

Übungen zur Feldtheorie

(wird fortgesetzt)

Klaus Morawetz, Zi 564, klaus.morawetz@physik.tu-chemnitz.de, www.mpipks-dresden.mpg.de/~morawetz

I. Relativistische Kinematik und Kovarianz

1. Leiten Sie das Additionstheorem für relativistische Geschwindigkeiten her.
2. Betrachten Sie die Proton-Proton-Streuung bei Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} = 53\text{GeV}$. Berechnen Sie die äquivalente Laborenergie E_L sowie die Werte von u und θ_L , die dem Minimum des elastischen Streuquerschnitts bei $t = -1.34\text{GeV}^2$ entsprechen (Phys. Lett. B 68 (1977) 374).

3. Welches ist der erlaubte Phasenraumbereich in der s-, t-, u-Ebene für die Reaktion

$$e^-(p_1) + p^+(p_2) \rightarrow Z(p_3) + \gamma(p_4)?$$

Setzen Sie dabei $m_Z \approx 90\text{GeV}$, $m_e \approx \gamma = 0$. Wo ist der erlaubte Bereich für die gekreuzte Reaktion $Z \rightarrow e^- + e^+ + \gamma$? Wo erscheinen Ereignisse, bei denen das Photon γ parallel zum Elektron e^- oder zum Positron e^+ läuft?

4. Leiten Sie aus der Transformationsformel $p'^\mu = m \frac{dx'^\mu}{d\tau} = m \lambda_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \lambda_\nu^\mu p^\nu$ die Transformationsformel $p_\nu = \lambda_\nu^\mu p'_\mu$ für die Komponenten mit unteren Indizes des Viererimpulses her.
5. Zeigen Sie, daß $d^3\vec{k}/2\omega$ ein Lorentz-invariantes Maß und $2\omega\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$ eine Lorentz-invariante Distribution sind.
6. Berechnen Sie die Form der elektrischen und magnetischen Felder nach einer Lorentztransformation (boost).
7. Lösen Sie die Bewegungsgleichung eines klassischen relativistischen Teilchens im elektromagnetischen Feld, wenn letzteres nicht vom Ort oder der Zeit abhängt. Benutzen Sie dafür die Spinordarstellung eines Vierervektors $(u_0, \vec{u})$ in der Form $\underline{u} = u_0 I + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}$.

II. Felder

1. Man zeige, daß die inversen Formeln zu

$$\Phi^\pm(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a^\pm(\vec{p}) f_p^\pm(x); \quad f_p^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i p x}$$

gegeben sind durch

$$a^\pm(\vec{p}) = \int d^3\vec{x} [\omega_p \Phi(x) \mp i \dot{\Phi}(x)]; \quad \Phi = \Phi^+ + \Phi^-.$$

2. Man überzeuge sich durch explizite Rechnung davon, daß die Matrizen $\vec{\alpha}$ und β paarweise antikommutieren und daß ihr Quadrat gleich Eins ist. Davon ausgehend zeige man $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}$ für die Dirac-Matrizen.
3. Man zeige, daß der Strom $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \Sigma$ mit dem Dirac Hamiltonian kommutiert $[H_D, \vec{J}] = 0$.
4. Man betrachte den nichtrelativistischen Grenzfall der Diracgleichung und leite die Pauligleichung für Spin 1/2 Teilchen her.
5. Pionen (π^+, π^0, π^-) haben den Spin $s = 0$, Isospin $I = 1$ und negative (innere) Parität $P = -1$. Ihre Masse ist ungefähr $m_\pi = 140 \text{ GeV}/c^2$. Unter Beachtung dieser Tatsachen gebe man die Lagrangedichte für das Pionenfeld an. (Man überlege sich zunächst eine Darstellung durch reelle Felder mit den richtigen Symmetrieeigenschaften. Da es geladene Teilchen sind, gehe man dann zu einer Darstellung mit komplexen Feldern über, in denen $I_3 = \text{diag}(1, 0, -1)$ gilt.
6. Man zeige, daß die relativistische kovariante Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ den inhomogenen Maxwell-Gleichungen entspricht, $\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda \tilde{F}^{\lambda\mu} = 0$ dem zyklischen System $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ äquivalent ist und den homogenen Maxwellgleichungen entspricht. ($\tilde{F}$ ist der duale Tensor zu F .)
7. Man zeige für Paulimatrizen die Beziehung $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$. Hinweis: Zeigen Sie zuerst für die Paulimatrizen $\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k \epsilon_{kij}$.
8. Man verifiziere die Orthonomierungsbedingungen für Dirac- konjugierte Spinoren

