



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Familienplanung in Talmud

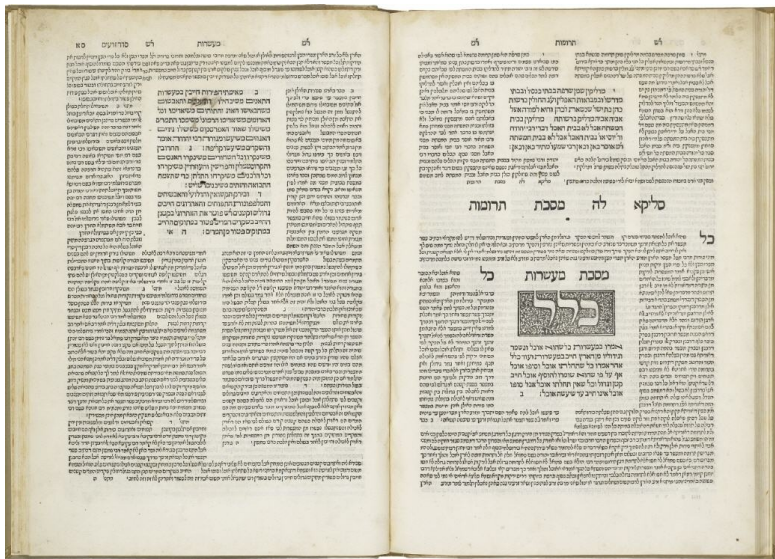
Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz, Deutschland



Talmud תלמוד Belehrung, Studium

- zeigt auf, wie die Thora-Regeln in der Praxis und im Alltag von den Rabbinern verstanden und ausgelegt wurden.

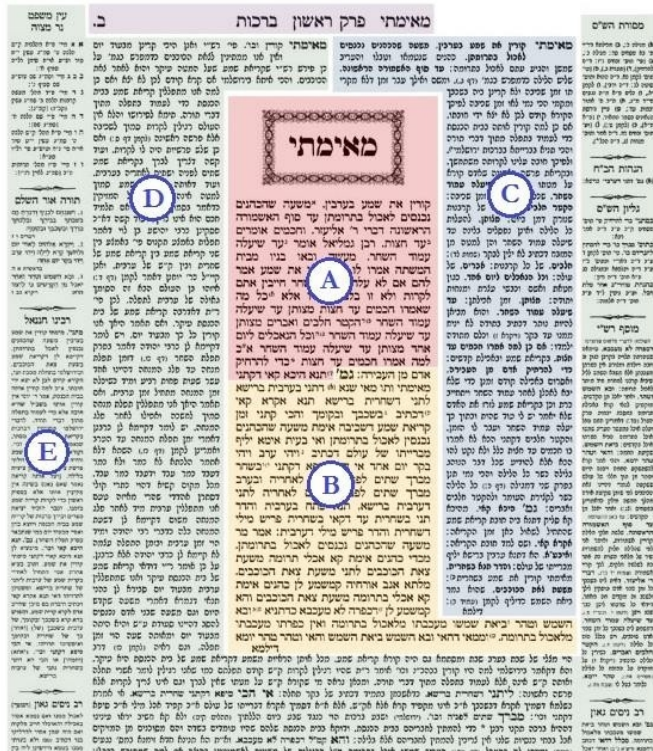
- hat zwei Bestandteile: die Mischna aus Palästina, die kanonische Sammlung jüdischer Gesetze, und die Gemara, die Diskussionen über diese Gesetze, die in Babylonien geführt und aufgezeichnet wurden.



