

Simulation der Kraftübertragung in Pressverbindungen mittels FEM und einem verschiebungsabhängigen Reibkraftansatz

Simulation of the power transmission in press fits with FEM in connection to a displacement depending friction force

Dipl.-Ing. **C. Meißner**, Technische Universität Chemnitz;
Prof. Dr.-Ing. **P. Tenberge**, Technische Universität Chemnitz

Kurzfassung

Pressverbindungen weisen eine enorme Kraftdichte auf und werden deshalb im Maschinenbau häufig als Welle-Nabe-Verbindung eingesetzt. Vor allem ihr Kostenvorteil gegenüber formschlüssigen Verbindungen macht sie attraktiv.

Bei der Auslegung von Pressverbindungen gehen die bisherigen Methoden von konstanten Reibwerten in der Pressfuge aus und berücksichtigen nicht die Entstehung von Gleitzonen bei dynamischen Belastungen und die damit verbundenen Effekte. Pressverbindungen versagen aber häufig bei dynamischen Belastungen durch Reibdauerbruch aufgrund von Tribokorrosion in Gleitzonen.

Die Methode der Finiten Elemente in Verbindung mit konventionellen Kontaktalgorithmen ermöglicht eine Berechnung der örtlichen Schubspannungen in der Pressverbindung. Jedoch müssen deren Materialparameter in vielen Fällen für die konkrete Geometrie erst aus aufwändigen Versuchen bestimmt werden. Zudem gibt es derzeit zum Teil noch große Abweichungen zwischen Experimenten und nicht kalibrierten FE-Berechnungen, z.B. hinsichtlich der Gleitzonenlängen.

Mit dem im Folgenden vorgestellten Berechnungsmodell auf Basis einer verschiebungsabhängigen Reibkraft in einem schubelastischen Verband können viele aus Versuchen bekannte Effekte rechnerisch beschrieben werden. Dazu gehören u. a. die Berechnung der Schlupfwege, der Schlupftiefen (Gleitzonenlängen), der Hystereseschleifen und der Erhöhung der Übertragungsfähigkeit mit zunehmender Lastwechselzahl. Frühere Versuchsergebnisse untermauern bereits die bisherigen qualitativen Aussagen.

Weiterhin ist es möglich, die Reibkraftfunktion für konkrete Werkstoffpaarungen aus Experimenten zu ermitteln und diese auf den Einfluss bestimmter Parameter hin zu untersuchen. Auf diese Weise wird die Grundlage für die Optimierung von Pressverbindungen hinsichtlich der Übertragungsfähigkeit und der Lebensdauer gelegt.

Abstract

Press fits can easily cause sliding zones with fretting corrosion if they are under dynamic load. Hidden cracks can arise and may result to failed components. This effect does not appear if the load is below a slipless torque limit. Furthermore the sliding way should be less than a specific value. For dimensioning of these mechanical components therefore it is necessary to estimate whether fretting corrosion may appear.

The results of known analytical or numerical calculation methods are often not close enough to experimental results. This paper shows the usage of a new method to calculate the power transmission in press fits and the size of the sliding zones based on previous publications. This calculation method regards elastic part deformation, different constraints, micro slip, non-linear friction functions, friction variation depending on the sliding ways etc.

Furthermore this paper shows in an example how close the calculation results are to the experimental results.

1 Einleitung

Pressverbindungen werden als kostengünstige Welle-Nabe-Verbindungen in vielen Bereichen des Maschinenbaus eingesetzt. Ihre einfache Herstellung, Montage, enorme Kraftdichte und Zuverlässigkeit haben diesem Maschinenelement zum Markterfolg verholfen. Vor allem bei wechselnder Belastung sind kraftschlüssige Verbindungen gegenüber formschlüssigen vorteilhaft, neigen aber bei großen Belastungsamplituden zu Mikroschlupfbewegungen. Überschreiten diese einen zulässigen Wert, kommt es mit zunehmender Lastwechselzahl zur Ausbildung von Gleitzonen an den Rändern der Pressfuge. Hier kann dann verstärkt Tribokorrosion auftreten. Dabei besteht die Gefahr einer von außen nicht sichtbaren Rissentstehung, die auch noch nach sehr hohen Lastwechselzahlen bis zum Reibdauerbruch und somit zum Bauteilversagen fortschreiten kann.

Zur Vermeidung von Gleitzonen leitete HÄUSLER aus umfangreichen numerischen und experimentellen Untersuchungen Gestaltungsregeln für Welle und Nabe ab, welche z. T. in der für die Auslegung von Pressverbindungen gültigen Norm DIN 7190 angeführt sind [4].

Auch GROPP erforschte das Übertragungsverhalten von Pressverbänden sehr tiefgründig durch eine enorme Anzahl von Versuchen [1]. Dabei zeigte er u. a. gestalterische und werkstofftechnische Möglichkeiten zur Reduzierung der Tribokorrosionsneigung auf. So verringerte er z.B. durch Oberflächenbeschichtungen in zahlreichen Versuchen die Auswirkungen des Mikroschlupfes. Ziel seiner Forschungsarbeiten war die Verhinderung der negativen Auswirkungen des örtlichen Gleitens durch Beschichtungen sowie die

Verhinderung des örtlichen Gleitens selbst durch eine besondere Gestaltung der Kontaktpartner.

Auf theoretischem Gebiet leitete MÜLLER bereits 1961 Gleichungen zur Beschreibung des Spannungszustandes in Welle und Nabe unter der Aufteilung der Pressfuge in einen schlupfenden und einen nicht schlupfenden Teil her [5]. LEIDICH untersuchte dieses Phänomen in seiner Dissertation auf Basis von zahlreichen FE-Rechnungen [6].

Bei den heute üblichen Berechnungs- und Auslegungsvorschriften wird fast immer von einem sowohl über der Fugenlänge als auch über der Zeit konstanten Reibwert ausgegangen. Vor allem die Ausbildung von Gleitzonen und die von GROPP untersuchte Erhöhung des Rutschmomentes bei dynamischer Belastung oberhalb des schlupflosen Grenzmomentes können aber mit den bisherigen Methoden nicht genau genug bzw. gar nicht rechnerisch beschrieben werden.

Ein neuer Berechnungsansatz für die Kraftübertragung in statisch und dynamisch belasteten Pressverbindungen soll helfen, die Entstehung von Gleitzonen besser zu beschreiben.

2 Abgrenzung zu anderen Arbeiten

Bei der Entwicklung von FE-Software wird häufig auf eine hohe Rechengeschwindigkeit und eine möglichst breite Anwendung in der Industrie Wert gelegt. So existieren derzeit für viele kommerzielle FE-Solver eine Reihe von Kontaktelementen, welche trotz der starken Nichtlinearität des Gesamtsystems und der komplexen dreidimensionalen Bauteilgeometrien zu akzeptablen Rechenzeiten führen. Für viele Anwendungen ist die Modellierung mit diesen Kontaktelementen auch ausreichend. Deshalb ist die zum Teil sehr aufwändige Umsetzung komplexerer Kontaktmodelle in die allgemeine Formulierung der FEM für viele Softwareproduzenten unwirtschaftlich. Stattdessen werden für konkrete Fälle anwendungsspezifische Programme entwickelt und eingesetzt. So zum Beispiel zur besseren Beschreibung des Reibverhaltens von Hydraulikzylindern, um die Positioniergenauigkeit zu erhöhen [9] oder zur gezielten Beeinflussung des Dämpfungsverhaltens von Bolzengelenken durch Mikroschlupf [10].

Da aber gerade Pressverbindungen verstärkt im Maschinenbau eingesetzt werden, ist es das Ziel dieser Untersuchungen, ein geeignetes Kontaktmodell für den Einsatz in FE-Programmen zu entwickeln. Dabei ist zwischen einer sehr schnellen Berechnung und einer hohen Ergebnisgüte ein guter Kompromiss zu finden. Zudem weisen einige für Pressverbindungen typische Schmierstoffe besondere Effekte auf, die durch das Reibmodell ebenfalls abgebildet werden sollen.

Die zahlreichen Arbeiten auf dem Gebiet der Pressverbindungen, die sich mit der analytischen Beschreibung der Bauteildeformation befassen, beziehen sich meist nur auf den Sonderfall einer am Außenumfang fixierten Nabe [5, 6]. Für Einsatzgebiete wie z.B. Getriebewellen mit aufgeschrumpften Zahnrädern mit einem kleinen Durchmesser Verhältnis Q_A liegt eine gute Übereinstimmung der Rechenergebnisse mit Versuchsergebnissen vor. Wie u.a. aus der Arbeit von LEIDICH jedoch hervorgeht, führt eine Drehmomentdurchleitung bei dünnwandigen Naben zu einem größeren Gütefaktor der Pressverbindung, sodass diese weniger zur Ausbildung von Gleitzonen neigt.

Der Inhalt dieser Arbeit fokussiert sich daher auf eine von der Kräfteinleitung unabhängige Modellierung der Pressverbindungen. Die mit diesem Modell ermittelten Parameter zur Beschreibung der Kontakteigenschaften sollen dann in einem weiten Bereich gültig sein.

3 Versuchsaufbau

Da viele der für das Reibmodell erforderlichen Parameter bereits bei symmetrischen Lasten wie Torsion oder Axialkraft bestimmt werden können, erfolgt der Abgleich des Modells vorerst mit Versuchsergebnissen bei reiner Torsionsbelastung. Als wesentlicher Vergleich zwischen Simulation und Messung wird die Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie der Pressverbindung verwendet, wobei eine quasistatische Torsionsbelastung mit einem Drehmomentgradienten von weniger als 500 Nm/s erfolgt. Untersuchungen im Vorfeld haben gezeigt, dass Änderungen der Belastungsfrequenz bei einem Arbeitspunkt im Bereich von $0,1 < f < 1$ Hz nur einen sehr geringen Einfluss auf das Messergebnis darstellen.

Das Drehmoment wird über eine DMS-Vollbrücke direkt am Prüfstand gemessen, während der induktive Wegaufnehmer die Relativlage zweier Messhebel erfasst, welche auf der Welle und auf der Nabe angebracht sind (Bild 1).

Zur besseren Vergleichbarkeit mit früheren Experimenten von Prof. Gropp wird eine identische Geometrie der Pressverbindung verwendet (Bild 2).

