

## D Hinweise zur Durchführung einer Fehlerbetrachtung

Die Durchführung einer normgerechten Fehlerbetrachtung wird durch umfangreiche DIN-Vorschriften festgelegt, deren vollständige Behandlung jeden Rahmen sprengen würde und ermüdend ist.

Die folgenden Hinweise sollen Ihnen eine Einführung in diese Problematik vermitteln, wobei bewusst auf jegliche Art von Herleitungen verzichtet wurde.

Ziel dieses Abschnittes ist es, Ihnen einen gewissen Algorithmus, der aber nicht als ein absolutes Dogma verstanden werden soll, bereitzustellen, mit dessen Hilfe Sie die erforderlichen Fehlerbetrachtungen im physikalischen Grundpraktikum durchführen können. Erst durch dessen ständige Anwendung auf konkrete Versuchsbedingungen werden Sie getroffene Festlegungen bzw. Definitionen verstehen und in der Lage sein, eine zu dem jeweiligen Versuch gehörende Fehlerbetrachtung durchzuführen. Aus diesem Grunde verlieren Sie bei Ihren ersten Praktikumsversuchen nicht gleich den Mut, wenn die Fehlerbetrachtung nicht auf Anhieb akzeptiert wird. Auch hier gilt: Übung macht den Meister.

### 1. Fehlerquellen und Fehlerarten

Trotz ständiger Weiterentwicklung der Zuverlässigkeit von Messgeräten treten bei der quantitativen Bestimmung einer physikalischen Größe unvermeidbare Fehler auf, **jedes** Messergebnis ist **fehlerbehaftet**.

Ein Ergebnis einer Messung lässt sich daher erst dann richtig beurteilen, wenn zu einem Messwert bzw. zu einem aus mehreren Messwerten berechneten Wert der zugehörige Fehler bekannt ist. Um Messfehler zu erkennen und zu ermitteln bzw. durch geeignete Maßnahmen verringern zu können, müssen die Fehlerquellen bekannt sein. Nach den Ursachen der Fehler unterscheidet man zwischen groben, systematischen und zufälligen Fehlern.

**Große Fehler** beruhen auf Irrtümern, falschen oder nachlässigen Ablesungen, auf einem ungeeigneten Mess- oder Auswerteverfahren oder auf starken äußereren Störeinflüssen. Gegen solche Fehler helfen nur äußerste Sorgfalt sowie Überprüfungen und Kontrollen bei der Messung. Grobe Fehler lassen sich daher vermeiden, die Messunsicherheit eines Ergebnisses sollte keine Anteile von groben Fehlern enthalten! In den folgenden Ausführungen werden daher grobe Fehler nicht weiter betrachtet.

**Systematische Fehler** beeinflussen das Messergebnis bei Wiederholung der Messung unter gleichen Bedingungen stets in der gleichen Richtung und in gleicher Größe. Ihre Ursachen liegen in der Unvollkommenheit der

- verwendeten Maße (z. B. Abweichungen von Eichnormalen)
- eingesetzten Messgeräte (z. B. fehlerhafte Skaleneinteilung eines Lineals)
- Messverfahren (z. B. gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung)

- Messgegenstände (z. B. infolge der Verformbarkeit des Werkstoffes des Messobjektes) sowie
- in Einflüssen der Umgebung, die messtechnisch oder rechnerisch erfasst werden können.

Durch ein vertieftes theoretisches Verständnis des Messvorganges und durch gezielte experimentelle Maßnahmen können systematische Fehler prinzipiell entdeckt, vermieden oder wenigstens vermindert werden.

**Zufällige Fehler** treten völlig regellos nach Betrag und Richtung auf. Ihre Ursachen liegen in messtechnisch nicht erfassbaren Änderungen der

- Messobjekte,
- Messgeräte,
- Umwelteinflüsse sowie
- des Beobachters.

Zufällige Fehler sind prinzipiell unvermeidbar. Sie bewirken, dass die Einzelergebnisse einer Messreihe streuen und der wahre Wert der zu messenden Größe nicht beliebig genau angegeben werden kann.

## 2. Ermittlung systematischer Fehler

### 2.1 bei direkter Messung

Falls systematische Fehler nicht auf messtechnischem oder rechnerischem Wege erfasst werden können, ist es üblich, eine obere Grenze für den systematischen Fehler abzuschätzen. Der Zahlenwert für diese obere Grenze ergibt sich unter Berücksichtigung der Versuchsbedingungen durch Addition der maximal möglichen Beiträge der einzelnen systematischen Fehler:

- vorgegebene Fehler der Messgeräte und Maße (z. B. Güteklassen elektrischer Messgeräte),
- abgeschätzte Fehlereinflüsse der verwendeten Messverfahren (z. B. Strahlungsverluste bei kalorischen Messungen),
- Ungenauigkeit der zur Auswertung benutzten Formeln (z. B. Vernachlässigung des Auftriebes bei der Wägung).

Die Fehler der Messgeräte und Maße sind durch Standards oder durch Garantiefehlergrenzen bzw. durch Eichfehlergrenzen festgelegt und durch Aushang im Praktikum dokumentiert.

### 2.2 bei indirekter Messung

In vielen Fällen ergibt sich die gesuchte Größe  $F$  als Funktion von  $n$  verschiedenen, direkt gemessenen physikalischen Größen  $f_i$  ( $i=1 \dots n$ ). Durch Einsetzen der mit systematischen Fehlern  $\Delta f_i$  behafteten Messwerte  $f_i$  in die Funktion  $F(f_i)$  erhält

man ein fehlerbehaftetes Ergebnis  $F$ . Der zugehörige systematische Fehler wird mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes für systematische Fehler

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial f_i} \right) \Delta f_i$$

errechnet. Da für erkannte systematische Fehler Vorzeichen und Größe der  $\Delta f_i$  bekannt sind, erhält man einen nach Vorzeichen und Zahlenwert definierten Gesamtfehler  $\Delta F$ .