Babylonischer Talmud erster vollständiger Druck 1520-1523 in Venedig



Textaufbau in Talmud



- in der Mitte befindet sich die Mischna (A)
- und ab Zeile 14 die Gemara (B), geschrieben in Quadratbuchstaben
- rechts daneben steht der Kommentar Raschis (C), steht für Rabbi Schlomo ben Jizchak
- links sind Kommentare seiner Schüler (D)
- rundherum sind kleinere Kommentare (E) aufgeschrieben

Die Gebrüder Romm entwarfen in ihrer Wilnaer Druckerei, Litauen 1880-1886 das heute als klassisch geltende Talmud-Blatt



Lernen in Talmud



Jeschiwa in Berlin

- die Stoffvermittlung in Talmud wird in Form eines Dialogs zwischen verschiedenen rabbinischen Lehrmeinungen präsentiert, um am Ende zu einer Entscheidung zu kommen und den maßgeblichen Stand der Tradition wiederzugeben.

- oft entstehen so rabbinische Schulen, die über Jahrhunderte ihre Art der Auslegung vorantreiben.



Beit Hillel



Knesset, Jerusalem

- Hillel war einer der bedeutendsten pharisäischen Rabbiner aus der Zeit vor der Zerstörung des zweiten Tempels (70 n. Chr.), Vorsteher des Sanhedrin (die oberste jüdische religiöse und politische Instanz von damals und gleichzeitig das oberste Gericht) und Gründer einer Schule zur Auslegung der Schrift.

Laut Talmud (Shabbat 31a) stellte ein Nichtjude eine Frage an Hillel:

„Wenn du mir die Lehre des Judentums vermitteln kannst, solange ich auf einem Bein stehe, werde ich konvertieren.“

Daraufhin formulierte Hillel die Goldene Regel der Tora:

„Was dir nicht lieb ist, das tue auch deinem Nächsten nicht; das ist die ganze Gesetzeslehre, alles Andere ist nur die Erläuterung, gehe und lerne sie“.



Beit Schammai



Schammai, Jack Levine (1915-2010)

- Schammai war ein jüdischer Gelehrter des 1. Jahrhunderts und der bedeutendste Zeitgenosse von Hillel, wobei er rund 60 Jahre jünger war.

- Im Gegensatz zum milden Hillel gilt Schammai in religiösen und ethischen Fragen als streng und reizbar.

Als Leitspruch wird Schammai folgendes zugeschrieben (Pirkei Avot 1:15):

**„Setze für dein Studium der Tora feste Stunden an;
sage wenig, tu aber viel und
empfange alle Menschen mit freundlichem Gesicht.“**



Wahlwerbung aus USA, 2016

Jeder Streit, der in des Himmels Namen geführt wird, hat Berechtigung;

der aber nicht im Namen des Himmels geführt wird, hat sie nicht.

Welcher Streit ward in des Himmels Namen geführt? Der Streit des Hillel und des Schammai.

Welcher ward nicht so geführt? Der Streit der Rotte Korachs und seines Anhangs.

(Pirkei Avot 5:17)



Rotte Korachs



-80

Der Tod von Korach, Datan und Abiram, Gustave Doré, 1865

Korach, ..., ferner Datan und Abiram, ... erhoben sich gegen Mose, zusammen mit zweihundertfünfzig führenden Männern aus der Gemeinde, angesehenen Abgeordneten der Versammlung.

Sie rotteten sich gegen Mose und Aaron zusammen und sagten zu ihnen: Ihr nehmt euch zu viel heraus. Alle sind heilig, die ganze Gemeinde, und der Herr ist mitten unter ihnen. Warum erhebt ihr euch über die Gemeinde des Herrn?

(Numeri 16, 1-3)



Familienplanung in Talmud

Yevamot 61b:15

Niemand unterlasse die Fortpflanzung, es sei denn, dass er Kinder hat; die Schule Schammais sagt, zwei Männliche, und die Schule Hillels sagt, ein Männliches und ein Weibliches, denn es heißt: „Mann und Weib hat er sie geschaffen...“ (Genesis 5:2)

Yevamot 61b:18

Die Gemara fragt: Was ist der Grund von Beit Schammai? Die Gemara antwortet: Wir lernen dies von Moses, wie es geschrieben steht: "Die Söhne des Mose waren: Gerschom und Eliëser" (1. Chronik 23:15). Da Moses keine anderen Kinder hatte, müssen zwei Söhne ausreichen, um die Mitzwa zu erfüllen.