Für eine Torsionsbelastung bis zum Lösen zeigt Bild 3 eine typische Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie. Da die dafür verwendete Längspressverbindung mit MoS_2 gefügt wurde, sind die Reibwerte für Haften und Gleiten nahezu identisch. Dieser Schmierstoff weist bei der konkreten Anwendung noch das Phänomen der Reibwerterhöhung auf, sofern die Pressverbindung oberhalb des schlupflosen Grenzmomentes dynamisch belastet wird. Diese Reibwerterhöhung ist bei dem verwendeten Schmierstoff nur deshalb praktisch sinnvoll, weil gleichzeitig keine Zerstörung der Bauteile durch Tribokorrosion auftritt.

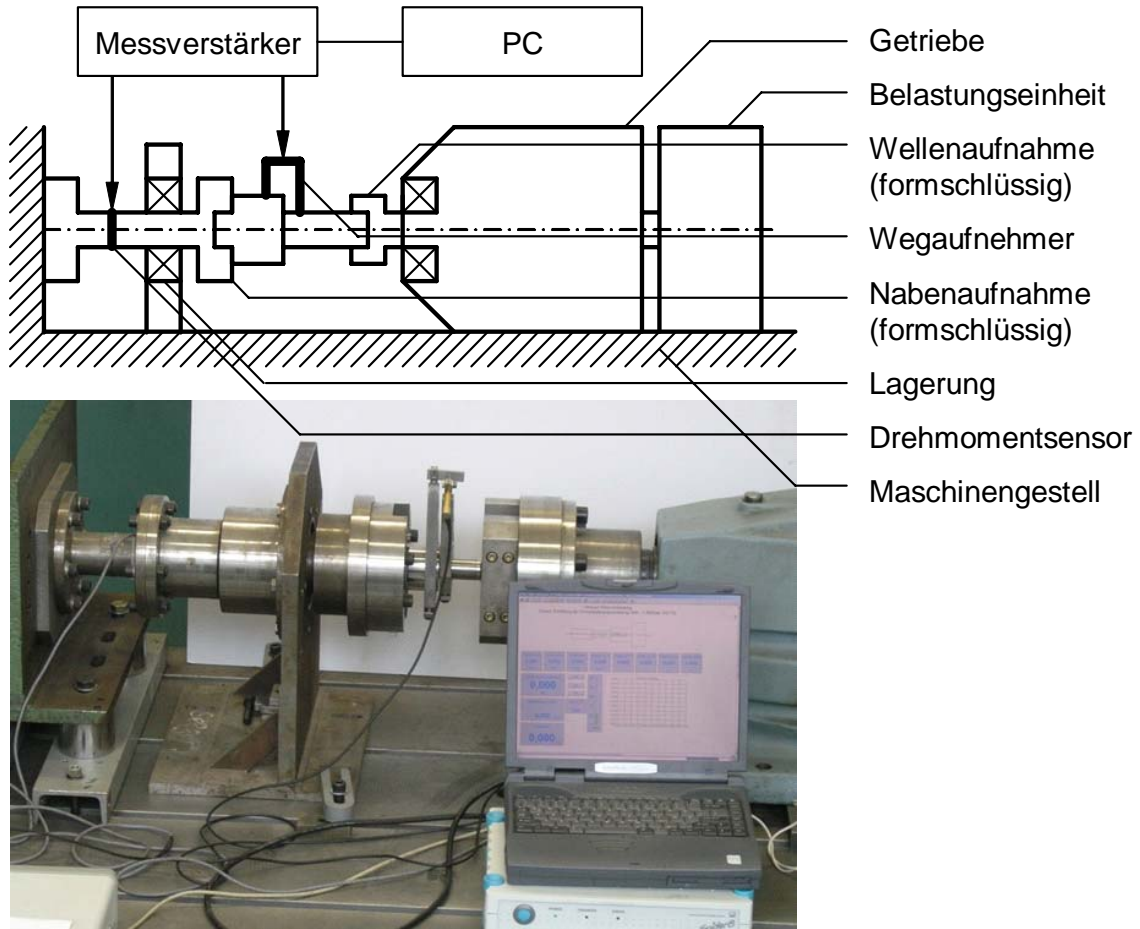


Bild 1: Struktur und Aufbau des Torsionsprüfstandes

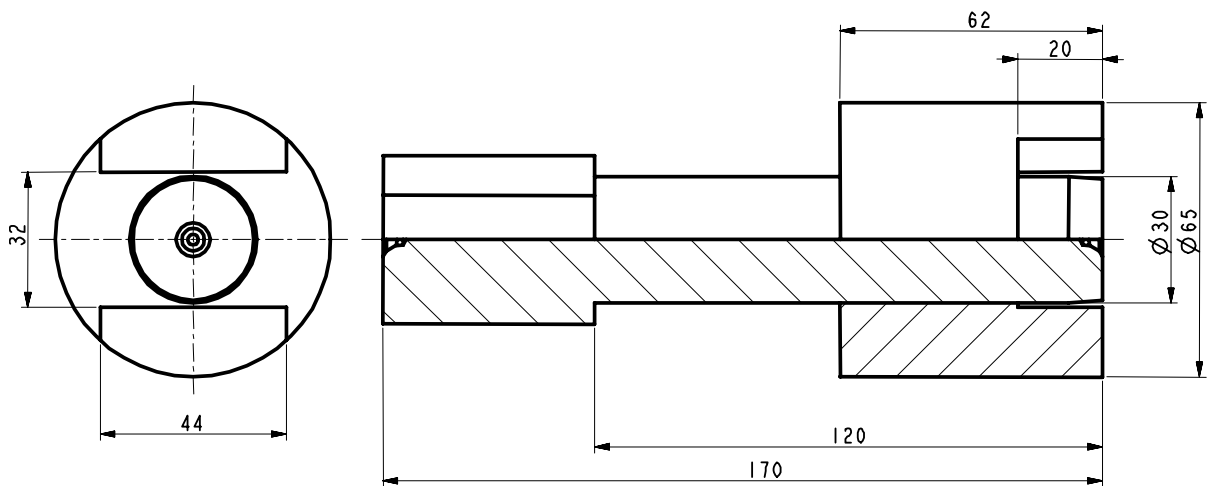


Bild 2: Geometrie der für die Versuche verwendeten Pressverbindung

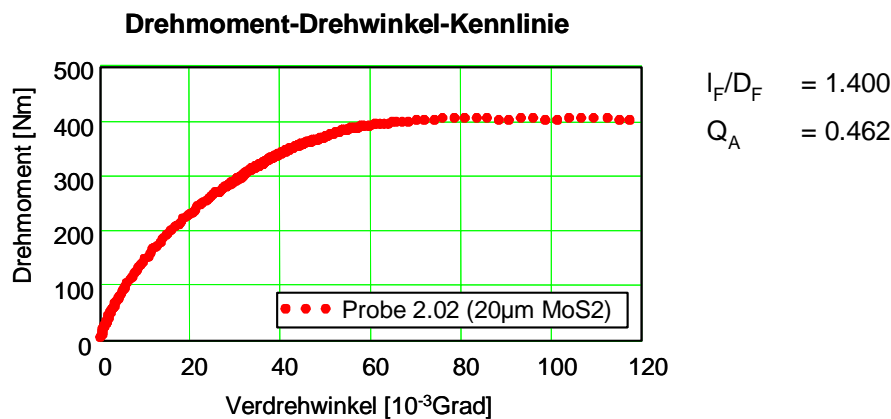


Bild 3: Experimentell ermittelte Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie

4 Kontaktalgorithmen der FEM

Zur Berechnung des Übertragungsverhaltens von Pressverbindungen mit komplexen Bauteilgeometrien werden häufig kommerzielle FE-Programme verwendet. Dabei kommen verschiedene Berechnungsmethoden zum Einsatz, z.B. die Lagrange-Methode oder die Penalty-Methode.

4.1 Pure Lagrange Multiplier Method (PLM)

Als Randbedingung einer FE-Berechnung der räumlichen mechanischen Spannungen kann für jeden Knoten in jede Raumrichtung entweder eine Vorgabe der Verschiebung oder der Kraft erfolgen. Bei einem geschlossenen Kontaktspace fordern zwei im direkten Kontakt stehende Knoten identische Koordinaten in Kontaktnormalenrichtung. Ein evtl. vorhandenes Übermaß der Kontaktpartner erweitert diese Verschiebungsrandbedingung. Da ein Kontakt in Normalenrichtung nur Druckkräfte übertragen kann, ändert sich der Kontaktstatus von „geschlossen“ auf „offen“ sobald die Normalkraft in einem Rechenschritt negativ wird. Dann erhalten beiden Knoten eine Krafterandbedingung in Normalenrichtung mit $F=0N$ (Bild 4).

Die so berechneten örtlichen Kontaktnormalkräfte werden nun zur Ermittlung der Tangentialkräfte aufgrund von Reibung verwendet. Der Kontaktstatus kann dabei einen der beiden Zustände „haften“ oder „gleiten“ annehmen. Im Fall des Haftens wird auch in tangentialer Richtung eine Verschiebungsrandbedingung gesetzt. Falls die dafür erforderliche Reibkraft betragsmäßig den durch Reibwert und Normalkraft definierten Grenzwert überschreitet, ändert sich der Kontaktstatus von „haften“ auf „gleiten“. In diesem Fall wird die Verschiebungsrandbedingung durch eine Krafterandbedingung ersetzt. Die Größe und Richtung dieser Kraft hängt dann von der örtlichen Normalkraft, dem Reibwert

und der Bewegungsrichtung ab. Diese reine Lagrange-Methode verwendete bereits HÄUSLER zur Beschreibung der Biegemomentübertragung in Pressverbindungen [4].

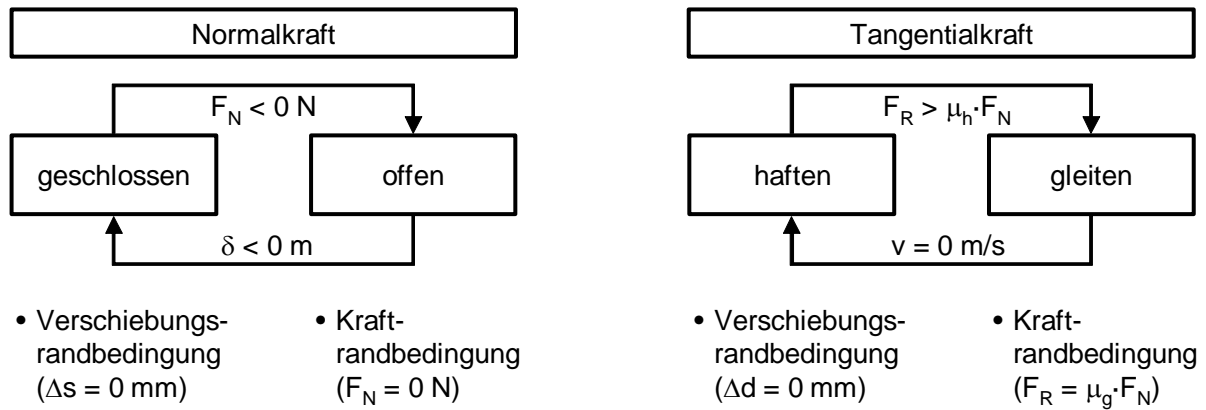


Bild 4: Lagrange Methothe zur Berechnung von Normal- und Tangentialkraft in einem Knoten-Knoten-Kontakt

Aufgrund des diskreten Übergangs von Haften zu Gleiten werden Berechnungen nach der reinen Lagrange-Methode vor allem bei großen Modellen und großen Verformungen schnell instabil. Zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit entwickeln die Softwarehersteller ihre Kontaktalgorithmen ständig weiter.