### 3. Ermittlung zufälliger Fehler

#### 3.1 bei direkter Messung

##### 3.1.1 für Einzelmessungen

Bei einer Einzelmessung kann der zufällige Fehler nur abgeschätzt werden. Im einfachsten Fall ist er gleich der Ablesegenauigkeit der Skale (z. B. bei Vielfachmessern, Thermometer, Messschieber etc.). Dazu ist eventuell ein durch die Einstellgenauigkeit gegebener Einstellfehler zu addieren.

##### 3.1.2 für Messreihen (Fehlerrechnung)

Liegen sehr viele Messungen (Messreihe) vor, so werden positive und negative Fehler, also positive und negative Abweichungen vom „wahren Wert“ vorkommen (Abb. 1).

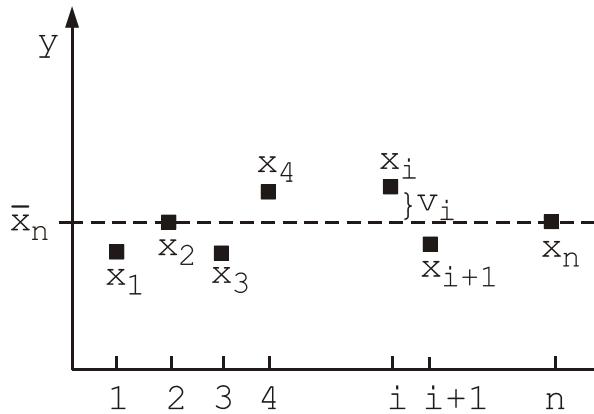


Abb. 1: Darstellung der  $n$  Einzelmessungen

An Stelle des nicht zu ermittelnden wahren Wertes  $x$  einer Messgröße kann im einfachsten Fall der wahrscheinlichste Wert  $\bar{x}_n$  (Mittelwert) aus den vorliegenden, gleich zuverlässigen  $n$  Messwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestimmt werden

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i .$$

Der wahrscheinlichste Wert einer Messgröße - auch Erwartungswert genannt - errechnet sich somit als arithmetisches Mittel einer Messreihe. Das bedeutet

aber auch, dass jede zusätzliche Einzelmessung diesen wahrscheinlichsten Wert verändert, wenn auch umso weniger, je mehr Einzelmessungen bereits vorliegen. Es bleibt also immer unsicher, wie viel der Mittelwert vom wahren Wert abweicht. Die Fehlerrechnung dient dazu, den Grad dieser Unsicherheit abzuschätzen.

Um die Güte der benutzten Messverfahren beurteilen zu können, geht man von der Streuung der einzelnen Messwerte um den Mittelwert aus. Ein Maß für die Streuung der Einzelmessung an die Standardabweichung  $s_n$  (auch als mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung bezeichnet,  $s_n^2$  ist die Varianz der Einzelmessung)

$$s_n = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \quad \text{mit} \quad v_i = x_i - \bar{x}_n .$$

Die Abweichungen vom Mittelwert gehen also nicht mit gleichem Gewicht in die Formel zur Ermittlung der Standardabweichung ein. Große Abweichungen haben einen stärkeren Einfluss als kleinere. Dadurch wird eine Messreihe mit stark streuenden Messwerten deutlich als unzuverlässig gekennzeichnet, da die Standardabweichung sehr groß wird (Abb. 2).

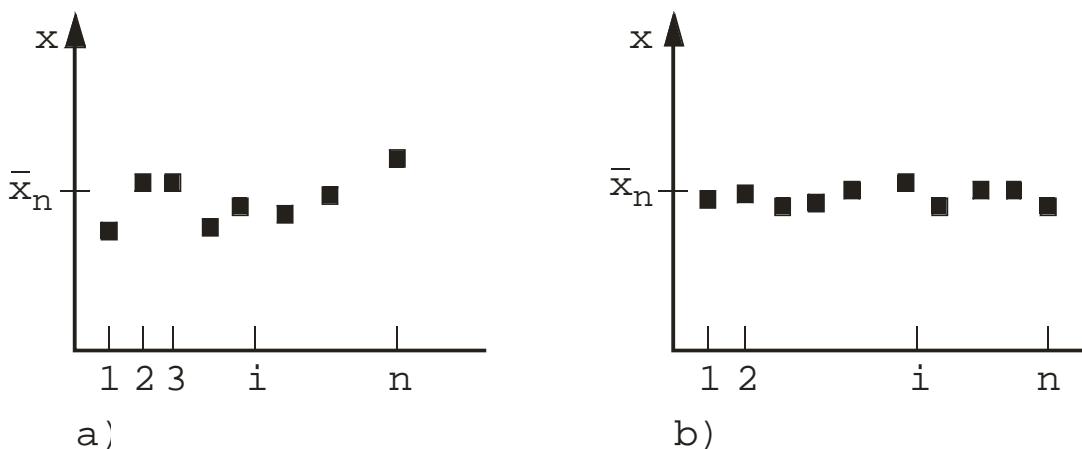


Abb. 2: Streuung der Messwerte um den Mittelwert,  
a) Messung mit geringer Zuverlässigkeit, d.h. die Standardabweichung  
wird groß sein  
b) Messung mit hoher Zuverlässigkeit, d.h. die Standardabweichung  
wird klein sein

Die Standardabweichung der Einzelmessung ist somit ein Maß dafür, wie weit im Mittel ein Messpunkt der Messreihe vom Mittelwert abweicht, sie stellt also den mittleren Fehler der Einzelmessung dar (Abb. 3).

