

Was ist POLITIK ?

Politik ist ...

- “... auf die Durchsetzung bestimmter Ziele besonders im staatlichen Bereich und auf die Gestaltung des öffentlichen Lebens gerichtetes Handeln von Regierungen, Parlamenten, Parteien, Organisationen o. Ä.” <https://www.duden.de/>
- “... die Lehre vom Möglichen.” Otto von Bismarck 1867
- “... Streben nach Machtanteil oder nach Beeinflussung der Machtverteilung, sei es zwischen Staaten, sei es innerhalb eines Staates zwischen den Menschengruppen, die er umschließt.” Max Weber 1919
- “... alles, was mit Gestaltung und Einflussnahme in Gesellschaft zu tun hat, sowohl im persönlichen als auch im öffentlichen Bereich.” www.bpb.de, Das junge Politik-Lexikon
- “Der Sinn von Politik ist Freiheit.” Hannah Arendt
- “Der Gegenstand und das Ziel der Politik ist der Friede.” Dolf Sternberger 1961
- “Die funktionale Definition der Politik als **Herstellung kollektiv bindender Entscheidungen** für das Gesellschaftssystem dürfte derzeit das einzig solide Angebot sein; aber es bleibt umstritten, teils weil es zu weit, teils weil es zu eng gefasst ist.” Niklas Luhmann 1987

Entscheidungen: Wie können sich n Wähler auf eine von m Alternativen einigen?

zitiert nach <https://www.bpb.de/lernen/politische-bildung/>

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Annahmen

- Zur Wahl stehen die Alternativen $A, B, C, D, \dots, \Omega$ (z. B. Gesetzesvorschläge, Bewerber, ...).
- An der Wahl nehmen Wähler $1, 2, 3, \dots, n$ teil.
- Jeder Wähler erstellt eine **Reihung** der Alternativen, wobei bevorzugte Alternativen zuerst kommen und Indifferenzen zugelassen sind.
 - Beispiel: $C \succ B \sim D \succ F \succ G \sim A$
 - “Alternative A ist **besser als** Alternative B” (strikte Präferenz, “ $A \succ B$ ”)
“Alternative A ist **ebenso so gut wie** Alternative B” (Indifferenz, “ $A \sim B$ ”)
 - In der Reihung erscheint jede Alternative mindestens einmal. (**Vollständigkeit**)
 - In der Reihung erscheint jede Alternative höchstens einmal. (**Transitivität**)
 - Zyklische Präferenzen (etwa $A \succ B \succ C \succ A$) sind ausgeschlossen!

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Condorcet-Paradox

- Drei Alternativen A, B, C und drei Wähler 1, 2, 3 mit den Reihungen
 - Wähler 1 : $A > B > C$
 - Wähler 2 : $B > C > A$
 - Wähler 3 : $C > A > B$
- Iteratives Wahlverfahren: Lasse erst über A vs. B abstimmen, dann den Sieger gegen C.
 - A vs. B \rightarrow A gewinnt
 - A vs. C \rightarrow C gewinnt
- Beobachtungen
 - Wahlverfahren bevorzugt “dritte Alternative”.
 - Durch taktisches Wählen ($B > A > C$) hätte 1 die zweitbeste Alternative B durchsetzen können. (Vollständige Information vorausgesetzt.)

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Axiome

Ziel: Finde einen Algorithmus, der aus den individuellen (vollständige und transitive) Reihungen eine (vollständige und transitive) Gesamtreihung generiert, *die der Mehrheitsmeinung möglichst nahe kommt.*

Welche konkreten Eigenschaften soll das Wahlverfahren haben?

- Jede Vereinigung vollständiger transitiver Reihungen ist zulässig. (**Universalität**)
- Wenn sämtliche Wähler die Alternative A besser finden als B, dann soll A auch in der Gesamtreihung höher bewertet werden als B. (**Schwache Pareto-Optimalität**)
 - Verhindert in diesem Fall, dass die Gesamtreihung trivial ist: $A \sim B \sim C \sim D \sim \dots$
- Änderungen der individuellen Reihungen, die die Präferenz A vs. B jeweils unverändert lassen, führen nicht zu einer Umkehrung der Gesamtpräferenz A vs. B. (**Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**)
 - Die Gesamtpräferenz $A \succsim B$ bleibt erhalten, falls eine Alternative C ($\neq A, B$) gestrichen wird oder eine neue Alternative hinzukommt.

