit mit Gunar Matthies auch auf Taylor-Hood-Elemente höherer Ordnung ausgedehnt. Dabei ergab sich ein ähnliches Bild. In den folgenden Tabellen sind Grenzwerte für γ_h bei verschiedenen Netzverfeinerungsstrategien zusammengefasst:

Paar			Paar		
$\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$	0.33	0.35	$\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1$	0.46	0.44
$\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2$	0.23	0.25	$\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2$	0.42	0.42
			$\mathcal{Q}_4 - \mathcal{Q}_3$	0.39	0.39
			$\mathcal{Q}_5 - \mathcal{Q}_4$	0.37	0.37
			$\mathcal{Q}_6 - \mathcal{Q}_5$	0.36	0.36
			$\mathcal{Q}_7 - \mathcal{Q}_6$	0.34	0.34
			$\mathcal{Q}_8 - \mathcal{Q}_7$	0.33	0.33
			$\mathcal{Q}_9 - \mathcal{Q}_8$	0.29	0.29

Es sei noch bemerkt, dass das Paar $\mathcal{P}_2^+ - \mathcal{P}_1$, bei dem der Geschwindigkeitsraum in jedem Element mit einer Blasenfunktion (bubble) erweitert wird, in allen numerischen Experimenten (einschließlich der Verfeinerungsstrategien, die für das Taylor–Hood-Element Gegenbeispiele liefern) stabil war ($\gamma_h > \gamma > 0$). Eine theoretische Durchdringung steht jedoch weiterhin aus.

Elemente höherer Ordnung mit unstetigem Druck

Abschließend sei noch erwähnt, dass die ebenfalls von Matthies (Magdeburg) getesteten Elementpaare $\mathcal{P}_2^+ - \mathcal{P}_1^{\text{disc}}$, $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{P}_1^{\text{disc}}$ und $\mathcal{Q}_3^+ - \mathcal{P}_2^{\text{disc}}$ selbst auf den in den obigen Tabellen angeführten sehr regelmäßigen anisotropen Netzen instabil sind, $\gamma_h \rightarrow 0$.

All diese Ergebnisse wurden auf verschiedenen internationalen Konferenzen vorgestellt (z. B. MAFELAP 2003, ENUMATH 2003) und haben zu interessanten Gesprächen mit international anerkannten Fachkollegen wie Franco Brezzi, Rolf Stenberg und David Silvester geführt.

A posteriori Fehlerschätzer für die Stokes Gleichungen

Die Untersuchungen wurden in Zusammenarbeit mit E. Creuse und S. Nicaise (beide Valenciennes) durchgeführt (2002 bis Anfang 2003). Sie mündeten in der Publikation [CKN03], auf die sich alle weiteren Erläuterungen beziehen. Diese Arbeit bildet auch einen wesentlichen Teil der Habilitation von Herrn Kunert [Kun03]. Insgesamt gestalteten sich die Untersuchungen teilweise schwieriger als zunächst angenommen.

Es stellte sich schnell heraus, dass die Analyse von Fehlerschätzern für *gemischte Formulierungen* andere Verfahren erfordert als für skalare Gleichungen. Da ein Diskretisierungsfehler in den zwei Termen für Geschwindigkeit und Druck vorliegt, musste die Theorie modifiziert werden.

Bei einer *konformen* Diskretisierung waren die nötigen Änderungen relativ gering, so dass die Analyse nahezu wie für skalare Gleichungen erfolgen konnte.

Bei einer *nichtkonformen* Diskretisierung dagegen sind bedeutende Modifikationen erforderlich. Am erfolgversprechendsten erschien es, den Geschwindigkeitsfehler über eine Helmholtz-Zerlegung aufzuspalten (für isotrope Vorbilder siehe [DDP95, CF01]). Diese Helmholtz-Zerlegung ist unabhängig davon, ob isotrope oder anisotrope Elemente verwendet werden. Andererseits wurde sie bisher nur im 2D-Fall verwendet und untersucht.