4.2 Pure Penalty Method (PP)

Bei der Penalty-Methode werden sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung künstliche Kontaktsteifigkeiten in einem sog. Gap-Element eingeführt (Bild 5). Eine gegenseitige Durchdringung der Kontaktpartner führt dann zu einer Reaktionskraft, die sich in der Normalkraft (Kontaktpressung) und in der Reibkraft (Tangentialspannung) äußert.

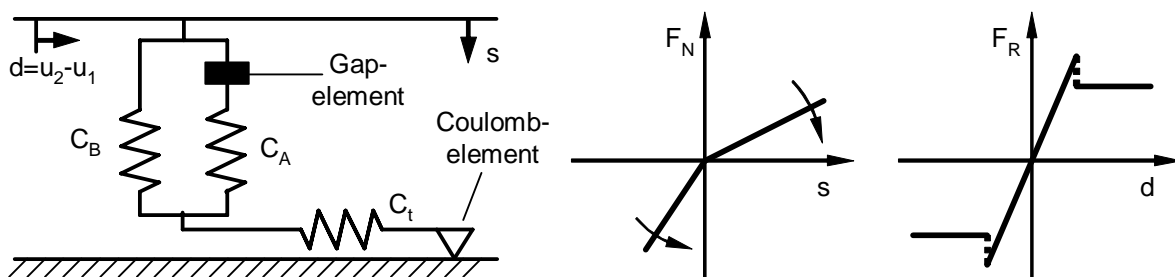


Bild 5: Struktur eines Gap-Elementes [10] und dessen Charakteristik in Normal- und Tangentialrichtung [7]

Aufgrund der diskreten Reibzustände und der schrittweisen Ermittlung der Steifigkeiten erfolgt die Lösung des Gleichungssystems ebenfalls iterativ, neigt jedoch wegen der künstlichen Steifigkeiten nicht so stark zur Instabilität.

Bild 6 zeigt die berechneten Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinien nach dem Lagrange- und dem Penalty-Prinzip. Dabei wurden die für die Kontaktdefinition erforderlichen Parameter für den Anwendungsbereich von $0 \dots 60 \cdot 10^{-3}$ Grad nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme optimiert. Diese optimierten Parameter führen jedoch zu einem viel höheren Lösemoment im Vergleich zu dem experimentellen Ergebnis, dort lag der Reibwert für Haften und Gleiten bei etwa $\mu_g = \mu_h = 0,117$. Wird dieser Reibwert auf beide Berechnungsmethoden angewandt, ergibt sich jedoch eine wesentlich größere Fehlerquadratsumme. Das ist ein Indiz dafür, dass das hier angewendete Reibwertmodell für die Beschreibung der Kraftübertragung in Pressverbindungen nicht ausreichend ist.

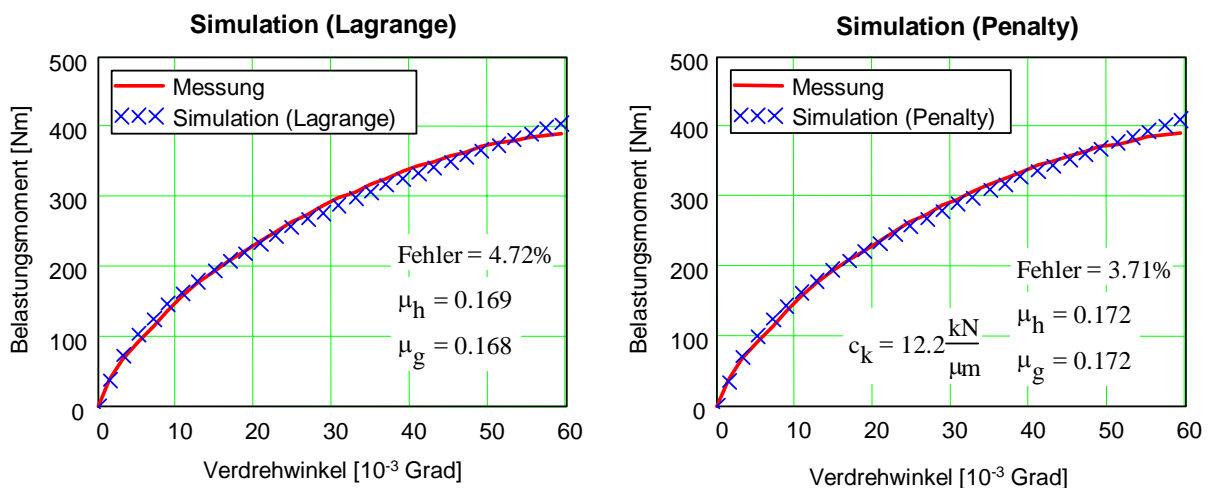


Bild 6: Nach zwei verschiedenen Methoden ermittelte Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinien einer Zylinderpressverbindung im Vergleich zur experimentell bestimmten Kurve

Unabhängig von der Wahl des Kontaktalgorithmus ist bei linearem Materialverhalten die nichtlineare Verformungscharakteristik des Gesamtsystems nur durch den Kontakt begründet. Dadurch besteht die Möglichkeit, das Gesamtsystem zur Erhöhung der Rechenzeit auf den Kontaktbereich zu reduzieren (s. Abschnitt „Der Ansatz des Schubelastischen Verbandes“). Einige Softwarehersteller bezeichnen dieses reduzierte System als Flexibilitätsmatrix [7].

Darüber hinaus werden kombinierte Rechenalgorithmen eingesetzt, bei denen z.B. die Kontaktnormalkraft mit der Lagrange-Methode und die Reibkraft mit der Penalty-Methode ermittelt wird. Aber auch unterschiedliche Methoden innerhalb einer Iterationsschleife werden in einigen FE-Programmen angewendet (z.B. Augmented Lagrange Method) [8].

4.3 Teilanalytische Lösung zum Vergleich

Die Gesamtverdrehung, welche durch den Wegaufnehmer erfasst wird, setzt sich aus drei Einzelverdrehungen zusammen: die Verdrehung aufgrund der Schlupfbewegung, der Elastizität der Welle und der Elastizität der Nabe. Nach Bild 7 kann die Gesamtverdrehung $\Delta\varphi$ dann bestimmt werden aus:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_S + \Delta\varphi_W + \Delta\varphi_N \quad (1)$$

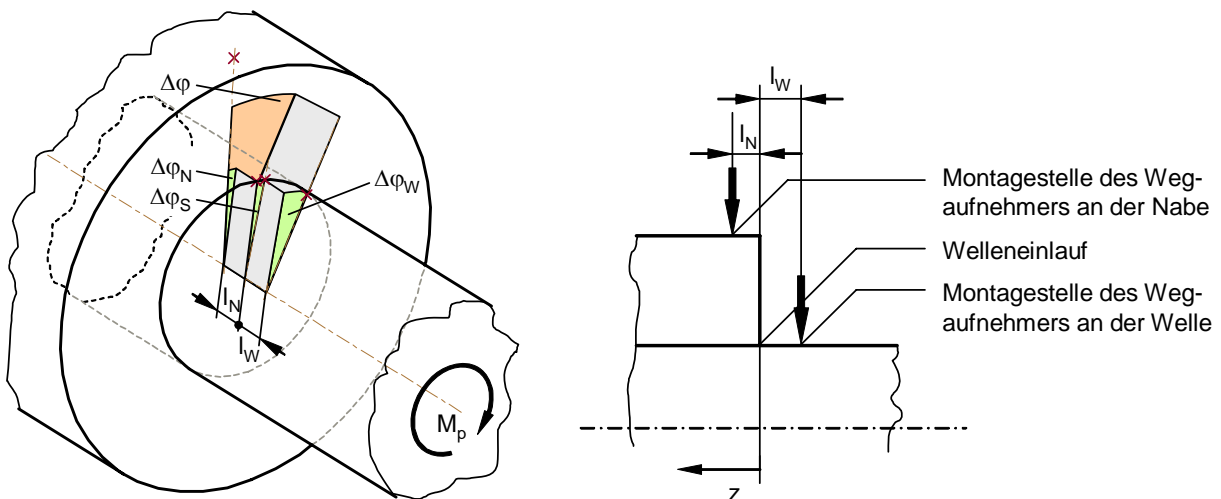


Bild 7: Zerlegung der Gesamtverdrehung am Wegsensor in Einzelverdrehungen

Der Schlupfweg am Welleneinlauf ergibt sich nach LEIDICH [6] aus:

$$s_{0*} = \left(\left(\frac{M_p}{M_r} \right)^2 - \eta_{gr,t}^{*2} \right)^\kappa \cdot a^* \cdot M_r \cdot D_F \quad \text{mit} \quad \kappa = 1.1 \quad (2)$$

$$a^* = \frac{8}{G_W \cdot \pi \cdot D_F^3} \cdot \frac{l_F}{D_F} \quad \text{und} \quad \eta_{gr,t}^* \approx \eta_{gr,tM} = \frac{M_h}{M_r} \quad (M_h \text{ siehe Gleichung 9}) \quad (3)$$

Damit erhält man für die Verdrehung aufgrund des Schlupfes:

$$\Delta\varphi_S = \frac{2 \cdot s_{0*}}{D_F} \quad (4)$$

Die elastische Verdrehung des freien Wellenstücks der Länge l_w zwischen der Nabenkante und dem Wegaufnehmer lässt sich mit den Gleichungen der Mechanik nicht hinreichend genau beschreiben. Der Grund dafür ist, dass keine Torsionsschubspannung an der Stirnfläche, sondern eine Schubspannung an der Mantelfläche der als Zylinder dargestellten Welle im Kontakt eingeleitet wird (Bild 8). Aufgrund des geringen Abstandes zwischen dem Welleneinlauf und der Montagestelle des Wegaufnehmers im Vergleich zum Wellendurchmesser ergibt sich im Vergleich zur rein analytischen Lösung unter Torsionsbelastung bei dieser Geometrie ein für dieses Modell nicht zumutbarer Fehler.