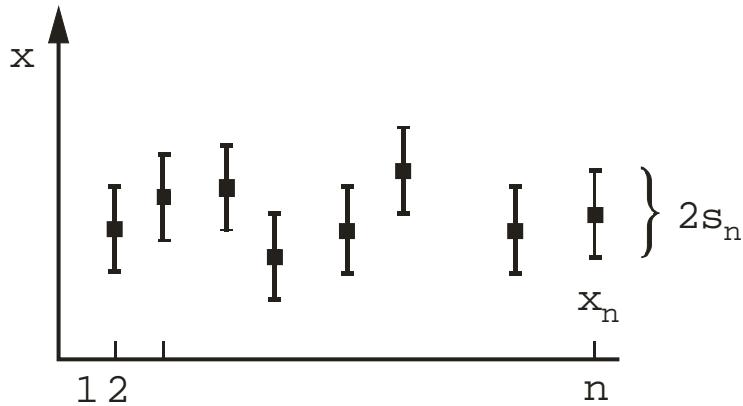


Abb.3: Darstellung der Standardabweichung der Einzelmessung als Fehlerbalken

Von der bisher besprochenen Standardabweichung der Einzelmessung ist die Standardabweichung des Mittelwertes zu unterscheiden. Sie liefert eine Aussage über die Zuverlässigkeit des Mittelwertes und berechnet sich wie folgt:

$$s_{\bar{x}_n} = \frac{s_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}}.$$

Der Bereich  $\bar{x}_n \pm t s_{\bar{x}_n}$  bzw.  $\bar{x}_n \pm \frac{t \cdot s_n}{\sqrt{n}}$  wird als Vertrauensbereich des Mittelwertes

$\bar{x}_n$  und  $\sigma_x = t s_{\bar{x}_n}$  als Vertrauensabweichung bezeichnet. Der Vertrauensbereich gibt den Bereich um den Mittelwert an, innerhalb dessen der wahre Wert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit  $P$  zu erwarten ist. Der Zahlenwert  $t$  hängt von der gewählten statistischen Sicherheit und der Zahl der Messungen  $n$  ab. Für oft verwendete statistische Sicherheiten  $P$  sind in Tabelle 1 die Zahlenwerte  $t$  in Abhängigkeit von der Anzahl der Messungen zusammengestellt.

Die durch den Vertrauensbereich festgelegten Grenzen

$$\bar{x}_n + t \frac{s_n}{\sqrt{n}} \text{ bzw. } \bar{x}_n - t \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

nennt man obere bzw. untere Vertrauengrenze des Mittelwertes.

Tabelle 1

Anzahl der Einzelmessungen	Werte $t$ und $\frac{t}{\sqrt{n}}$ für						
	$n$	$P = 68,30\%$	$P = 95,00\%$	$P = 99,73\%$	$P = 68,30\%$	$P = 95,00\%$	$P = 99,73\%$
3	1,32	0,762	4,30	2,48	19,21	11,00	
4	1,20	0,600	3,18	1,59	9,22	4,61	
5	1,15	0,514	2,78	1,24	6,62	2,96	
10	1,06	0,334	2,26	0,72	4,09	1,29	
20	1,03	0,230	2,08	0,47	3,45	0,77	
30	1,02	0,186	2,05	0,37	3,28	0,60	
100	1,00	0,100	2,00	0,20	3,10	0,31	

Eine statistische Sicherheit von 95% bedeutet, dass bei einer Normalverteilung von z. B. 100 Einzelmesswerten 95 in dem Bereich

$$\bar{x}_n \pm 2 s_{\bar{x}_n} \text{ bzw. } \bar{x}_n \pm 2 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \quad (n = 100, \text{ d. h. } t = 2) \text{ liegen.}$$

Für diesen Fall ist die Vertrauensabweichung  $\sigma_x = 0,2 s_n$  und wir benutzen diesen Wert  $\Delta x_{\text{zuf}} = 0,2 s_n$  auch als zufälligen Fehler des Mittelwertes.

### Hinweise:

- Taschenrechner berechnen meist  $s_n$  statt  $s_{\bar{x}_n}$ , obwohl es anders auf den Tasten steht! Zur Überprüfung sollten für eine (kurze) Messreihe diese beiden Größen entsprechend der angegebenen Formeln berechnet und mit den Werten des Taschenrechners verglichen werden.
- Statistische Fehlerbetrachtungen werden im physikalischen Praktikum durchgeführt, wenn mindestens 10 Einzelmessungen vorliegen.
- Im Praktikum soll in der Regel mit einer statistischen Sicherheit von  $P=95\%$  gerechnet werden.

### 3.2 Bei indirekter Messung (quadratisches Fehlerfortpflanzungsgesetz)

Bei indirekter Messung sind die Standardabweichungen  $s_{\bar{x}_n}$ ,  $s_{\bar{y}_m}$  ... der Mittelwerte  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{y}_m$ , .... der einzelnen Messgrößen  $x$ ,  $y$ , ..... bekannt, so kann man die Standardabweichung des Funktionswertes  $F(\bar{x}_n, \bar{y}_m, \dots)$  mit Hilfe des quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$s_{\bar{F}} = \pm \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_n}^2 s_{x_n}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)_{y_m}^2 s_{y_m}^2 + \dots}$$

berechnen.

Voraussetzungen dafür sind, dass bei den Messungen keine systematischen sondern nur zufällige Fehler auftreten (was im Praktikum im allgemeinen nicht erfüllbar ist), die Messgrößen unabhängig voneinander sind und die Werte für  $s_{x_n}$ ,  $s_{y_m}$ ,..... klein gegen die Mittelwerte  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{y}_m$ ,..... sind.

Bei der Ableitung dieser Beziehung wurde berücksichtigt, dass infolge der Doppelvorzeichen der zufälligen Fehler eine gewisse Wahrscheinlichkeit für einen teilweisen gegenseitigen Ausgleich der Fehler der einzelnen Größen besteht.

#### 4. Messunsicherheit

Die Messunsicherheit  $u$  eines Messergebnisses umfasst die entsprechend Punkt 3 berechneten zufälligen Fehler und die nicht erfassbaren, entsprechend Punkt 2 abgeschätzten, systematischen Fehler. Nicht erfassbare systematische Fehler können z. B. dadurch entstehen, dass ein Messgerät einen unbekannten systematischen Fehler besitzt oder bei dem verwendeten Messverfahren unvermeidbare Störeinflüsse (z. B. bei kalorimetrischen Messungen Wärmeaustausch mit der Umgebung) existieren.

Eine Aufklärung über nicht erfassbare systematische Fehler könnte u. a. die Anwendung andersartiger Messsysteme und Messverfahren bringen. Dieser Weg ist im physikalischen Grundpraktikum jedoch nicht gangbar, so dass nur eine Abschätzung des Einflusses dieser Fehlerquellen auf das Messergebnis bleibt.