Deshalb haben wir die Zerlegung auf den 3D-Fall erweitert, was aber zu qualitativ neuen Phänomenen führte: Aus Vektorgrößen im 2D-Fall wurden nun Matrixgrößen im 3D-Fall. Weiterhin unterscheidet sich die Analysis im Detail für die unterschiedlichen Element-Typen (Dreiecke, Vierecke, Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder). Im Folgenden sollen die Ergebnisse vorgestellt werden.

Die Diskretisierung muss nur relativ schwache Voraussetzungen erfüllen:

- Der diskrete Geschwindigkeitsraum V_{veloc} muss gross genug sein (effektiv manchmal etwas grösser als sonst üblich).
- Bei *nichtkonformen* Diskretisierungen werden *Crouzeix-Raviart Elemente* betrachtet, bei denen das Integral über den Sprung der diskreten Geschwindigkeit über eine Fläche (in 3D) verschwindet:

$$\int_E [[v_h]]_E = 0.$$

- Die Element-Paare sollten stabil sein für anisotrope Diskretisierungen, d.h. eine diskrete LBB-Bedingung erfüllen. Zu beachten ist allerdings, dass diese Forderung nicht vom Fehlerschätzer kommt, sondern von der Forderung nach einer stabilen Diskretisierung.

Insgesamt deckt unsere Analysis viele Element-Paare ab (sowohl bekannte als auch gegenwärtig untersuchte) bzw. gibt Hinweise, wie sie zu modifizieren sind [CKN03, Abschnitte 5 und 3.4].

Die erhaltenen Fehlerschätzer sind alle vom Residuentyp und beinhalten das Elementresiduum und die Sprünge über eine Kante (2D)/Fläche (3D). Bei nichtkonformen Diskretisierungen kommt noch der Sprung der Tangentialableitung entlang einer Kante/Fläche hinzu. Aufgrund der sehr großen Vielfalt der möglichen Diskretisierungen (2D/3D, konform/nichtkonform, Dreiecke ... Hexaeder) unterscheiden sich sowohl die Fehlerschätzer als auch ihre Analysis mehr oder weniger stark. Deshalb werden hier nicht alle Ergebnisse aufgelistet, sondern nur wesentliche Errungenschaften.

Abschätzung der Fehlers nach unten

Wie auch bei anderen Differentialgleichungen gewohnt, konnten lokale Abschätzungen nach unten gezeigt werden. Die einzigen Ausnahmen sind nichtkonforme 3D Diskretisierungen, die viereckige Flächen haben (also für Pentaeder-/Hexaeder-Elemente). In diesem Fall konnte nur eine schwächere *globale* Fehlerschranke gezeigt werden. Wir vermuten, dass dieses Resultat verbessert werden kann.

Abschätzung der Fehlers nach oben

Die globalen Fehlerabschätzungen nach oben sind alle von der Form

$$\text{Globaler Fehler} \lesssim \text{Alignment Measure} \cdot \text{Fehlerschätzer}$$

Diese *Struktur* der Fehlerschranke war nach den Vorarbeiten zu erwarten, siehe z.B. [Kun99]. Das *Alignment Measure* misst dabei die Ausrichtung des anisotropen Netzes mit der anisotropen Lösung. Für isotrope Netze sowie gut ausgerichtete anisotrope Netze

ist das Alignment Measure in der Größenordnung 1 (in numerischen Experimenten $\approx 1.5 \dots 4$). An dieser Stelle soll darauf nicht weiter eingegangen werden; wir verweisen auf [Kun99] für eine ausführliche Diskussion.

Für die untersuchten Stokes-Gleichungen sind jetzt mehrere Abweichungen von der bisher bekannten Theorie bedeutsam:

- Statt eines Alignment Measures tauchen nun *mehrere* Alignment Measures auf.
- Die Alignment Measures beziehen sich zum Teil auf Funktionen, von denen man nur die Existenz kennt, nicht aber die konkrete Gestalt.