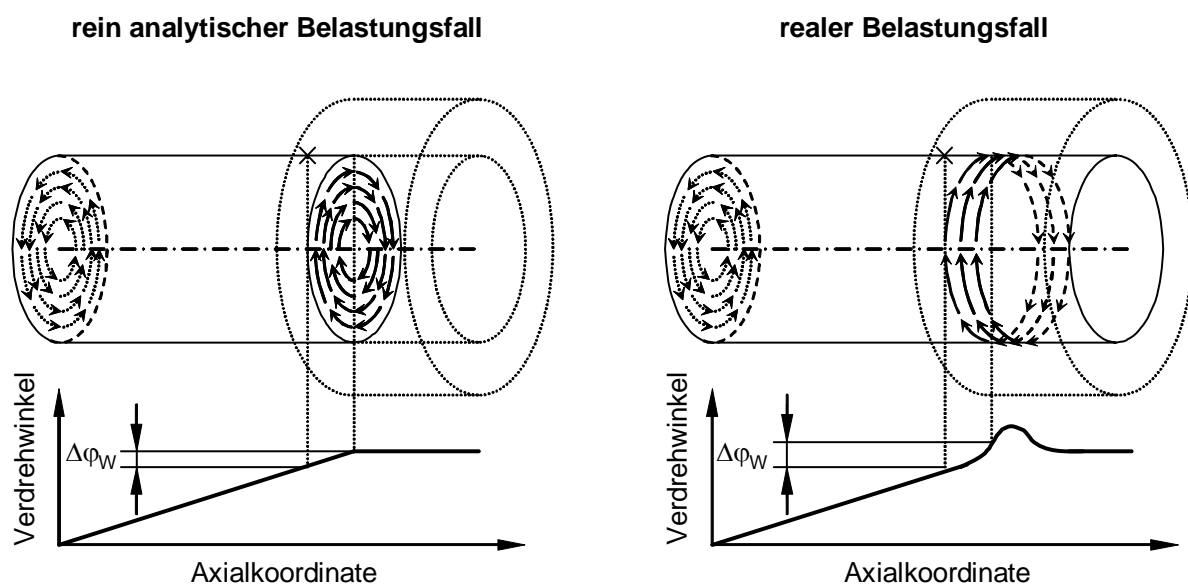


Bild 8: Unterschiede bei der rein analytischen und bei der nahezu realen Berechnung der Bauteilverformung unter Belastung am Beispiel der Welle

Stattdessen wird eine auf FE-Basis ermittelte Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{EM}_{RW} verwendet, mit welcher bei bekanntem Verlauf der Schubspannungen im Kontakt die Verschiebungen ausgewählter Punkte auf der Welle berechnet werden können. Die pro Geometrie nur einmal erforderliche Erzeugung der Nachgiebigkeitsmatrizen wird im Abschnitt „Der schubelastische Verband“ näher beschrieben. Wegen des linearelastischen Materialverhaltens kann die Verschiebung eines ausgewählten Knotens j auf der Welle berechnet werden mit:

$$\delta_{w_j} = (\mathbf{EM}_{RW})^{[j]} \cdot \mathbf{F}_u \quad (5)$$

Dabei stellt \mathbf{F}_u den Vektor der örtlichen Umfangskräfte aufgrund der Diskretisierung des Schubspannungsverlaufs dar. Weiterhin extrahiert der Operator $[j]$ die Zeile j aus der Matrix.

Der Verdrehwinkel der freien Welle kann dann aus der Differenz der Verschiebungen ermittelt werden:

$$\Delta\varphi_W = \frac{2}{D_F} \cdot (\delta_{W_j} - \delta_{W_i}) \quad (6)$$

wobei für i und j die Nummern der Referenzknoten auf der Welle für die Montagestelle des Wegaufnehmers und für den Welleneinlauf einzusetzen sind. Für den Verdrehwinkel der Nabe erfolgt die Berechnung analog, wobei sowohl die Nachgiebigkeitsmatrix als auch die Referenzknotennummern durch die der Nabe ersetzt werden müssen:

$$\Delta\varphi_N = \frac{2}{D_F} \cdot (\delta_{N_j} - \delta_{N_i}) \quad \text{mit} \quad \delta_{N_j} = (\mathbf{EM}_{RN})^{[j]} \cdot \mathbf{F}_u \quad (7)$$

Der in Gleichung 5 und 7 verwendete Vektor der Umfangskräfte kann aus der Verteilung des Restdrehmoments M_z in der Welle berechnet werden, indem die Differenz an den beiden Intervallgrenzen z , welche bei der Diskretisierung zu dem Knoten i führten, ermittelt wird.

$$\mathbf{F}_{u_i} = \frac{2}{D_F} \cdot (M_z(z_i) - M_z(z_{i+1})) \quad (8)$$

Das Restmoment M_z ergibt sich aus den Gleichungen von KOLLMANN für eine torsionsbelastete Pressverbindung [11]. Die dafür zugrunde gelegte und auf MÜLLER zurückgehende Modellvereinfachung der am Außenumfang fixierten lamellierten Nabe wird im Vergleich zu den obigen FE Rechnungen zu einer größeren Abweichung zwischen Berechnung und Messung führen. Das schlupflose Grenzmoment kann KOLLMANN zufolge ermittelt werden aus:

$$M_h = \frac{D_F}{l_F} \cdot \frac{M_r}{k} \cdot \tanh\left(k \cdot \frac{l_F}{D_F}\right) \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{32}{1-Q_A} \cdot \frac{G_N}{G_W}} \quad (9)$$

Für eine Belastung M_p bis zum schlupflosen Grenzmoment M_h lässt sich das Restmoment M_z nach der dort mit 2.106 bezeichneten Gleichung berechnen aus:

$$M_z(z) = M_p \cdot \left(\cosh\left(k \cdot \frac{z}{D_F}\right) - \coth\left(k \cdot \frac{l_F}{D_F}\right) \cdot \sinh\left(k \cdot \frac{z}{D_F}\right) \right) \quad \text{wenn} \quad M_p \leq M_h \quad (10)$$

Bei einer Belastung M_p oberhalb des schlupflosen Grenzmomentes M_h erfolgt eine auf MÜLLER zurückgehende Aufteilung der Nabe in einen schlupfenden und einen haftenden Bereich. Die Länge des Haftbereiches kann nach der dort als 2.113 bezeichneten implizit gegebenen Gleichung ermittelt werden aus:

$$\frac{l_h}{l_F} - \frac{D_F}{l_F \cdot k} \cdot \tanh\left(k \cdot \frac{l_h}{D_F}\right) = 1 - \frac{M_p}{M_r} \quad (11)$$

Für den Fall, dass die Stelle z in dem schlupfenden Bereich der Nabe liegt, ergibt sich entsprechend dem von MÜLLER angegebenen linearen Abfall des Restmomentes M_z aus:

$$M_z(z) = M_r - (M_r - M_h) \cdot \frac{z}{l_F - l_h} \quad \text{wenn } (M_p > M_h) \wedge (z \leq l_F - l_h) \quad (12)$$

Für den Fall, dass z im Haftbereich liegt, kann das Restmoment M_z für die nach MÜLLER genau mit M_h belastete reduzierte Haftzone ermittelt werden aus:

$$M_z(z) = M_h \cdot \left(\cosh\left(k \cdot \frac{z - (l_F - l_h)}{D_F}\right) - \coth\left(k \cdot \frac{l_h}{D_F}\right) \cdot \sinh\left(k \cdot \frac{z - (l_F - l_h)}{D_F}\right) \right) \quad (13)$$

wenn $(M_p > M_h) \wedge (z > l_F - l_h)$

Der aus diesen Gleichungen ermittelte Drehmomentverlauf ist für eine beispielhafte Pressverbindung in Bild 9 dargestellt. Dabei ist auch zu erkennen, dass die auf MÜLLER zurückgehende Modellierung lediglich zu einer Gleitzone führt.

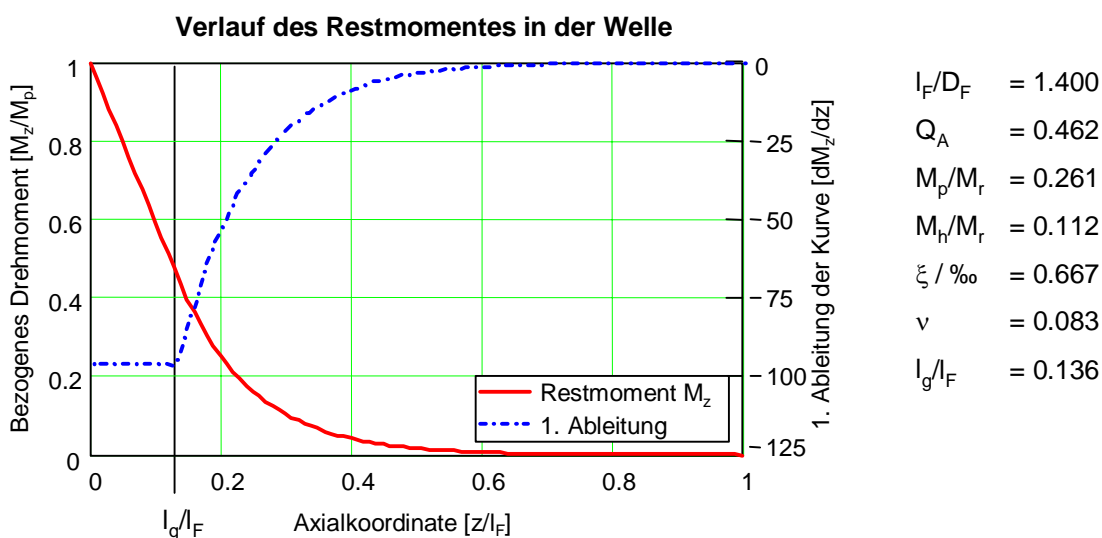


Bild 9: Verlauf des Restmomentes in der Welle über der Axialkoordinate z für eine beispielhafte Pressverbindung mit den angegebenen Parametern

In Bild 10 sind die einzelnen Anteile der Gesamtverdrehung prozentual dargestellt. Dabei fällt auf, dass bei kleinen Belastungsmomenten die Verformung der Nabe nicht vernachlässigbar ist, da ein Großteil des Drehmomentes unmittelbar am Welleneinlauf in die Nabe übertragen wird und damit dort zu verhältnismäßig großen Verformungen führt. Deutlich zu erkennen ist auch der Beginn des Mikroschlupfes beim Überschreiten des schlupflosen Grenzmomentes.