Mit Hilfe der Messunsicherheit  $u$  wird das Messergebnis in folgender Weise angegeben:

$$x = \bar{x} \pm u.$$

Die Messunsicherheit wird meist additiv aus der Vertrauensabweichung

$\sigma_x = t s_n / \sqrt{n}$  des Mittelwertes und dem abgeschätzten Betrag des systematischen Fehlers  $|\Delta x_{\text{sys}}|$  zusammengesetzt,

$$u = \frac{t s_n}{\sqrt{n}} + |\Delta x_{\text{sys}}|.$$

Der durch den systematischen Fehler bedingte Anteil  $|\Delta x_{\text{sys}}|$  wird anhand des verwendeten Messverfahrens, der eigenen Sorgfalt beim Experimentieren und der Fehlergrenzen des eingesetzten Messgerätes abgeschätzt (Begründung für die abgeschätzten Werte angeben!). Ist der systematische Fehler  $|\Delta x_{\text{sys}}|$  gegenüber den zufälligen Fehlern vernachlässigbar, dann ist die Messunsicherheit gleich der

Vertrauensabweichung des Mittelwertes. Gilt dagegen  $|\Delta x_{\text{sys}}| \gg \sigma_x$  kann auf die Berücksichtigung und damit auf die Auswertung der zufälligen Fehler verzichtet werden. Im Falle einer Größtfehlerberechnung ergibt sich die Messunsicherheit aus der Summe des systematischen Fehlers und des abgeschätzten zufälligen Fehlers (Ablesefehler).

## 5. Größtfehlerberechnung

In der experimentellen Praxis liegt häufig der Fall vor, dass zur Bestimmung einer physikalischen Größe  $x$  nur wenige Messungen (teilweise sogar nur Einzelmessungen) durchgeführt werden, die direkt oder indirekt zum Endergebnis führen. In diesen Fällen wird zur Ermittlung der Messunsicherheit eine Obergrenze für den Messfehler berechnet. Diese Obergrenze bezeichnen wir als Größtfehler, im ungünstigsten Fall kann er bei der durchgeföhrten Messung auftreten sein. Sie liefert einen nach oben abgeschätzten Größtfehler für die Messung.

### 5.1 bei direkter Messung

Die Messgenauigkeit  $\Delta x$  wird auch hier durch die Summe der beiden Anteile

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{zuf}} & (\text{zufälliger Messfehler}) \\ \Delta x_{\text{sys}} & (\text{systematischer Messfehler})\end{aligned}$$

Der zufällige Fehler ist im einfachsten Falle die Ablesegenauigkeit einer Skale. Dies soll am Beispiel eines Quecksilberthermometers erläutert werden (Abb. 4).

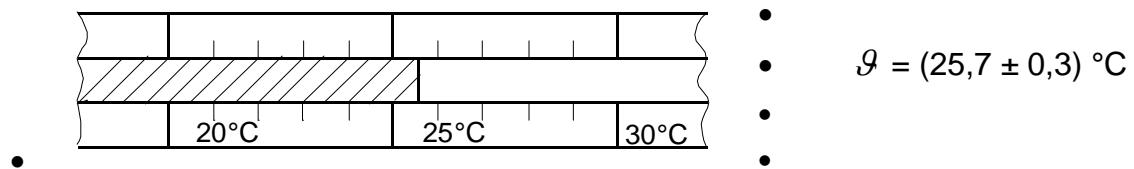


Abb. 4: Quecksilberthermometer

Die Temperatur wird am Ende des Quecksilberfadens abgelesen, z. B. befindet er sich hier zwischen den Skalenwerten  $25^\circ\text{C}$  und  $26^\circ\text{C}$ . Teilt man in Gedanken den Bereich zwischen den beiden Marken in zwei gleich große Teile ein, so kann man abschätzen, dass der Messwert zwischen  $25,5^\circ\text{C}$  und  $26,0^\circ\text{C}$  liegen muss. Man kann also in diesem Fall den Messwert mit einer Genauigkeit von etwa  $\Delta x_{\text{zuf}} = \pm 0,3\text{ K}$  angeben. Ohne Hilfsmittel (wie z. B. Nonius oder Ableselupe) lassen sich Ablesegenauigkeiten bis zu 20% eines Skalenwertes erreichen.

Eine weitere Möglichkeit zur Abschätzung des zufälligen Fehlers besteht in der Ermittlung des Kleinst- und Größtwertes. Dazu liest man, unabhängig voneinander, bis zu vier Werte ab und bildet die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert. Diese Differenz kann dann als zweifacher Wert des zufälligen Messfehlers verwendet werden.

Der mögliche systematische Messfehler wird im Allgemeinen vom Hersteller als Garantiefehlergrenze angegeben. Auf speziellen Tafeln sind die Garantiefehlergrenzen für die im physikalischen Grundpraktikum eingesetzten Messmittel zusammengestellt und in den Praktikumsräumen ausgehängt.

Im Falle des obigen Beispiels würde der systematische Fehler  $\Delta x_{\text{sys}} = \pm 0,5 \text{ K}$  betragen. Damit garantiert der Hersteller, dass die wahre Temperatur weniger als 0,5 K von der angezeigten Temperatur abweicht. Der maximale Messfehler ergibt sich dann aus der Summe der Beträge beider Fehleranteile, zu  $|\Delta x| = |\Delta x_{\text{zuf}}| + |\Delta x_{\text{sys}}|$ .

Im angegebenen Beispiel wäre dann  $|\Delta x| \pm 0,8 \text{ K}$ .

Neben dem Ablesefehler ist oft auch ein Einstellfehler (z. B. Brückenabgleich oder Scharfeinstellungen einer optischen Anordnung) als zufälliger Fehler zu addieren.

## 5.2 bei indirekter Messung

Im Fall der indirekten Messung setzt sich die zu bestimmende physikalische Größe  $F = F(x_1, x_2, \dots)$  funktionell aus mehreren voneinander unabhängig gemessenen Größen  $x_1, x_2, \dots$  zusammen. Die zugehörigen maximalen Messfehler dieser gemessenen Größen  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  seien bekannt. Sie werden in der Regel analog 5.1 ermittelt.