$$\bar{u}^{s\pm}(\vec{p}) u^{r\mp}(\vec{p}) = \pm \frac{p_0}{m} \delta^{sr}.$$

9. Berechnen Sie die Spinsummen

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m$$

10. Zeigen Sie, daß die Matrizen $\gamma'^\mu = (a - ib\gamma_5)\gamma^\mu$ mit $a^2 - b^2 = 1$ der gleichen Algebra wie die Dirac Matrizen genügt. Finden Sie die Ähnlichkeitstransformation die beide Matrizen verknüpft.

11. Zeigen Sie, daß die Dynamik des freien Dirac Feldes invariant ist unter chiraler Transformation $\Psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\Psi$ mit α reell, genau dann, wenn $m = 0$ ist.
12. Für je zwei Lösungen $u_r(\mathbf{p})$ und $u_s(\mathbf{p}')$ der Dirac Gleichung mit positiver Energie beweise man die Gordonsche Identität

$$2m\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^\mu u_r(\mathbf{p}) = \bar{u}_s(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u_r(\mathbf{p})$$

Man benutzt die Identität $\bar{u}_s(\mathbf{p}')[\not{p}(\not{p}' - m) + (\not{p}' - m)\not{p}]u_r(\mathbf{p})$.

III. Ströme

1. Man zeige, daß aus der Symmetrie des kanonischen Energie-Impuls Tensors $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ die separate Erhaltung des Spins $\partial_\mu S^{\mu\alpha\beta} = 0$, d.h. $\dot{s}^k = 0$ folgt.
2. Man konstruiere für die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \vec{\Pi} \partial_\mu \vec{\Pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2 \vec{\Pi}^2$ des reellen Pionenfeldes die entsprechenden Isoströme und die erhaltenden Isoladungen als Funktion der Pionenfelder. Man rechne die Darstellung des Impulses $\vec{p} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \vec{k} (b_k b_k^+ + a_k^+ a_k)$ durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Pionen explizit nach.
3. Ausgehend von der Zerlegung des Diracfeldes nach Spinzuständen

$$\Psi_\alpha^\pm(\vec{p}) = \sum_{s=1}^2 a_s^\pm(\vec{p}) u_\alpha^{s\pm}(\vec{p}) \quad \bar{\Psi}_\alpha^\pm(\vec{p}) = \sum_{s=1}^2 a_s^{*\pm}(\vec{p}) \bar{u}_\alpha^{s\pm}(\vec{p}),$$

wobei $\bar{u}^{s\pm} = u^{s\pm} \gamma^0$ und $a^{*\pm} = \overline{a^\mp} = (a^\mp)^*$ ist und $\pm$ die positive bzw. negative Energielösung kennzeichnet, leite man die Relationen

$$p^\mu = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} k^\mu [a_s^{*+}(\vec{k}) s_s^-(\vec{k}) - a_s^{*-}(\vec{k}) a_s^+(\vec{k})]$$

$$Q = \int d^3\vec{x} \Psi^+(x) \Psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} [a_s^{*+}(\vec{k}) s_s^-(\vec{k}) + a_s^{*-}(\vec{k}) a_s^+(\vec{k})]$$

her. Man beachte die Orthonomierung der Dirac-Spinoren sowie die Relation $(u_\alpha^{s\pm}(\vec{p}))^* = u_\alpha^{*\mp}(\vec{p})$.

4. Betrachten Sie ein freies neutrales skalares Mesonfeld. Zeigen Sie, daß die Komponenten des totalen Felddrehimpulses geschrieben werden können als

$$J_i = - \int d^3\vec{x} (T_{0k} x_l - T_{0l} x_k) \quad (i, k, l = 1, 2, 3 \text{ zyklisch})$$

und stellen Sie so um, so daß der Ausdruck

$$\vec{J} = -\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \pi(\vec{x}), \vec{x} \times \text{grad} \Phi(\vec{x})_+$$

entsteht. Benutzen Sie diese Form und die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen um $[J_i, J_k] = i J_l$ zu zeigen.