Was sind die gesellschaftlichen Konsequenzen beider Auslegungen?



Mathematisches Modell

Annahme 1: Ein Paar beginnt, Kinder zu bekommen, und vereinbart, dies fortzusetzen, bis es seine Verpflichtung von der erwähnten Mitzwa erfüllt hat.

Annahme 2: Die Chance auf einen Jungen bzw. ein Mädchen ist jedes Mal $1/2$ und die Geschlechter der Kinder sind unabhängige Ereignisse.

Frage 1: Wie hoch sind die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Familiengrößen zum Zeitpunkt der Erfüllung ihrer Verpflichtung?

Frage 2: Was ist die erwartete Familiengröße als Gewichtung möglicher Familiengrößen mit vorher berechneten Wahrscheinlichkeiten?

Hillel vs. Schammai



Familienplanung nach Hillel

Prämisse von Hillel: Unabhängig vom Geschlecht des ersten Kindes macht das Paar einfach weiter, bis es ein Kind des anderen Geschlechts bekommt.

Reihenfolge der Kinder	Wahrscheinlichkeit
J M	$1/2 * 1/2 = 1/4$
M J	$1/2 * 1/2 = 1/4$
J J M	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
M M J	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
J J J M	$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/16$
M M M J	$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/16$
...	...

$$\begin{aligned} \text{Erwartete Familiengröße} &= 1/4 * 2 + 1/4 * 2 + 1/8 * 3 + 1/8 * 3 + 1/16 * 4 + 1/16 * 4 + \dots \\ &= 2 * (2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + \dots) = ? \end{aligned}$$



Unendliche Summen (Hillel)

Definiere: $S = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + \dots$

Damit gilt: $2S = 1 + 2/2 + 3/4 + 4/8 + 5/16 + \dots$

Folglich: $2S - S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ (geometrische Reihe)
 $= 1/(1-1/2) = 2,$

bzw. $S = 2$

Erwartete Familiengröße = $2 * (2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + \dots)$
 $= 2 * (S - 1/2) = 2 * (2 - 1/2) = 2 * 3/2 = 3$ (Hillel)



Familienplanung nach Schammai

Prämisse von Schammai: Diesmal muss das Paar so lange weitermachen, bis sie zwei Jungen haben, unabhängig von der Anzahl der Mädchen.

Reihenfolge der Kinder	Wahrscheinlichkeit
J J	$1/2 * 1/2 = 1/4$
M J J	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
J M J	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
M M J J	$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/16$
M J M J	$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/16$
J M M J	$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/16$
...	...

$$\begin{aligned} \text{Erwartete Familiengröße} &= 1/4 * 2 + 1/8 * 3 + 1/8 * 3 + 1/16 * 4 + 1/16 * 4 + 1/16 * 4 + \dots \\ &= (1 * 2)/4 + (2 * 3)/8 + (3 * 4)/16 + (4 * 5)/32 + \dots = ? \end{aligned}$$



Unendliche Summen (Schammai)

Definiere: $R = (1*2)/4 + (2*3)/8 + (3*4)/16 + (4*5)/32 + \dots$

Damit gilt: $2R = 1 + (2*3)/4 + (3*4)/8 + (4*5)/16 + \dots$

Folglich: $2R - R = 1 + 2*(3-1)/4 + 3*(4-2)/8 + 4*(5-3)/16 + \dots$

$$= 1 + 2/2 + 3/4 + 4/8 + \dots$$

$$= 1 + (1+1)/2 + (1+2)/4 + (1+3)/8 + \dots$$

$$= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2 + 2/4 + 3/8 + \dots$$

$$= 1/(1-1/2) + S = 2 + 2 = 4,$$

bzw. $R = 4$

Erwartete Familiengröße = $(1*2)/4 + (2*3)/8 + (3*4)/16 + (4*5)/32 + \dots$

= 4 (Schammai)