Zur Berechnung des Größtfehlers  $\Delta F$  der gesuchten Größe  $F$  geht man von der Entwicklung der Funktion  $F = F(x_1, x_2, \dots)$  in eine Taylor-Reihe aus, die man nach den linearen Gliedern abbricht.

$$F(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots) \pm \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 \pm \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 \pm \dots$$

Mit  $\Delta F = F(x_1, \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \dots) - F(x_1, x_2, \dots)$  erhält man für den Größtfehler einer indirekt gemessenen physikalischen Größe:

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots$$

Diese Näherung ist nur dann zulässig, wenn die Messfehler nicht zu groß sind oder wenn die Funktion linear ist. Da der Größtfehler berechnet werden soll, muss man alle Summanden betragsmäßig addieren.

In der Praxis bildet man von der Funktion  $F = F(x_1, x_2, \dots)$  das totale Differential

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots, \text{ ersetzt die Differentiale } dx_i \text{ durch die Fehler } \Delta x_i \text{ und}$$

addiert die Beträge der Summanden. Eine einfache Rechenmöglichkeit ergibt sich,

wenn  $F$  eine Potenzfunktion z. B.  $F = Bx^a y^b$  der Veränderlichen  $x, y, \dots$  ist. Dann kann mit Hilfe der logarithmischen Differentiation der relative Größtfehler  $\Delta F / F$  in einfacher Weise berechnet werden. Man bildet dabei zunächst von  $F$  den natürlichen Logarithmus  $\ln F = \ln B + a \ln x + b \ln y$ , und berechnet dann das totale Differential  $d(\ln F)$  dieses Ausdruckes:

$$\frac{1}{F} dF = a \frac{1}{x} dx + b \frac{1}{y} dy.$$

Es erfolgt nun ebenfalls der Übergang von den Differentialen zu den entsprechenden Messfehlern, anschließend werden dann auch die Beträge der einzelnen Summanden addiert:

$$\left| \frac{\Delta F}{F} \right| = \left| a \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| b \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

Die Ermittlung des Größtfehlers soll an zwei Beispielen demonstriert werden:

1. Beispiel: Bestimmung der Fallbeschleunigung mit dem Fadenpendel

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}.$$

Die Messgrößen sind  $\ell$  und  $T$ , die zugehörigen Messunsicherheiten  $\Delta\ell$  und  $\Delta T$ , wobei beide die Summe aus systematischem und zufälligem Fehler darstellen.

a: **totales Differential**

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial \ell} d\ell + \frac{\partial g}{\partial T} dT \\ dg &= 4\pi^2 \frac{1}{T^2} d\ell - 8\pi^2 \frac{\ell}{T^3} dT \\ \left| \Delta g \right| &= \left| 4\pi^2 \frac{1}{T^2} \Delta\ell \right| + \left| 8\pi^2 \frac{\ell}{T^3} \Delta T \right| \end{aligned}$$

Die beiderseitige Division durch  $g$  ergibt den relativen Fehler

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta\ell}{\ell} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right|$$

b: **logarithmische Differentiation**

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + \ln \ell - 2 \ln T$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - 2 \frac{dT}{T}$$

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta \ell}{\ell} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right|$$

2. Beispiel: Bestimmung der Brennweite einer dünnen Linse

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}.$$

Dieses Beispiel soll zeigen, dass die Fehlerberechnung auch davon abhängt, wie die durchzuführenden Messungen ausgeführt werden.

Zunächst könnte man nacheinander  $a$  und  $a'$  unabhängig von einander mit Messfehlern  $\Delta a$  und  $\Delta a'$  messen. Die Anwendung der obigen Formel führt dann auf

$$\Delta f = \frac{a'^2}{(a+a')^2} \Delta a + \frac{a^2}{(a+a')^2} \Delta a'.$$

Die Division durch  $f = \frac{aa'}{a+a'}$  liefert  $\frac{\Delta f}{f} = \frac{a'}{a+a'} \frac{\Delta a}{a} + \frac{a'}{a+a'} \frac{\Delta a'}{a'}$ .

Oft misst man statt dessen auf einer gemeinsamen Skala unabhängig von einander den Gegenstandsort  $\ell_1$ , den Linsenort  $\ell_2$  und den Bildort  $\ell_3$  mit den jeweiligen Messfehlern  $\Delta \ell_1$ ,  $\Delta \ell_2$  und  $\Delta \ell_3$ .

In diesem Falle gilt  $f = \frac{aa'}{a+a'} = \frac{(\ell_2 - \ell_1)(\ell_3 - \ell_2)}{(\ell_3 - \ell_1)}$ .

### a: Rechnung über Bildung des totalen Differentials

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \ell_1} d\ell_1 + \frac{\partial f}{\partial \ell_2} d\ell_2 + \frac{\partial f}{\partial \ell_3} d\ell_3 \\ df &= \frac{-(\ell_3 - \ell_2)(\ell_3 - \ell_2)^2}{(\ell_3 - \ell_1)^2} d\ell_1 + \frac{((\ell_3 - \ell_2)(\ell_2 - \ell_1))}{(\ell_3 - \ell_1)} d\ell_2 + \frac{(\ell_2 - \ell_1)^2}{(\ell_3 - \ell_1)^2} d\ell_3. \end{aligned}$$

Nach dem Ersetzen der Differentiale  $d\ell_i$  durch ihre Messfehler  $\Delta \ell_i$ , Umformen der Summanden und Addition der Beträge erhält man:

$$|\Delta f| = \left| \frac{a'^2}{(a+a')^2} \Delta \ell_1 \right| + \left| \frac{a-a'}{a+a'} \Delta \ell_2 \right| + \left| \frac{a^2}{(a+a')^2} \Delta \ell_3 \right|.$$

Die beidseitige Division durch  $f = \frac{aa'}{a+a'}$ , ergibt den relativen Fehler