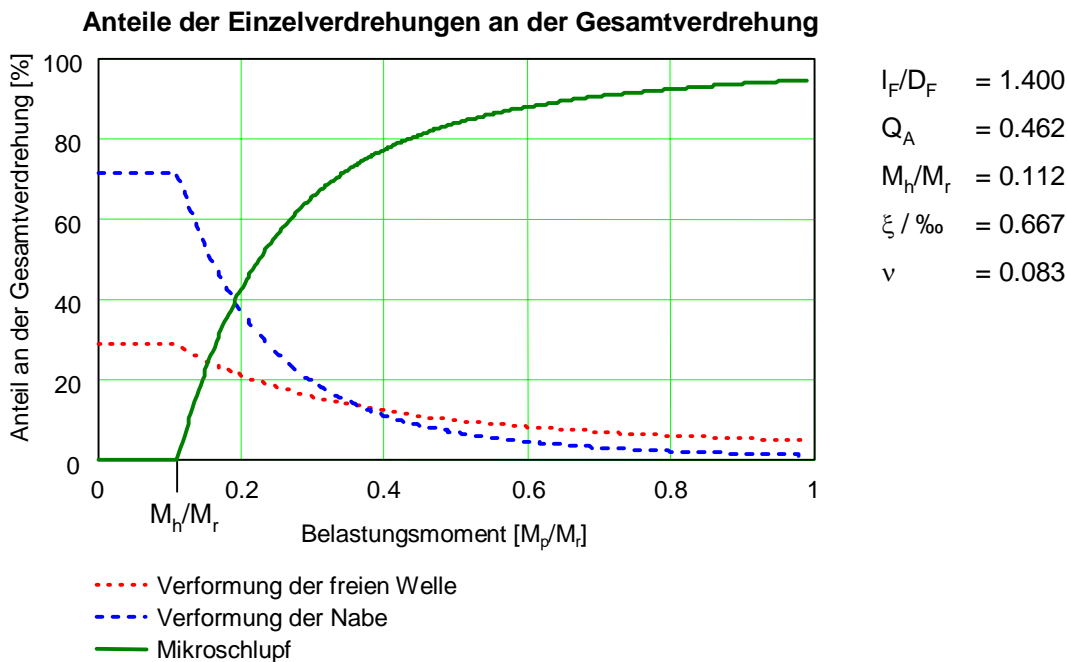


Bild 10: Anteil der Einzelverdrehungen an der Gesamtverdrehung einer beispielhaften torsionsbelasteten Zylinderpressverbindung mit einem nach MÜLLER aus M_h berechneten Gütegrad

Bei der Belastung oberhalb des schlupflosen Grenzmomentes wird bei einer Pressverbindung im Bereich der Gleitzone aufgrund der limitierten Reibkraft weniger Schubspannung übertragen als im gleichen Bereich bei einer geometrisch identischen Welle-Nabe-Verbindung „aus einem Stück“. Diese Vergleichsprobe wird sich demnach tendenziell etwas steifer verhalten als die reale Welle-Nabe-Verbindung und ist daher zu einer späteren rechnerischen Kompensation der elastischen Verformungen nicht im gesamten Einsatzbereich geeignet. Dieser Zusammenhang ist in Bild 10 an dem nicht geometrisch ähnlichen Verlauf der Verformungen von Welle und Nabe zu erkennen. In den hier verwendeten FE Modellen wird deshalb an der Montagestelle des Wegaufnehmers ein zusätzlicher Knoten erzeugt, welcher später die Auswertung des Verdrehwinkels und den Vergleich mit Versuchsergebnissen ermöglicht.

Bild 11 zeigt die Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie der teilanalytischen Lösung im Vergleich zu einem Berechnungsergebnis der FEM und der experimentell ermittelten Kurve. An der Abweichung der teilanalytischen Lösung von der experimentellen Kurve ist erkennbar, dass die örtliche Schubspannungsübertragung für diese Pressverbindung nicht dem Ansatz der lamellierten Nabe von MÜLLER folgt.

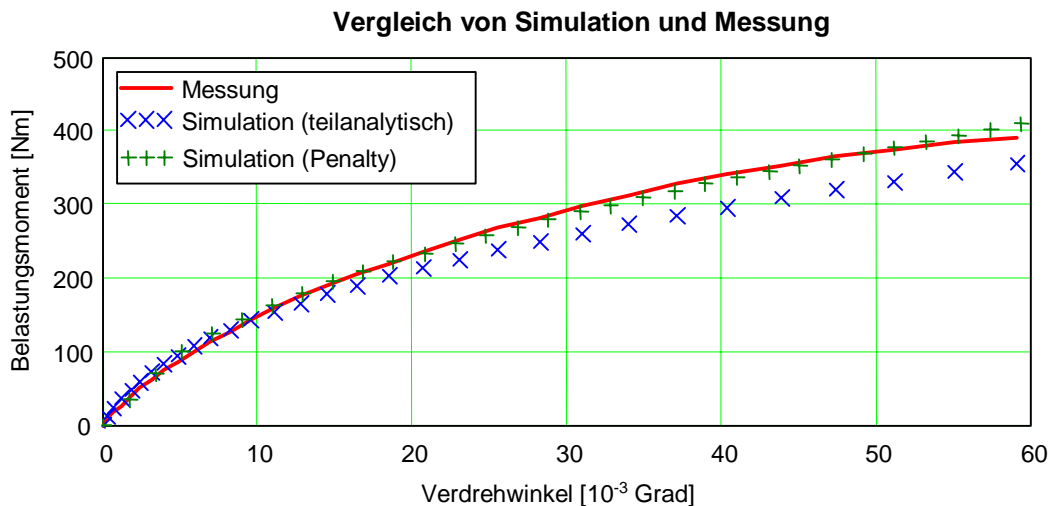


Bild 11: Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinien der teilanalytischen Lösung und der FEM-Berechnung nach der Penalty-Methode im Vergleich zur experimentell bestimmten Kurve

4.4 Weitere Ansätze zur Beschreibung des Reibverhaltens

Neben dem klassischen Coulomb-Modell mit künstlichen Steifigkeiten werden bei einigen Reibmodellen auch Kohäsion sowie die Gleitgeschwindigkeit in der Form einer Stribeck-Funktion berücksichtigt. Die Kohäsion wird dabei durch eine Initialschubspannung bei der Verformung Null modelliert und die Gleitgeschwindigkeit über einen exponentiellen Abfall des Haftreibwertes auf den Gleitreibwert wiedergegeben (Bild 9). Durch Variation des Geschwindigkeitsparameters lässt sich so das Simulationsergebnis mit den Messwerten abgleichen.

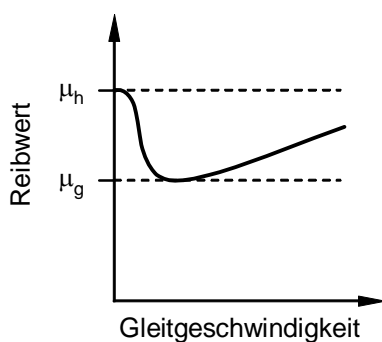


Bild 9: Reibmodell mit einem geschwindigkeitsabhängigen Reibwert

Doch die selbst mit diesem aufwändigen Verfahren ermittelten Schlupftiefen stimmen nicht immer mit experimentellen Ergebnissen überein. Das ist ein Indiz dafür, dass der bisher gewählte Coulombsche Reibwertansatz für die in Pressfugen auftretenden mikroskopisch kleinen Relativbewegungen die Kraftübertragung nicht detailliert genug widerspiegelt.

RABINOWICZ (Massachusetts Institute of Technology) postulierte bereits 1951 die Abhängigkeit des Reibwertes von der Verschiebung [13]. Er verwendete dazu einen Stahlblock M, welcher mit seinen drei Reibstiften auf einer gegenüber der Horizontalen um den Winkel φ geneigten Ebene stand (Bild 10). Die Position der Reibstifte war so gewählt, dass einer dieser Kontakte fast die gesamte Normalkraft übernimmt, während die anderen nur Führungsfunktionen haben. Weiterhin war der Winkel der Ebene so gewählt, dass der einmal in Bewegung befindliche Stahlblock aufgrund der Gleitreibung nicht wieder zur Ruhe kommt: $\mu_g < \tan(\varphi) < \mu_h$. Eine kleine Kugel m rollte aus der Ruhelage heraus gegen den Stahlblock. Aus der Wegdifferenz vor und nach dem elastischen Stoß konnte der dadurch übertragene Impuls und damit auch die Geschwindigkeit des Stahlblockes bestimmt werden. Nach den Gesetzen der Coulombschen Reibung müsste dieser Stahlblock bis zum Ende der geneigten Ebene gleiten, blieb aber – den Experimenten von RABINOWICZ zufolge – in Ruhe. So postulierte er daher die Abhängigkeit des Reibwertes von der Verschiebung, konnte aber den exakten Verlauf noch nicht eindeutig abbilden.

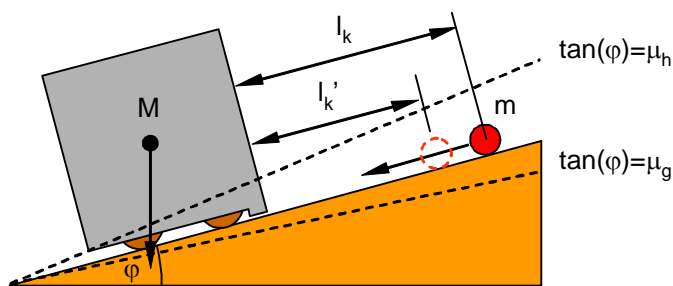


Bild 10: Schematische Darstellung der Versuchsanordnung nach RABINOWICZ [13]

Auf der Grundlage der Untersuchungen von RABINOWICZ entstand eine Reihe von Modellen zur Beschreibung des Reibungsverhaltens (DAHL, BLIMAN und SORINE, LUGRE, u.a.). Diese Modelle stützen sich zur Veranschaulichung der Kraftübertragung auf ein Bürstenmodell und beschreiben die Reibkraft als eine Funktion der mittleren Borstenverformung, der Verformungsgeschwindigkeit und der Gleitgeschwindigkeit. Verschiedene Bürstenmodelle zur Erklärung der Relativbewegungen in Kontaktflächen, speziell der Relativbewegungen an den Pressflächen in der Pressfuge einer Pressverbindung wurden von GROPP entwickelt und in [14] ausführlich dargestellt und erläutert. Um eine alleinige Abhängigkeit der Reibkraft von der Borstendurchbiegung und der Gleitgeschwindigkeit zu erzielen, wird in einigen Fällen die Relation zwischen Verformung und Verformungsgeschwindigkeit durch eine Differenzialgleichung beschrieben. An dieser Stelle setzt z.B. auch das „Elasto-Plastic Friction Model“

an und modifiziert diese Gleichung dahingehend, dass auch noch ideales Haften im Bereich sehr kleiner Oberflächenverschiebungen auftreten kann [12].