Beide Unterschiede sind Nachteile. Möglicherweise erreicht die bisherig verwendete Methodik zum Herleiten anisotroper Fehlerschätzer ihre Grenzen.

Löser, Implementierungen

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten Untersuchungen zu stabilen Elementen und zu Fehlerschätzern für das Stokes-Problem als Prototyp gemischter FEM erfordern ein Experimentalprogramm, das die wesentlichen Eigenschaften der Fehlerschätzer, der Netzsteuerung und der schnellen Lösung der (hier indefiniten) Gleichungssysteme leicht illustrieren kann. Dies wurde in einer ersten Version als SPC-PM-AdSt („Programm-Modul adaptiv Stokes“) unter Nutzung der im SFB entwickelten Bibliotheken und in Verallgemeinerung von SPC-Ad2D (vgl. Tp. A3) erhalten. Neu ist dabei, dass mehrere Elementmatrizen zu berechnen sind (wegen der zusätzlichen Bilinearform $b(p, u)$) und dass der Löser vom bekannten vorkonditionierten Verfahren der konjugierten Gradienten (PCG) zu einer Verallgemeinerung des Bramble–Pasciak–CG [BP88, MS01] zu ändern ist. Dieses Programm bildet die Grundlage für die folgenden Experimente.

2.4.2 Plattenprobleme

Die Behandlung der Reissner–Mindlin–Plattengleichung wurde in dieses Teilprojekt aufgenommen, weil hier ebenfalls die Stabilität gemischter Finites Elemente eine große Rolle spielt. Allerdings hat sich bei der Sichtung der Veröffentlichungen der letzten Jahre deutlich gezeigt, dass dies nur für die Beweise von günstigen FE–Formulierungen benutzt wird, nicht aber für die wirkliche numerische Rechnung.

Vielmehr führen die Arbeiten zum richtigen Verständnis der zugrunde liegenden Räume und münden in eine (leicht abgeänderte) positiv definite Bilinearform der Plattengleichung zurück:

$$a(w, \vec{\Theta}, v, \vec{\vartheta}) = t^2 a_1(\vec{\Theta}, \vec{\vartheta}) + \mu \kappa \langle \mathcal{R}_h(\nabla w - \vec{\Theta}), \mathcal{R}_h(\nabla v - \vec{\vartheta}) \rangle$$

mit einem besonderen Projektor \mathcal{R}_h , der das sonst übliche „Locking“ beseitigt.

Aus diesem Grund wurde die Bearbeitung dieses Teilthemas modifiziert fortgeführt. Zum einen hat sich Herr Derezin auf die Randschichtenproblematik aus analytischer Sicht konzentriert. Er hat versucht verschiedene äquivalente Formulierungen zu finden, die besonders geeignet wären ein Randschicht–Verhalten aufzudecken. Gleichzeitig ist in einer Diplomarbeit mit der Implementierung und numerischen Experimenten zu den MITC3 und MITC7–Elementen (für Dreiecke) sowie MITC4/9–Elementen (für Vierecke) begonnen worden. Beide Arbeiten sind noch nicht abgeschlossen.

Randschichten bei Platten

Es wurde das Problem der Randschichten anders als traditionell (Asymptotiken bezüglich Plattendicke) analysiert.

Durch Helmholtz-Zerlegung des Rotationsvektors bzw. der Scherkraft (abhängig von Randbedingungen) erhält man eine Repräsentation durch transversale Verschiebung und lokale Verdrehung

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w &= p \\ -\Delta\psi + k^2\psi &= 0 \\ \psi &\sim \frac{1}{2}z \left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Also die transversale Verschiebung ist durch die biharmonische Gleichung, die lokale Verdrehung durch eine Reaktions-Diffusions-Gleichung bestimmt. Letztere repräsentiert die Randschichten. Die Kopplung beider geschieht durch 3 Randbedingungen.