Konsequenz für Mädchen

- Hillel:

Erwartete Anzahl von Mädchen = Erwartete Familiengröße durch zwei geteilt
 $= 3/2$

- Schammai:

Erwartete Anzahl von Mädchen = Erwartete Familiengröße – Anzahl von Jungen
 $= 4 - 2 = 2$

Obwohl die Auslegung von Schammai nur auf Jungen abzielt, ist die erwartete Anzahl von Mädchen hier um $1/2$ größer als bei Hillel, der eine geschlechtsneutrale Forderung formuliert. In beiden Fällen, insbesondere auch bei Schammai, gibt es im Mittel keine Diskriminierung zwischen den Geschlechtern.



Modellerweiterung (nach J. Rosenberg)

Die Chance auf einen Jungen bzw. ein Mädchen ist jedes Mal w bzw. $1-w$

- Hillel:

Erwartete Familiengröße = $(w^2 - w + 1)/(w - w^2)$

- Schammai:

Erwartete Familiengröße = $2/w$

Wie groß muss w sein, damit die Auslegungen von Hillel und Schammai die selben gesellschaftlichen Auswirkungen in Termen der erwarteten Familiengröße haben?



Goldener Schnitt

Löse die Gleichung „Hillel = Schammai“:

$$(w^2 - w + 1)/(w - w^2) = 2/w \text{ (ausmultiplizieren)}$$

$$w^3 - w^2 + w = 2w - 2w^2 \text{ (auf eine Seite bringen)}$$

$$w^3 + w^2 - w = 0 \text{ (durch } w \neq 0 \text{ teilen)}$$

$$w^2 + w - 1 = 0 \text{ (p-q Formel)}$$

$$w_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$$

Die Lösung ist der Goldene Schnitt:

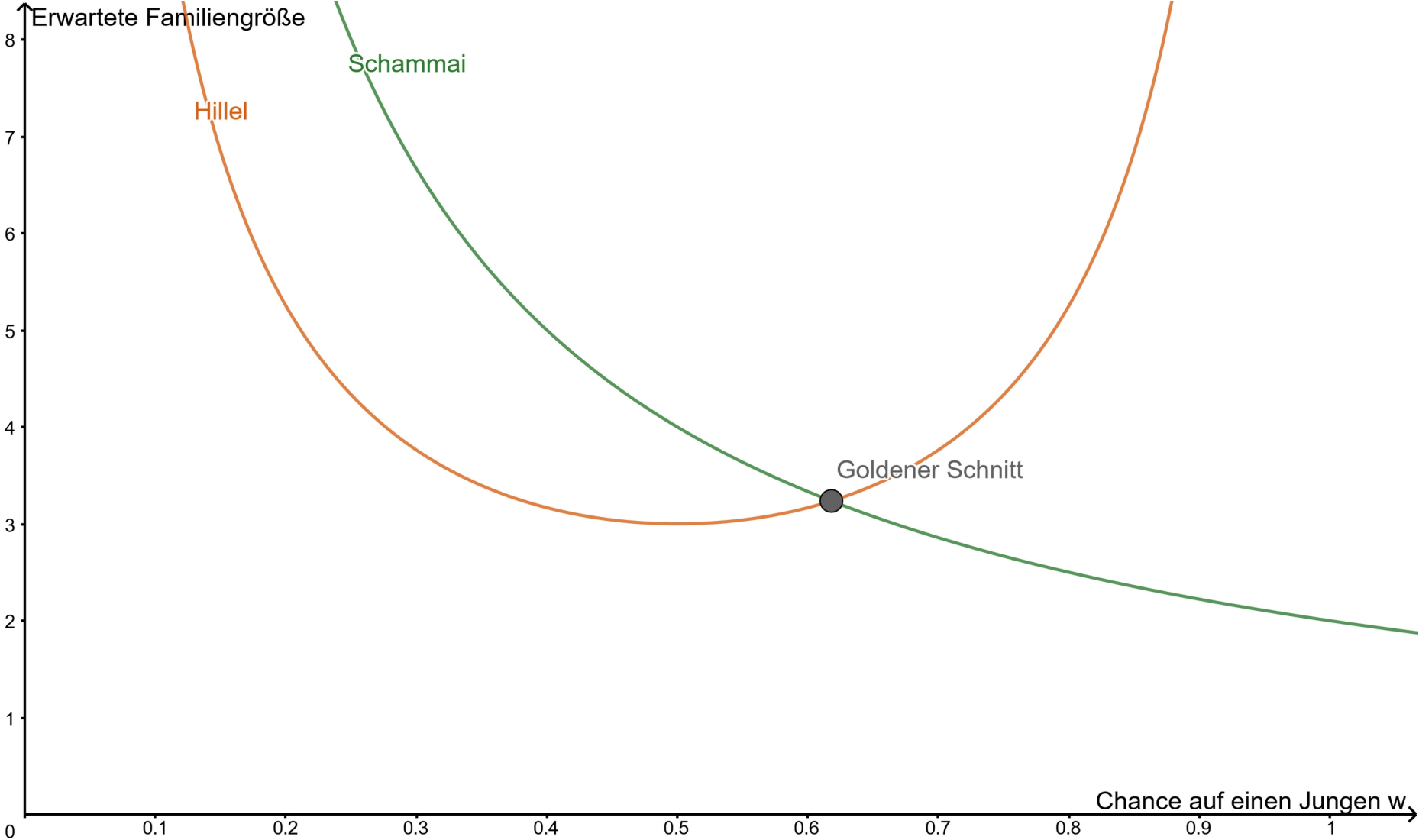
$$w = (-1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0,618$$



Altes Rathaus, Leipzig



Hillel vs. Schammai : Familie





- Hillel:

$$\text{Erwartete Anzahl von Mädchen} = (w^2 - w + 1) / w$$

$$\text{Erwartete Familiengröße} = (w^2 - w + 1) / (w - w^2)$$

$$\text{Mädchenanteil im Mittel} = (w^2 - w + 1) / w : (w^2 - w + 1) / (w - w^2) = 1 - w$$

- Schammai:

$$\text{Erwartete Anzahl von Mädchen} = 2 * (1 - w) / w$$

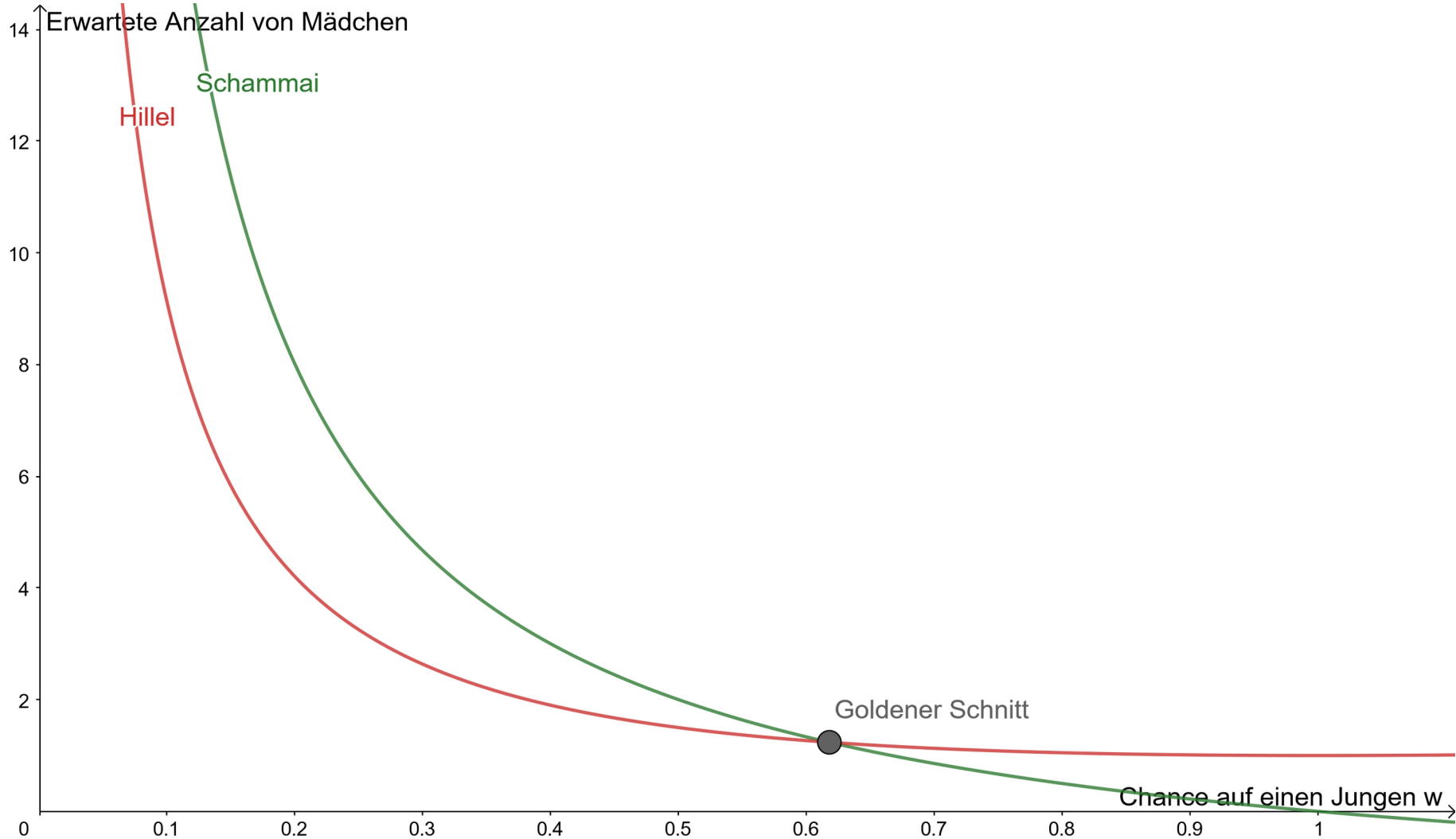
$$\text{Erwartete Familiengröße} = 2 / w$$

$$\text{Mädchenanteil im Mittel} = 2 * (1 - w) / w : 2 / w = 1 - w$$

In beiden Fällen entspricht der Mädchenanteil der Chance $1 - w$ auf eine Mädchengeburt, was man als geschlechtergerecht kennzeichnen kann.



Hillel vs. Schammai : Mädchen





Familie im Goldenen Schnitt

Sei exemplarisch $w = (-1 + \sqrt{5}) / 2$, d.h. die Vorschriften von Hillel und Schammai führen im Mittel zu der selben Familienstruktur, nämlich:

Erwartete Anzahl von Mädchen = $2 * (1 - w) / w$ (Schammai) = $2 * w \approx 1,236$

Erwartete Anzahl von Jungen = Erwartete Familiengröße – $2 * w$
= $2 / w$ (Schammai) – $2 * w = 2$

(beachte: $w^2 + w - 1 = 0$)

Falls die Chance w auf einen Jungen dem Goldenen Schnitt entspricht, so tut es auch die erwartete Struktur (Mädchen : Jungen $\approx 1,236 : 2 = 0,618$) einer nach Hillel bzw. Schammai gebildeten Familie.