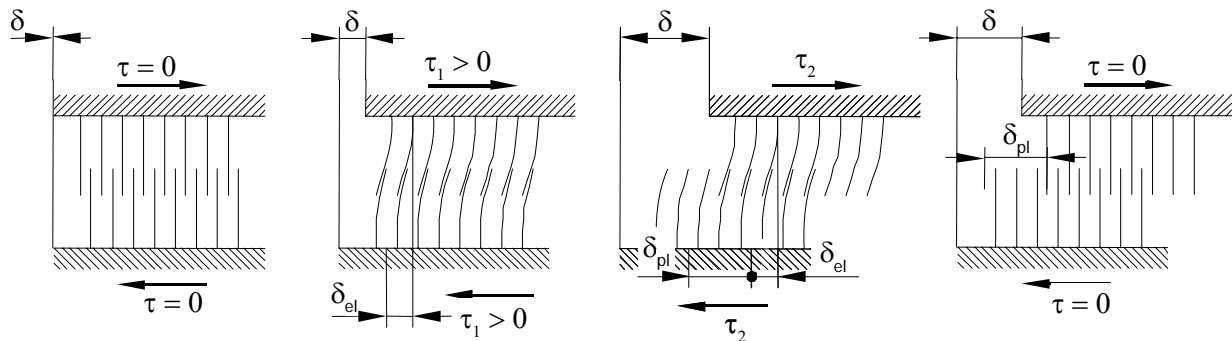


Bild 11: Bürstenmodell zur Beschreibung der Kraftübertragung im Reibkontakt [3]

Diese zum Teil sehr komplexen Reibkraftmodelle werden mit Versuchsergebnissen eines ebenen Stift-Platte-Kontaktes abgeglichen. Bereits KOLLMANN, u.a. Bezug nehmend auf eine Arbeit von NOLLE und RICHARDSON, weist jedoch auf grundlegende Unterschiede zwischen dem ideal-linearen Reibversuch und der Kraftübertragung in Pressverbindungen hin. So kann es z.B. bei hohen Fugenpressungen, wie sie in Welle-Nabe-Verbindungen vorkommen, zu einer deutlichen Veränderung des Reibwertes kommen. Aus diesem Grund nutzt die DIN 7190 anstelle des Reibwertes μ den Haftbeiwert ν .

Darüber hinaus ist aus der Praxis bekannt, dass die Federkennlinie einer hoch belasteten kraftschlüssigen Welle-Nabe-Verbindung mit der Lastwechselzahl einer Veränderung unterliegt. Für einige Pressverbindungen mit beschichteten Pressflächen kann dabei die Übertragungsfähigkeit sogar auf mehr als das Doppelte ansteigen [1].

Da es im Zuge des Downsizings zu immer höher belasteten reibschlüssigen Verbindungen kommt, ist eine Überdimensionierung zur Verhinderung von Tribokorrosion nicht länger haltbar. Vielmehr werden nun Methoden benötigt, mit denen die Kraftübertragung besser beschrieben und Rückschlüsse auf konstruktive Veränderungen ermöglicht werden. Des Weiteren ist infolge der weit fortgeschrittenen Rechentechnik der Einsatz neuer Algorithmen zur Beschreibung von Maschinenelementen möglich.

5 Der Ansatz des Schubelastischen Verbandes

5.1 Einführung in das Rechenmodell

Anders als bei den bisherigen Ansätzen wird hier zusätzlich die Abhängigkeit der Reibkraft von der Verschiebung im Kontakt betrachtet. Da der Reibzustand in der Pressfuge nicht an jeder Stelle gleich ist, wird die Pressfuge in eine endliche Anzahl von Stützstellen aufgeteilt.

Die Verformung von Welle und Nabe infolge der Normal- und Reibkräfte an diesen Stützstellen kann schließlich durch die kompakten Nachgiebigkeitsmatrizen **EM** beschrieben werden. Eine detaillierte Darstellung des Rechenmodells erfolgte bereits in [2] und [3]. Zusammen mit der Verdrehung δ_{WN} der beiden Einspannstellen kann die Verschiebung im Kontakt aus den Umfangskräften F_u nach folgender Matrixgleichung berechnet werden:

$$\delta = \delta_{WN} - (\mathbf{EM}_W + \mathbf{EM}_N) \cdot \mathbf{F}_u \quad (14)$$

Die fett dargestellten Formelzeichen stehen dabei für Matrizen oder Vektoren, welche die Kräfte oder Verschiebungen an allen Stützstellen zusammenfassen. Durch eine örtliche Linearisierung der von den Kontaktpartnern abhängigen Reibkraftfunktion nach einer Taylor-Reihenentwicklung kann die Umfangskraft an jedem Stützpunkt ersetzt werden mit:

$$F_u = F_N \cdot (\mu_0 + \mu_1 \cdot \delta) \quad (15)$$

Dabei stellen μ_0 und μ_1 den jeweils vom Arbeitspunkt abhängigen absoluten und linearen Taylor-Parameter, δ die Verschiebung dieses Stützpunktes im Kontakt und F_N die örtliche Normalkraft dar. Setzt man Gleichung 14 in 15 ein, erhält man einen implizit definierten Zusammenhang zwischen der Verdrehung der Einspannstellen δ_{WN} und der daraus resultierenden Umfangskräfte F_u im Kontakt. Dieses Gleichungssystem lässt sich zu der kompakten Matrixgleichung umformen:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_u = \mathbf{RS} \quad (16)$$

$$\text{mit } \mathbf{C} = (\mathbf{EM}_W + \mathbf{EM}_N) + \mathbf{K} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_{i,j} = \frac{1}{\mathbf{F}_{n_i} \cdot \mu_{1_i}} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{sowie } \mathbf{RS}_i = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}_i + (\delta_{WN} - \delta_{pl})_i \quad (18)$$

Damit erhält man aus der Verdrehung der Einspannstellen δ_{WN} die Umfangskräfte F_u an jeder Stelle im Kontakt ausgehend von einer initialen örtlichen Verschiebung δ der Kontaktflächen. Der Vektor δ_{pl} beschreibt den örtlichen Schlupfweg, falls es dort aufgrund einer zu hohen Tangentialkraft zu einer Relativbewegung der Oberflächen kam.

5.2 Ermittlung der Nachgiebigkeitsmatrizen

Diese Matrizen enthalten in ihren Spalten j den Zusammenhang zwischen einer normierten Umfangskraft an der Stützstelle j zu der Verschiebung an allen anderen Stützstellen i . Damit lässt sich die Verformung jeder Bauteilgeometrie und jeder Art der Einspannung abbilden. Zur automatischen Erstellung dieser Matrizen wurde ein eigener Pre/Post-Processor in C++ erstellt.

Der Preprocessor übernimmt die Aufgabe, ausgehend von einer Basisgeometrie und einem gewünschten Detaillierungsgrad das FE-Modell mit allen Knoten und Elementen zu erstellen (Bild 12). Als Elementtypen werden derzeit Hexaeder und Pentaeder mit 27 bzw. 18 Knoten und einem quadratischen Ansatz verwendet. Innerhalb des definierten Kontaktbereiches werden dann einzelne Lasten in jede Koordinatenrichtung angetragen und die Einspannstellen fixiert. Da derzeit nur rotationssymmetrische Bauteile und Lasten berücksichtigt werden, können alle Lasten mit derselben Axialkoordinate zu einem Lastfall kombiniert werden. Nach der Definition der Koordinaten des Wegaufnehmers wird der FE-Solver (PERMAS von INTES GmbH Stuttgart) direkt gestartet. Die Ausführungszeit des Preprocessors für ca. 7500 Elemente, 4500 Knoten im Kontaktbereich, 63 Stützstellen und 189 Lastfälle benötigt auf einem Standard-PC weniger als 2 Sekunden.

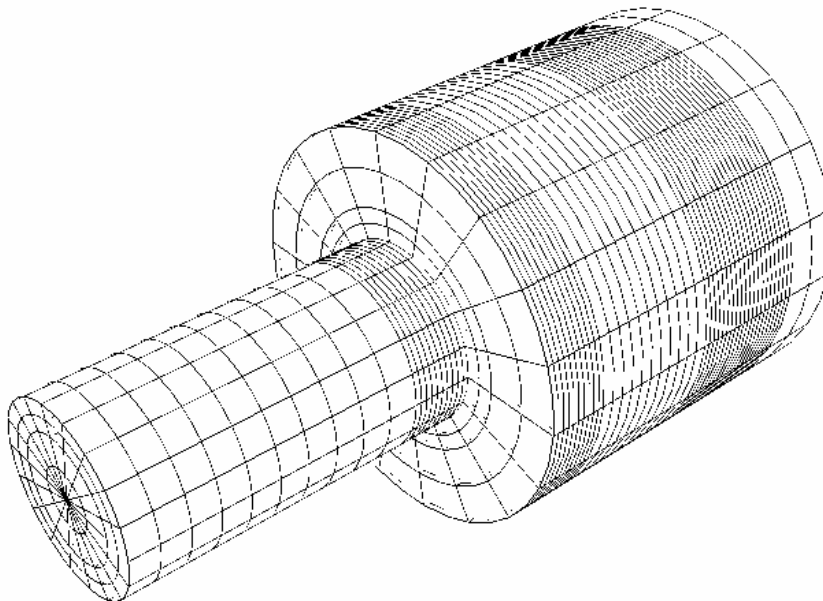


Bild 12: Automatisch erzeugtes FE-Netz einer Pressverbindung

Der Postprocessor scannt die Ergebnisdatei nach den Verschiebungen im Kontaktbereich und fasst diese zu drei Matrizen je Bauteil für die Nachgiebigkeit in radialer, tangentialer und axialer Richtung zusammen. Diese Matrizen werden in dem Iterationsalgorithmus verwendet, um die örtliche Drehmomentübertragung, die örtliche Kontaktnormalkraft und in Zukunft auch die örtliche Axialkraft zu berechnen.