Nahezu die gleichen Herangehensweisen führten Brezzi/Fortin [BF86] zu 2 elliptischen Gleichungen und einem (gestörten) Stokes-Problem. Unser System ist äquivalent hierzu. Mit Hilfe von konstitutiven Gleichungen für die Spannungen sowie einem Analogon der Beltrami-Michell-Kompatibilität (siehe [DZ98]) erhält man explizite Abhängigkeitsformeln von der Spannung („Primale Größen“ der Lösung) als Funktion des obigen Feldes ψ („Randschichten-Funktion“). Dies könnte zur Steuerung eines adaptiven Algorithmus für Randschichten dienen, da hiermit auf einfache Weise das Auftreten von Randschichten (oder nicht) in den einzelnen Komponenten der Biegemomente und der Scherkräfte aufgedeckt wird.

Weitere Ergebnisse

M. Jung hat in [Jun03] die parallele Lösung von Finite-Elemente-Gleichungssystemen, die bei der Diskretisierung einer gemischten Variationsformulierung des ersten biharmonischen Randwertproblems entstehen, diskutiert. Zur Diskretisierung wurden Dreieckselemente mit stückweise linearen Ansatzfunktionen genutzt. Die Lösung der indefiniten Finite-Elemente-Gleichungssysteme erfolgte mittels vorkonditionierter Schur-Komplement-CG-Verfahren, CG-Verfahren vom Bramble-Pasciak-Typ und Multigrid-Verfahren. In [KNJ03, KNJ04] (am Institut für Wissenschaftliches Rechnen der TU Dresden) wurde die Parallelisierung von direkten und iterativen Lösungsverfahren für verschiedene gemischte Variationsformulierungen von Plattenproblemen untersucht.

Literaturverzeichnis

- [AN03] Th. Apel and S. Nicaise. The inf-sup condition for the Bernardi-Fortin-Raugel element on anisotropic meshes. Preprint SFB393/03-15, TU Chemnitz, 2003. Erscheint 2004 unter dem Titel *The inf-sup condition for some low order elements on anisotropic meshes* bei Calcolo.
- [AR03] Th. Apel and H. M. Randrianarivony. Stability of discretizations of the Stokes problem on anisotropic meshes. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61:437–447, 2003.
- [AF90] D.N. Arnold and R.S. Falk. The boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model. *SIAM J. Math. Appl.*, 21:281–312, 1990.

- [BR85] C. Bernardi and G. Raugel. Analysis of some finite elements for the Stokes problem. *Math. Comp.*, 44:71–79, 1985.
- [BP88] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50:1–17, 1988. Corrections in 51:387–388, 1988.
- [BF86] F. Brezzi and M. Fortin. Numerical approximation of Mindlin–Reissner plates. *Math. Comp.*, 47:151–158, 1986.
- [CF01] C. Carstensen and S. Funken. A posteriori error control in low-order finite element discretisations of incompressible stationary flow problems. *Math. Comp.*, 70:1353–1381, 2001.
- [CKN03] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. Preprint SFB393/03–01, TU Chemnitz, 2003. Submitted to *Math. Models Methods Appl. Sci.*
- [DDP95] E. Dari, R. Durán, and C. Padra. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Math. Comput.*, 64:1017–1033, 1995.
- [DZ98] S.V. Derezin and L.M. Zubov. Dislocations and disclinations in elastic plates. *Proc. of the 4th Conf. on Continuum Mech., Rostv Don*, 128–132, 1998.
- [For81] M. Fortin. Old and new finite elements for incompressible flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1:347–354, 1981.
- [FD61] K.O. Friedrichs, R.F. Dressler. A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 14:1–33, 1961.
- [Jun03] M. Jung. Fast parallel solvers for fourth-order boundary value problems. In G. R. Joubert, W. E. Nagel, F. J. Peters, and W. V. Walter, eds., *Parallel Computing: Software, Technology, Algorithms, Architectures, and Applications*. Proceedings of the 10th ParCo Conference in Dresden, 2003. (accepted for publication).
- [KNJ03] K. Kulshreshtha, N. Nataraj, and M. Jung. Performance of a parallel mixed finite element implementation for fourth order clamped anisotropic plate bending problems in distributed memory environments. *Applied Mathematics and Computation*, 2003. (accepted for publication).
- [KNJ04] K. Kulshreshtha, N. Nataraj, and M. Jung. A parallel mixed finite element implementation of fourth-order plate bending problems in distributed memory environments. *Applied Mathematics and Computation*, 2004. (accepted for publication).
- [Kun99] G. Kunert. *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*. Logos Verlag, Berlin, 1999. Also PhD thesis, TU Chemnitz, <http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/1999/0012/index.html>.
- [Kun03] G. Kunert. *Advances in a posteriori error estimation on anisotropic finite element discretizations*. Logos, Berlin, 2003. Habilitationsschrift.
- [MS01] A. Meyer and T. Steidten. Improvements and experiments on the Bramble-Pasciak type CG for mixed problems in elasticity. Preprint SFB393/01-13, TU Chemnitz, 2001.