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f}{a^2} \Delta \ell_1 \right| + \left| \frac{a-a'}{aa'} \Delta \ell_2 \right| + \left| \frac{f}{a'^2} \Delta \ell_3 \right|.$$

### b: logarithmische Differentiation

Unter Beachtung spezieller Rechenregeln kann dieses Verfahren auch hier angewandt werden. Man erhält zunächst:

$$\frac{df}{f} = \frac{d(\ell_2 - \ell_1)}{\ell_2 - \ell_1} + \frac{d(\ell_3 - \ell_2)}{\ell_3 - \ell_2} - \frac{d(\ell_3 - \ell_1)}{\ell_3 - \ell_1}.$$

An dieser Stelle dürfen noch keine Betragsstriche gesetzt werden. Es muss **unbedingt** zuvor nach den Differentialen der unmittelbar gemessenen Größen geordnet werden. Es ist dabei zu beachten, dass z. B.  $d(\ell_2 - \ell_1) = d\ell_2 - d\ell_1$  gilt.

$$\frac{df}{f} = \left( \frac{1}{\ell_2 - \ell_1} + \frac{1}{(\ell_3 - \ell_1)} \right) d\ell_1 + \left( \frac{1}{\ell_2 - \ell_1} - \frac{1}{(\ell_3 - \ell_2)} \right) d\ell_2 + \left( \frac{1}{\ell_3 - \ell_2} + \frac{1}{(\ell_3 - \ell_1)} \right) d\ell_3.$$

Ersetzt man nun in diesem Falle ebenfalls die Differentiale durch die Messfehler, führt wieder  $a, a'$  und  $f$  ein und summiert die Beträge der Summanden, so erhält man folgendes Endresultat für den relativen Fehler:

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f}{a^2} \Delta \ell_1 \right| + \left| \frac{a-a'}{aa'} \Delta \ell_2 \right| + \left| \frac{f}{a'^2} \Delta \ell_3 \right|.$$

## 6. Fehlerkennzeichnung in grafischen Darstellungen

Eine grafische Darstellung dient zur Veranschaulichung des funktionellen Zusammenhangs zweier Größen und zur quantitativen Auswertung einer Messreihe.

Bei der Anfertigung einer grafischen Darstellung sind zunächst folgende Punkte zu beachten:

- Wahl der Koordinatenmaßstäbe und -nullpunkte nach Möglichkeit so, dass der ganze auf dem Blatt zur Verfügung stehende Achsenbereich ausgenutzt wird und ein bequemer Umrechnungsfaktor verwendet werden kann.
- Korrekte Beschriftung der Achsen (Abb. 5).
- Sorgfältiges Eintragen der Messpunkte (kleine Kreuze) und Zeichnen einer Kurve unter Berücksichtigung eventuell zu erwartender funktioneller Zusammenhänge (Gerade, Parabel, usw.).
- Die Darstellung sollte mindestens das Format DIN A5 haben.

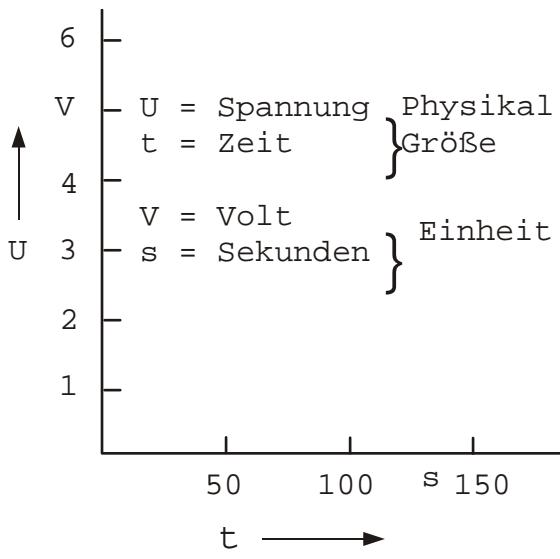
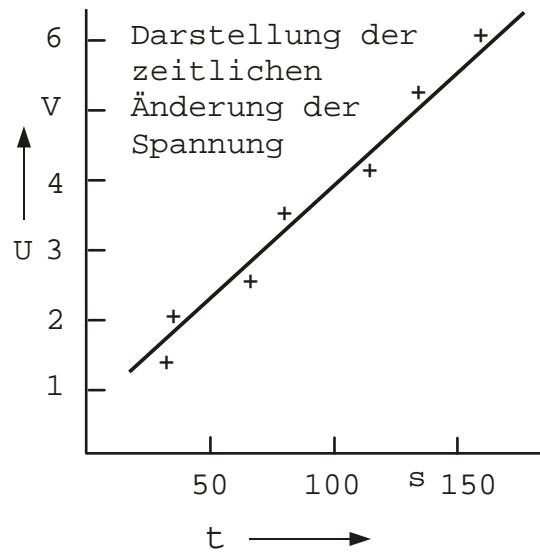


Abb. 5 : Beschriftung der Achse (a)



Zeichnen der Geraden (b)

Häufig besteht die Aufgabe, Messergebnisse in Kurvenform darzustellen, z. B.  $U-T$ -Kennlinie eines Bauelementes. Man geht hier so vor, dass die Werte  $(T_K, U_K)$  in ein Diagramm grafisch dargestellt werden. Die zugehörigen Messunsicherheiten  $\Delta T_K$  und  $\Delta U_K$  sind entsprechend dem angegebenen Verfahren zu ermitteln und an den zugehörigen Messpunkten beidseitig abzutragen (Fehlerbalken). Die dadurch festgelegte Fläche bestimmt die Größe der Fehlerfläche eines einzelnen Messpunktes (Abb. 6).