5.3 Iterationsalgorithmus

Mit den oben genannten Matrixgleichungen können zu jeder Verschiebung δ im Kontakt und der Verdrehung der Koordinatensysteme δ_{WN} die Umfangskräfte F_u an allen Stützstellen ermittelt werden. Die Summe dieser Umfangskräfte ergibt zusammen mit dem Fugendurchmesser das übertragene Drehmoment. Da die Gesamtnachgiebigkeitsmatrix \mathbf{C} und die Matrix \mathbf{RS} von den örtlichen Reibwerten und damit von den örtlichen Verschiebungen abhängen, müssen diese für jeden Iterationsschritt angepasst werden. Prinzipbedingt beginnt der Iterationsalgorithmus bei einem Zustand der Pressverbindung, bei welchem alle örtlichen Umfangskräfte und alle örtlichen Verschiebungen bekannt sind. Dies ist sowohl bei einer ideal spannungsfrei gefügten und unbelasteten Pressverbindung als auch bei einer durchrutschenden Pressverbindung der Fall.

Durch die automatische Erstellung der hochdetaillierten Nachgiebigkeitsmatrizen in Verbindung mit einer besseren Schrittweitensteuerung und verschiedenen Code-Optimierungen konnte die Ausführungszeit im Vergleich zu den bisherigen Veröffentlichungen [2, 3] erneut drastisch gesenkt werden. Dies ist sowohl eine Voraussetzung für die Durchführung von Optimierungsrechnungen als auch für die geplante Simulation von Pressverbindungen mit nichtrotationssymmetrischen Belastungen, wie z.B. Biegung. Bild 13 stellt eine mit diesem Verfahren berechnete Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie dar.

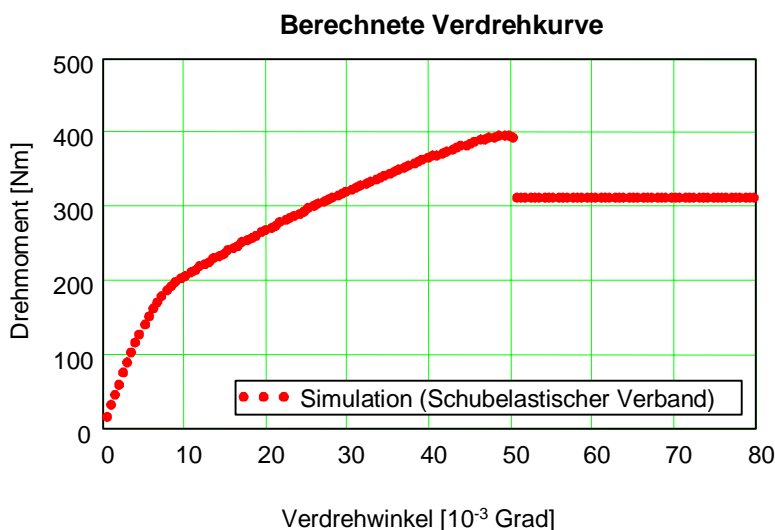


Bild 13: Mit der Methode des Schubelastischen Verbandes simulierte Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie einer Welle-Nabe-Verbindung mit einem ausgeprägten Unterschied zwischen dem Haft- und dem Gleitreibwert

5.4 Ermittlung der Reibkraftfunktion

Überträgt eine Pressverbindung kein Drehmoment, dann ist die Summe aller Umfangskräfte Null. Aufgrund einer Verspannung des Kontaktes infolge einer vorangegangenen schlupfbehafteten Belastung können örtlich dennoch Reibkräfte auftreten. Unter der Annahme einer weitestgehend eigenspannungsfrei gefügten Welle-Nabe-Verbindung liegt unmittelbar vor der Erstbelastung keine solche Verspannung vor. Deshalb beginnt die Reibkraftfunktion im Koordinatenursprung. Der Anstieg dieser Funktion kann nun durch einen ersten Punkt μ_{test} außerhalb des Ursprungs beschrieben werden, dessen Lage als Startwert für eine weitere Iterationsrechnung dient. Eine erste kleine Drehmomentbelastung M_{sim} infolge der Verdrehung der beiden Einspannstellen führt schließlich in Verbindung mit der geschätzten Reibkraftfunktion $\mu(\delta)$ und dem Kontaktalgorithmus zu einer Umfangskraftverteilung. Daraus lassen sich über die Nachgiebigkeitsmatrizen \mathbf{EM}_x die örtlichen Verschiebungen der Punkte berechnen, die bei der Erstellung der Matrizen als Position des Wegaufnehmers definiert wurden. Aus der Kennlinie von einem Vergleichsexperiment lässt sich das zu dieser Verdrehung gehörende Drehmoment $M_{\text{mess}}(\varphi)$ bestimmen. Durch eine Variation des ersten Punktes μ_{test} der Reibkraftfunktion kann die Änderung des Drehmomentes über der Änderung der Lage dieses Punktes $dM/d\mu_{\text{test}}$ berechnet werden. Mithilfe des gedämpften Newton-Verfahrens kann relativ schnell auf die Lage dieses Punktes der Reibkraftfunktion geschlossen werden. Auf diese Weise erfolgt eine schrittweise Entwicklung der Reibkraftfunktion basierend auf den Messwerten der Erstverformung einer Pressverbindung (Bild 14).

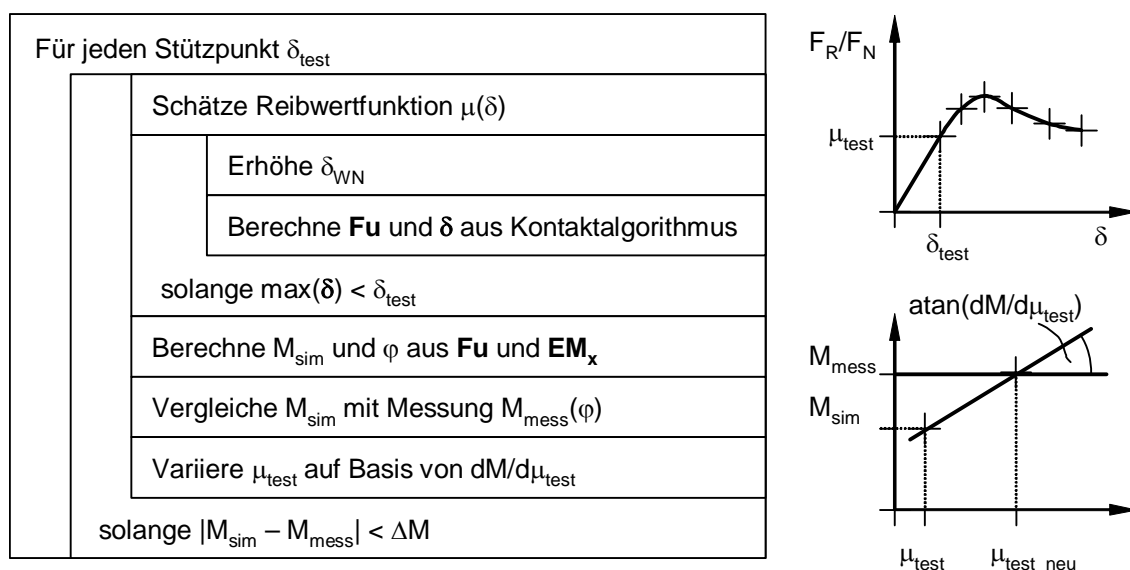


Bild 14: Möglicher Algorithmus zur Ermittlung der Reibkraftfunktion

In Bild 15 ist eine mit dem Verfahren des Schubelastischen Verbandes ermittelte Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie dargestellt. Um eine bessere Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit der Messung zu erhalten, wurden die Parameter zur Beschreibung der Reibkraftfunktion optimiert.

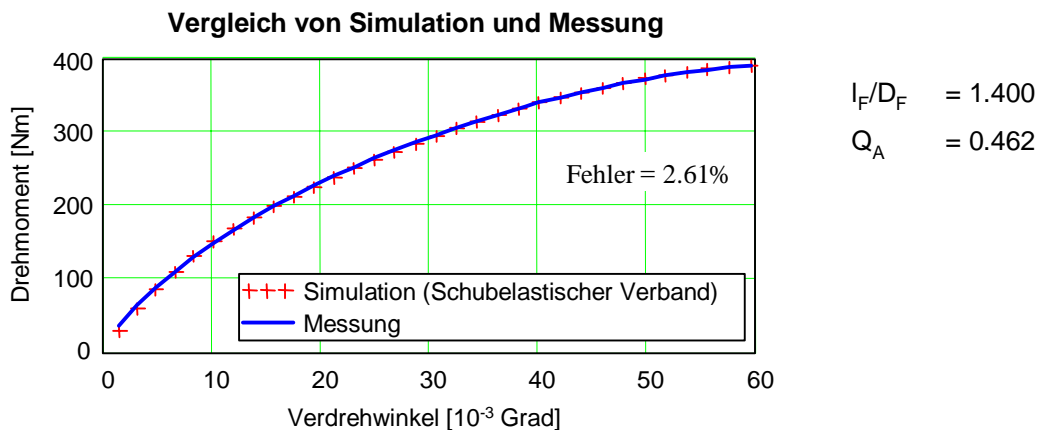


Bild 15: Ein mit der Methode des Schubelastischen Verbandes berechneter Drehmoment-Drehwinkel-Verlauf im Vergleich zur experimentell bestimmten Kurve

Es ist auffallend, dass die Fehlerquadratsumme im Arbeitsbereich bis 95 % des Rutschmomentes deutlich unter den beiden vorangegangenen Lösungen nach der Lagrange- und der Penalty-Methode liegt (vgl. Bild 6). Allerdings liefern alle Verfahren – derzeit auch noch das des Schubelastischen Verbandes – ungenaue Ergebnisse bei einem Belastungsmoment oberhalb von ca. 95 % des Rutschmomentes. Da dieser Betriebsbereich allerdings nicht praxisrelevant ist, kann man sagen, dass die Modellierung der Reibkraft in Abhängigkeit der Verschiebung mehr Möglichkeiten bietet, um Simulation und Messung abzugleichen.