5. Unter Berücksichtigung der kanonischen Vertauschungsrelationen (Poisson Klamern)

$$[\pi^0(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad [\pi^0(\vec{x}, t), \pi^0(\vec{x}', t)] = [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = 0$$

leite man die Relation

$$[j_a^0(\vec{x}, t), j_b^0(\vec{x}', t)] = -i f_{abc} j_c^0(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

für Ströme einer inneren Symmetrie her.

IV. Symmetrien

1. Unter der Annahme, daß $\mathcal{L}$ unter einer inneren Symmetrietransformation δ_a nicht invariant ist, stelle man eine Beziehung zwischen $\partial_\mu J_a^\mu$ und $\delta_a \mathcal{L} (\neq 0)$ her.
2. Ausgehend von der Definition der Ladungsdichte $j_a^0(x) = \Pi_A^0(x) T_a^{AB} \Phi_B(x)$ als zeitliche Komponente eines (nicht notwendig erhaltenden) Stromes $j_a^\mu(x)$ überzeuge man sich davon, daß die Ladungen $Q_a = \int d^3x j_a^0(x)$ die infinitesimale Transformationen der Felder und der kanonisch konjugierten Impulse erzeugen, und daß sie eine Darstellung der Lie-Algebra der Symmetriegruppe

$$[Q_a, \Phi(x)] = T_a \Phi(x); \quad [Q_a, \Pi^0(x)] = T_a \Pi^0; \quad [Q_a, Q_b] = -i f_{ab}^c Q_c$$

ist.

3. Leiten Sie die explizite Gestalt der CPT-Transformation des Dirac-Feldes her und diskutieren Sie sie analog wie die Zeitumkehr-Transformation. Wie sehen die Wirkungen von $\Theta = CPT$ auf die Spinoren aus?

V. Wechselwirkende Felder

1. Man löse die Maxwellgleichungen für ein Volumen, das durch zwei unendliche, parallele, leitende Platten im Abstand a begrenzt ist. Man quantisiere das elektromagnetische Feld in diesem Gebiet unter Beachtung der Randbedingungen. Man berechne die Nullpunktsenergie pro Einheitsfläche E_0 unter Benutzung eines cutoff, der nur von der Frequenz abhängt, und zeige, daß

$$E_0 = C_1 a + C_2 + \frac{\pi \hbar c}{a^3} \frac{B_4}{4!}$$

wobei C_1 und C_2 Größen sind, die vom cutoff abhängen und $B_4 = -1/30$ die vierte Bernoulli-Zahl ist. Man zeige, daß die Kraft zwischen den neutralen Platten nur vom letzten Term in E_0 herrührt und berechne ihre Stärke. (H. Casimir, Koninkl. Ned. Akad. Wetenshap., Proc., Ser.B 793 (1948))

2. Betrachten Sie den Zerfall eines skalaren Higgs-Teilchens h mit der Masse $m_h > 2m_e$ in ein Elektron-Positron Paar. Die Hamilton-Funktion der Wechselwirkung mit dem Higgs-Feldoperator $\rho'(\vec{x}, t)$, einer Konstante ρ_0 und dem Dirac-Feldoperator $\Psi(\vec{x}, t)$ sei gegeben durch

$$H'(t) = \int d^3\vec{x} \frac{m_e}{\rho_0} \rho'(\vec{x}, t) \bar{\Psi}(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t).$$

Berechnen Sie die Zerfallsrate $\Gamma(h \rightarrow e^+ e^-)$ in erster Bornscher Näherung. Benutzen Sie dazu die Entwicklung des skalaren Feldes nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

3. Man leite die Bewegungsgleichungen der Felder

$$\Psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi(x); \quad \Psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi(x)$$

für nicht verschwindende Masse her und zeige, daß diese im Limes $m = 0$ entkoppeln. Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = i\hbar c \bar{\Psi}_L(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L(x)$$

finde man nun als Beschreibung masseloser Fermionen mit lediglich negativer Helizität und masseloser Anti-Fermionen mit lediglich positiver Helizität. Dieses Feld wird Weyl-Feld genannt und kann zur Beschreibung von Neutrinos in der schwachen Wechselwirkung verwendet werden, wenn sie masselos sind.