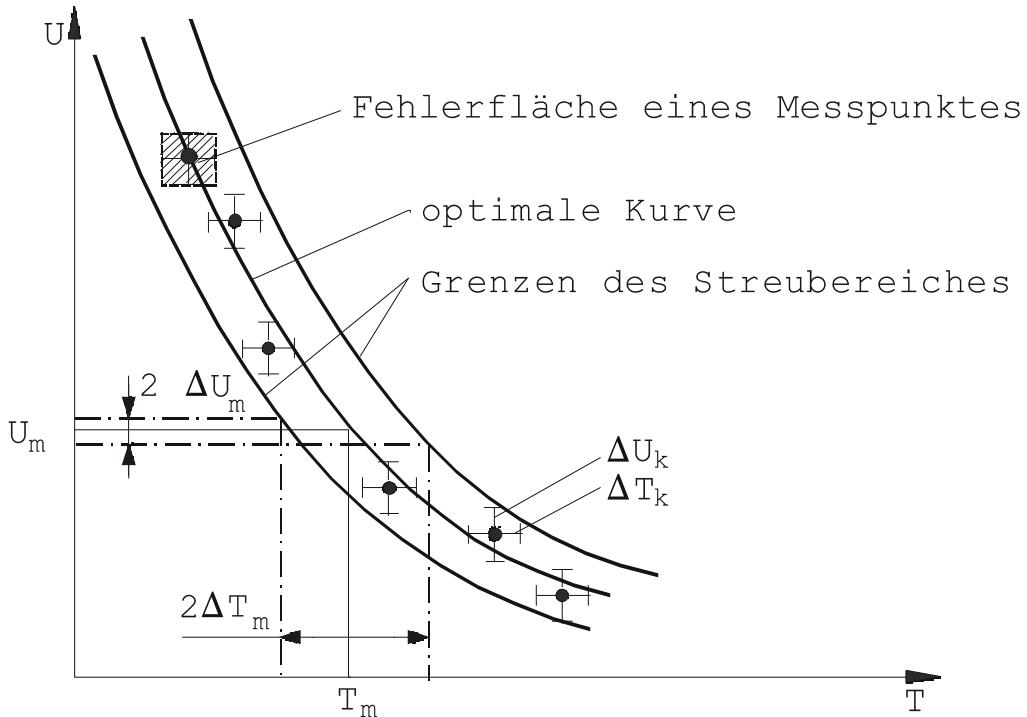


Abb.6: Fehlerkennzeichnung in einer grafischen Darstellung

Aus den durch die Fehlerflächen begrenzenden einhüllenden Kurven beiderseits der Messkurve erhält man die Grenzen des Streubereiches für die Messkurve. Der so erhaltene Kurvenverlauf  $U = U(T)$  kann auch eine Kalibrierungskurve eines Messgerätes (z. B. Anzeige der Temperatur eines Thermoelementes) darstellen. Benutzt man dann ein so kalibriertes Messgerät, so erhält man aus dem abgelesenen Wert  $U_m$  den gesuchten, zugehörigen Wert  $T_m$ . Der Größtfehler der Größe  $\Delta T_m$  ergibt sich, indem man die Messunsicherheit  $\Delta U_m$  an der Stelle  $U_m$  abträgt und die so gefundenen Werte  $U_m \pm \Delta U_m$  derart an den beiden Begrenzungskurven des Streubereiches spiegelt, dass sich ein maximaler Wert für  $\Delta T_m$  ergibt.

## 7. Geradenanpassung oder lineare Regression

In der Regel sind  $n$  Paare von Messpunkten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  gegeben, z. B. bei der Aufnahme der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes eines Metalls. Innerhalb eines weiten Temperaturbereiches besteht hier ein linearer Zusammenhang zwischen  $R$  und  $T$ . Stellt man die Messpunkte grafisch dar, dann zeigt sich eine mehr oder weniger große Streuung um eine optimale Gerade. Die Ermittlung der optimalen Geraden  $y = a_{opt} \cdot x + b_{opt}$  kann grafisch oder rechnerisch erfolgen.