- [Ran01] M. Randrianarivony. Stability of mixed finite element methods with anisotropic meshes. Master's thesis, TU Chemnitz, 2001.
- [SS98] D. Schötzau and Ch. Schwab. Mixed hp -FEM on anisotropic meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8:787–820, 1998.
- [SSS99] D. Schötzau, Ch. Schwab, and R. Stenberg. Mixed hp -FEM on anisotropic meshes II: Hanging nodes and tensor products of boundary layer meshes. *Numer. Math.*, 83:667–697, 1999.

2.5 Offene Fragen / Ausblick

In der letzten Bearbeitungsphase wurde die Stabilität von mehreren Elementepaaren theoretisch untersucht, ohne zu einem abschließenden Beweis zu kommen. Dabei handelt es sich um das Bernardi–Fortin–Raugel-Element im Dreidimensionalen, die Taylor–Hood-Elemente $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ und $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1$ und das $\mathcal{P}_2^+ - \mathcal{P}_1$ -Element (alle zunächst 2D). Die Hauptursache für den bislang ausgebliebenen Erfolg liegt sicher darin, dass dieses Vorhaben sehr ambitioniert ist. Es bleibt auch weiterhin eine interessante Herausforderung. An allen drei Fragestellungen hat außer Herrn Apel der von der DFG finanzierte Projektbearbeiter Alexander Smuglyakov mitgearbeitet. Der ursprünglich vorgesehene Bearbeiter Maharavo Randrianarivony, der durch Vorarbeiten bestens für das Projekt eingearbeitet war, hat sich kurzfristig wissenschaftlich umorientiert und ist als Bearbeiter im Teilprojekt A7 bei der Informatik eingestiegen.

Daher musste die Stelle kurzfristig ausgeschrieben werden; der neue langfristige Bearbeiter Smuglyakov ab April 2002 benötigte natürlich eine längere Einarbeitungszeit. Die numerischen Untersuchungen zu den Fehlerschätzern beschränken sich momentan auf ein relativ einfaches, akademisches Testproblem. Hier besteht noch großer Forschungsbedarf, der mit den Partnern in Valenciennes (E. Creuse, S. Nicaise) angegangen werden sollte. Insbesondere muss untersucht werden, ob der aus theoretischer Sicht nachteilige Einfluss mehrerer Alignment Measures sich auch in der numerischen Praxis zeigt.

In der Fortführung dieses Teilprojektes können diese Ergebnisse für praxisrelevantere Simulationsrechnungen genutzt werden. So tritt bei Deformationsproblemen mit (fast oder in Teilen) inkompressiblen Materialien ein Sattelpunktsproblem auf, das etwa gleiche Eigenschaften wie das Stokes–Problem hat. Deshalb kann die bisherige Experimentalssoftware (etwa *SPC-PM AdSt* und *SPC-PM AdMix*, vgl. Tp.A3) sofort auf diese Fälle verallgemeinert werden.