5.5 Vollständiger Berechnungsablauf

Um auch wechselnde Belastungen simulieren zu können, wird die örtliche Gesamtverschiebung in einen schlupflosen (elastischen) und einen schlupfbehafteten (plastischen) Teil aufgegliedert [3]. Kommt es in einem Rechenschritt zu einer Gleitbewegung der Oberflächen, so äußert sich dies in einer Vergrößerung der örtlichen schlupfbehafteten Verschiebung. Diese bleibt dann solange erhalten, bis eine Tangentialkraft in der entgegengesetzten Richtung die Haftgrenze überschreitet und zum Zurückgleiten der Oberflächen führt. Bild 16 zeigt eine auf diese Weise berechnete Hystereseschleife im Vergleich zu einer experimentell ermittelten Kurve. Die Anpassung der Reibkraftfunktion aufgrund von Oberflächenveränderungen während der Einsatzdauer wird durch eine Interpolation

zwischen verschiedenen gespeicherten Reibkraftfunktionen ermöglicht. Ebenso kann die örtliche Flächenpressung bspw. in Abhängigkeit der Schlupfwegsumme definiert werden.

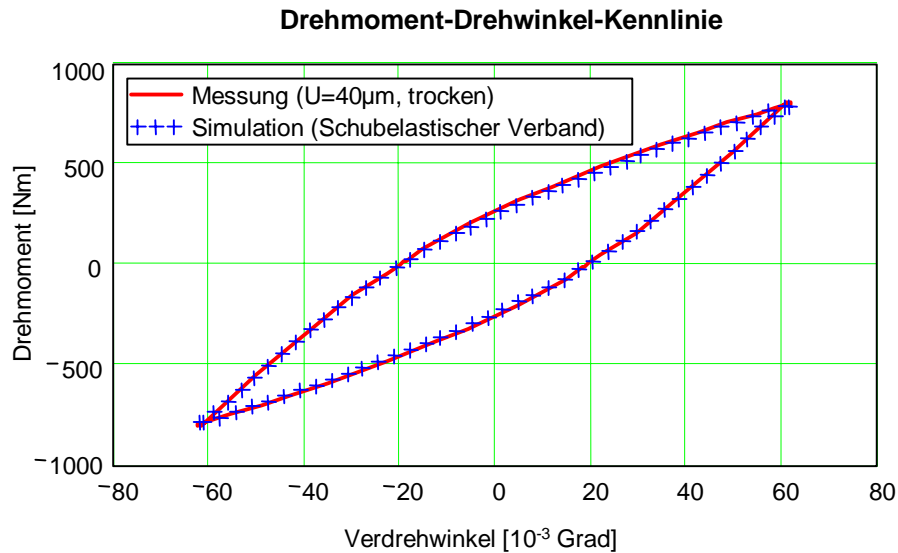


Bild 16: Mit dem Verfahren des Schubelastischen Verbandes berechnete Hystereseschleife

5.6 Übertragbarkeit der Parameter

Ziel dieser Entwicklung ist es auch, den Einfluss verschiedener Parameter, wie Werkstoffpaarung, Oberflächenrauheit, Schmierstoff usw. auf die Reibkraftfunktion zu untersuchen. Auf diese Weise lassen sich Trends zur optimalen Gestaltung von Pressverbindungen bestimmen.

6 Ausblick

In diesem Dokument wurden die Grundprinzipien einiger weit verbreiteter Kontaktalgorithmen der FEM aufgezeigt und deren Anwendung an einer konkreten Geometrie mit einer teilanalytischen Lösung sowie mit Versuchsergebnissen verglichen. Die Einführung einer verschiebungsabhängigen Reibkraft in einem Schubelastischen Verband bietet mehr Möglichkeiten, die Simulation mit einer gemessenen Drehmoment-Drehwinkel-Kennlinie abzugleichen. Neben der Einführung in dieses Berechnungsmodell wurde auch der Weg aufgezeigt, aus experimentellen Ergebnissen auf diesen Reibkraftverlauf zu schließen. Die weiteren Arbeiten auf diesem Gebiet werden durch eine noch genauere Ermittlung der Reibkraftfunktion für verschiedene Materialien und Oberflächen sowie die Ausweitung dieses Modells auf andere Belastungsarten, z.B. Axialkraft und Biegung, gekennzeichnet sein. Darüber hinaus können verschiedene Geometrievarianten auf die Ausbildung von Gleitzonen hin untersucht und ein Trend für weitere Gestaltungsregeln abgeleitet werden.

Zusammenfassung der verwendeten Kurzzeichen

a^*	Hilfsgröße (LEIDICH)
C	Gesamtnachgiebigkeitsmatrix
c_k	Penalty-Steifigkeit
D_F	Fugendurchmesser
$dM/d\mu_{\text{test}}$	erste Ableitung des Drehmomentes nach dem ausgenutzten Reibwert
EM_N	Nachgiebigkeitsmatrix der Nabe
EM_{RN}	Nachgiebigkeitsmatrix der Referenzpunkte auf der Nabe
EM_{RW}	Nachgiebigkeitsmatrix der Referenzpunkte auf der Welle
EM_W	Nachgiebigkeitsmatrix der Welle
EM_x	allgemeine Notation für alle Nachgiebigkeitsmatrizen
F_N	Normalkraft
F_R	Tangentialkraft / Reibkraft
F_u	Vektor der Umfangskräfte
F_u	Umfangskraft
G_N	Schubmodul der Nabe
G_W	Schubmodul der Welle
i	Laufvariable der Stützpunkte / Knoten
j	Laufvariable der Stützpunkte / Knoten
k	Hilfsgröße (KOLLMANN)
K	Matrix der Kontaktnachgiebigkeit
l_F	Fugenlänge
l_g	Länge der Gleitzzone
l_h	Länge des Haftbereiches
l_k	Ausgangslänge (RABINOWICZ)
l_k'	Länge nach dem Stoß (RABINOWICZ)
l_N	Abstand zwischen dem Messaufnehmer der Nabe und dem Welleneinlauf
l_W	Abstand zwischen dem Messaufnehmer der Welle und dem Welleneinlauf
M_h	schlupfloses Grenzmoment
M_{mess}	Experimentell bestimmtes Drehmoment
M_p	Belastungsmoment
M_r	Rutschmoment
M_{sim}	berechnetes Drehmoment
M_z	Restdrehmoment in der Welle
Q_A	Durchmesser Verhältnis der Nabe

RS	Vektor der Rechten Seite
s_0^*	Schlupfweg am Welleneinlauf nach LEIDICH
v	Gleitgeschwindigkeit
z	Axialkoordinate der Pressverbindung
Δd	Verschiebung in Tangentenrichtung
ΔM	Genauigkeitsgrenze des Drehmomentes
Δs	Verschiebung in Normalenrichtung
$\Delta \varphi$	Gesamtverdrehung der Messstellen
$\Delta \varphi_N$	Verdrehung aufgrund der Nabenverformung
$\Delta \varphi_S$	Verdrehung aufgrund des Schlupfes
$\Delta \varphi_W$	Verdrehung aufgrund der Wellenverformung
δ	örtliche Verschiebung im Kontakt
δ_{el}	schlupffreier (elastischer) Anteil der örtlichen Oberflächenverschiebung
δ_{pl}	schlupfbehäfteter (plastischer) Anteil der örtlichen Oberflächenverschiebung
δ_{test}	beispielhafte Oberflächenverschiebung
δ_{WN}	Verdrehung der Einspannstellen
δ_W	Verschiebung eines Knotens auf der Welle
$\eta^*_{gr.t}$	Gütegrad der Pressverbindung unter Torsion (LEIDICH)
μ_0	absoluter Taylorparameter der Reibkraftfunktion
μ_1	linearer Taylorparameter der Reibkraftfunktion
μ_g	Gleitreibwert
μ_h	Haftreibwert
κ	Exponent (LEIDICH)
μ_{test}	beispielhafter ausgenutzter Reibwert
ν	Haftbeiwert
τ	Schubspannung
ξ	relatives Haftmaß

Literatur

- [1] Gropp, H.: Das Übertragungsverhalten dynamisch belasteter Preßverbindungen und die Entwicklung einer neuen Generation von Preßverbindungen. Technische Universität Chemnitz. Habilitationsschrift. 1997.
- [2] Meißner, C., Tenberge, P.: A new computing method for the calculation of the power transmission in press fits using a variable friction coefficient. Advanced Engineering Design AED 2006 in Prague.
- [3] Meißner, C., Tenberge, P.: Simulation der Kraftübertragung in dynamisch hoch belasteten Pressverbindungen. Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2005. S. 347-366
- [4] Häusler, N.: Der Mechanismus der Biegemomentübertragung in Schrumpfverbindungen. Technische Hochschule Darmstadt. Dissertation. 1974.
- [5] Müller, H. W.: Der Mechanismus der Drehmomentübertragung in Preßverbindungen. Technische Hochschule Darmstadt. Dissertation. 1961.
- [6] Leidich, E.: Beanspruchung von Pressverbindungen im elastischen Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch. Technische Hochschule Darmstadt. Dissertation. 1983.
- [7] Ast, M., Rösle, H., Schenk, R.: FEM-Analyse reibschlüssiger Welle-Nabe-Verbindungen. Kraftschluß unter Berücksichtigung von Drehmoment, Fliehkraft, Haft- und Gleitreibung. Tagung Fulda 28. und 29. April 1998. VDI-Berichte 1384
- [8] Programmdokumentation ANSYS Structural 8.1
- [9] Owen, W. S.: An investigation into the reduction of stick-slip friction in hydraulic actuators. Masters's Thesis. University of British Columbia. 2001.
- [10] Lenz, J., Gaul, L.: The influence of microslip on the dynamic behaviour of bolted joints. 13th International Modal Analysis Conference. Nashville, Tennessee. 1995.
- [11] Kollmann, F. G.: Welle-Nabe-Verbindungen. Konstruktionsbücher Band 32. Springer Verlag. 1984
- [12] Dupont, P., Armstrong, B., Hayward, V.: Elasto-Plastic Friction Model: Contact Compliance and Stiction. ACC. Chicago. 2000.
- [13] Rabinowicz, E.: The nature of the static and kinetic coefficients of friction. Journal of Applied Physics. 1951
- [14] Gropp, H., Klose, D.: Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Bestimmung der Länge von Gleitzonen sowie der Drehmomentübertragungsfähigkeit dynamisch belasteter Preßverbände bei axialer Ableitung des Drehmomentes. Abschlußbericht zum experimentellen Teil des DFG-Forschungsvorhabens Ko 643/39-1, 1993, TU Chemnitz.