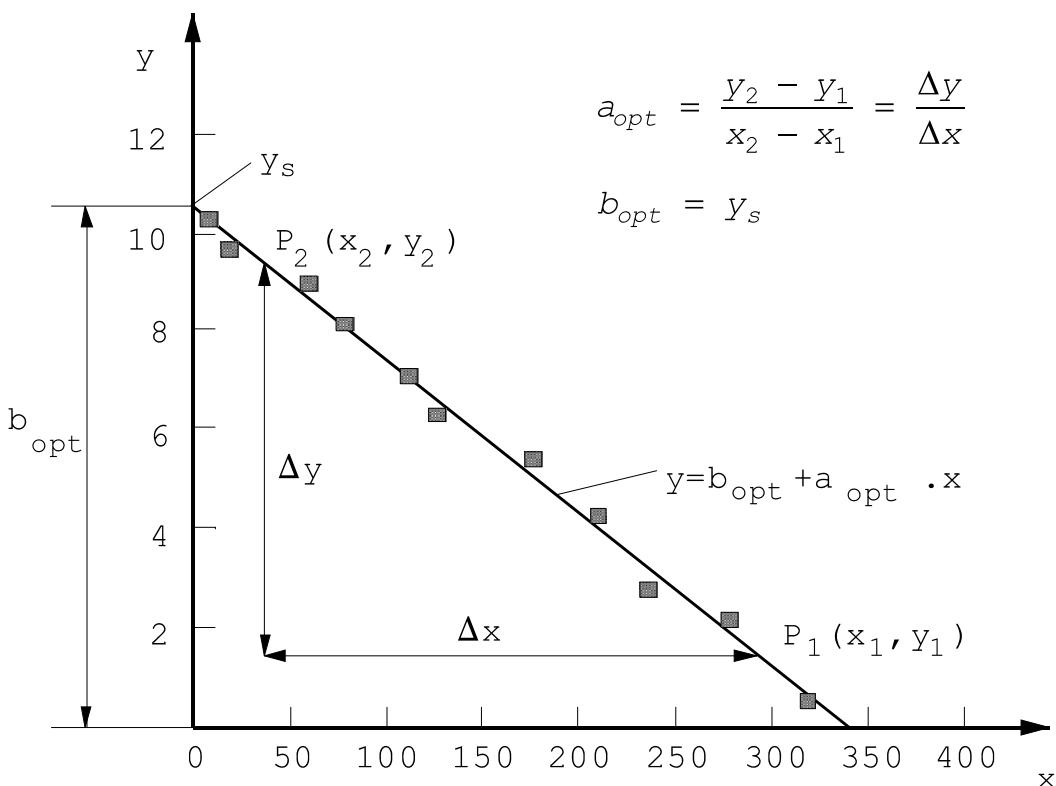


Abb. 7 : Grafische Anpassung einer Geraden

Man stellt die Messpunkte  $P_i(x_i, y_i)$  zunächst in einem geeigneten Koordinatensystem dar (Abb. 7), und zeichnet, z. B. mit Hilfe eines durchsichtigen Lineals, die Gerade ein, die die Messpunkte optimal wiedergibt. Den Maßstab der Ordinaten- und Abszissenachse wählt man nach Möglichkeit dabei so, dass die Gerade etwa unter einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  die Abszisse schneidet. Der Ordinatenwert  $y_s$  des Schnittpunktes der optimalen Geraden mit der Ordinatenachse ergeben  $b_{\text{opt}}$ . Der Anstieg der optimalen Geraden ergibt sich aus dem Anstiegsdreieck zweier geeigneter Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$ . Um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, sollten die Strecken  $|y_2 - y_1|$  und  $|x_2 - x_1|$  möglichst groß gewählt werden.

Aus der Theorie bekannte charakteristische Punkte, wie

- der „Mittelpunkt“  $P_m(\bar{x}, \bar{y})$  der Messpunkte liegt auf der optimalen Geraden,
  - der Durchgang durch den Koordinatensprung
- können zur Bestimmung der optimalen Geraden verwendet werden.

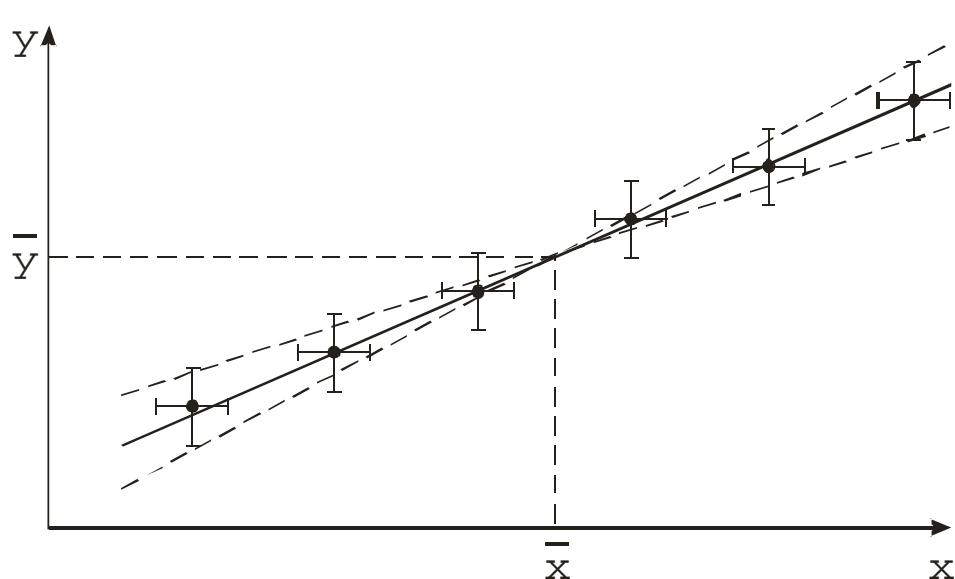


Abb. 8: Fehlerermittlung bei der grafischen Anpassung einer Geraden

Für eine Abschätzung der Fehler für den Anstieg und den Achsenabschnitt der optimalen Geraden zeichnet man zwei weitere Geraden in die Darstellung ein. Für die eine Gerade verbindet man den Punkt der Fehleruntergrenze (d. h. des Fehlerbalkens) des kleinsten Messwertes mit dem Punkt der Fehlerobergrenze des größten Messwertes, für die andere Gerade den Punkt der Fehlerobergrenze des kleinsten Messwertes mit dem Punkt der Fehleruntergrenze des größten Messwertes. Aus den

berechneten Werten  $a_{\max}$  bzw.  $a_{\min}$  und  $b_{\max}$  bzw.  $b_{\min}$  für diese beiden Geraden erhält man dann einen Anhaltspunkt über den Fehler der Koeffizienten  $a_{\text{opt}}$  und  $b_{\text{opt}}$ .

Das grafische Ausgleichsverfahren kann auch auf andere funktionelle Zusammenhänge zwischen  $y$  und  $x$  angewendet werden, wenn durch eine geeignete Transformation (z. B. Logarithmieren) ein linearer Zusammenhang zwischen  $y$  und  $x$  erzeugt werden kann. Es ist dabei zu beachten, dass damit auch eine Transformation der Koordinatenachsen verbunden ist.

## 7.2 rechnerische Methode

Die analytische Methode bestimmt die am besten angepasste Ausgleichsgerade, indem die quadratische Summe aller  $y$ -Abweichungen minimiert wird (Gauß'sche Methode der kleinsten Fehlerquadrate). Es wird dabei vorausgesetzt, dass die  $x_i$ -Werte fehlerfrei sind. Man erhält folgende Bestimmungsgleichungen für  $a_{\text{opt}}$  und  $b_{\text{opt}}$ :

$$b_{\text{opt}} : \quad b_{\text{opt}} = \frac{\sum Y_i - a_{\text{opt}} \sum x_i}{n} = \bar{y} - a \bar{x} \quad a_{\text{opt}} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Auch hier gilt, dass die Ausgleichsgerade durch den „Mittelpunkt“  $P_m(\bar{x}, \bar{y})$  geht. Die zugehörigen Standardabweichungen können mit Hilfe folgender Gleichungen berechnet werden:

$$s_b^2 = \frac{\sum x_i^2 - \sum (y_i - b_{\text{opt}} - a_{\text{opt}} x_i)^2}{n(n-1) \left( n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right)} \quad s_a^2 = \frac{\sum (y_i - b_{\text{opt}} - x_i)^2}{(n-1) \left( n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right)}$$