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Anwendung: Einer wird gewinnen

- Jede Vereinigung vollständiger transitiver Reihungen ist zulässig. (**Universalität**)
- Wenn sämtliche Wähler die Alternative A besser finden als B, dann soll A auch in der Gesamtreihung höher bewertet werden als B. (**Schwache Pareto-Optimalität**)
- Änderungen der individuellen Reihungen, die die Präferenz A vs. B jeweils unverändert lassen, führen nicht zu einer Umkehrung der Gesamtpräferenz A vs. B. (**Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**)

Ermittle Gewinner im Vierkampf

- Alternativen = Teilnehmer (Alice, Bob, Charly)
- Wähler = Disziplinen (Geländelauf, Schwimmen, Dressur-, Springreiten)
 - Geländelauf: $B \succ C \succ A$
 - Schwimmen: $B \succ A \succ C$
 - Dressur: $C \succ A \succ B$
 - Springreiten: $A \succ C \succ B$

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Beispiel: Relative Mehrheitswahl

- Jede Vereinigung vollständiger transitiver Reihungen ist zulässig. (**Universalität**)
- Wenn sämtliche Wähler die Alternative A besser finden als B, dann soll A auch in der Gesamtreihung höher bewertet werden als B. (**Schwache Pareto-Optimalität**)
- Änderungen der individuellen Reihungen, die die Präferenz A vs. B jeweils unverändert lassen, führen nicht zu einer Umkehrung der Gesamtpräferenz A vs. B. (**Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**)

Relative Mehrheitswahl: Gewählt ist die Alternative, die bei den meisten Wählern erstplatziert ist.

- Wähler 1: $C \succ B \succ A \succ D$ Alternative C gewinnt. $C \succ B \succ A \succ D$
- Wähler 2: $C \succ A \succ B \succ D$ Wenn A und D gestrichen werden, gewinnt B. $C \succ B \succ A \succ D$
- Wähler 3: $B \succ D \succ A \succ C$ Damit ist das Unabhängigkeitsaxiom verletzt. $B \succ C \succ D \succ A$
- Wähler 4: $A \succ B \succ D \succ C$ Auch die Pareto-Optimalität ist nicht gegeben. $B \succ C \succ A \succ D$
- Wähler 5: $D \succ B \succ A \succ C$ $B \succ C \succ D \succ A$
- Gesamtreihung: $C \succ A \sim B \sim D$ $B \succ A \sim C \sim D$

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Unmöglichkeitstheorem



- Jede Vereinigung vollständiger transitiver Reihungen ist zulässig. (Universalität)
- Wenn sämtliche Wähler die Alternative A besser finden als B, dann soll A auch in der Gesamtreihung höher bewertet werden als B. (Schwache Pareto-Optimalität)
- Änderungen der individuellen Reihungen, die die Präferenz A vs. B jeweils unverändert lassen, führen nicht zu einer Umkehrung der Gesamtpräferenz A vs. B. (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)

Satz (Arrow 1951) Sofern mehr als zwei Alternativen zur Wahl stehen, erfüllt nur eine **Diktatur** die genannten Eigenschaften.

Kenneth Arrow (1921 – 2017)

Nobel-Preis für Wirtschaftswissenschaften 1972

Bildrechte: Linda A. Cicero / Stanford News Service

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Borda-Wahl

- “Es gibt kein faires Abstimmungsverfahren.”
- Erhalte positives Resultat bei Abschwächen der Voraussetzungen.
- **Borda-Wahl**
 - Die Wähler vergeben Punkte gemäß ihrer Reihung.
 - Beispiel: $A \succ B \succ C \rightarrow 3$ Punkte für A, 2 für B, 1 für C
 - Die Punkte werden aufsummiert und bilden eine neue Reihung.
 - Beispiel: Wähler 1 reiht $A \succ B \succ C \rightarrow 3$ Punkte für A, 2 für B, 1 für C
Wähler 2 reiht $B \succ A \succ C \rightarrow 2$ Punkte für A, 3 für B, 1 für C
Insgesamt je 5 Punkte für A und B, 2 für C $\rightarrow A \sim B \succ C$
 - Universalität und schwache Pareto-Optimalität sind erfüllt, jedoch nicht Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.

Entscheidungen, Abstimmungen, Wahlverfahren

Satz von Gibbard und Satterthwaite

- Fordere statt Gesamtreihung nur eine einzige Alternative als Gewinner.

Satz (Gibbard 1973; Satterthwaite 1975) Ein Abstimmungsverfahren, das aus individuellen Reihungen eine Gewinneralternative nominiert, erfüllt (mindestens) eine der folgenden Eigenschaften.

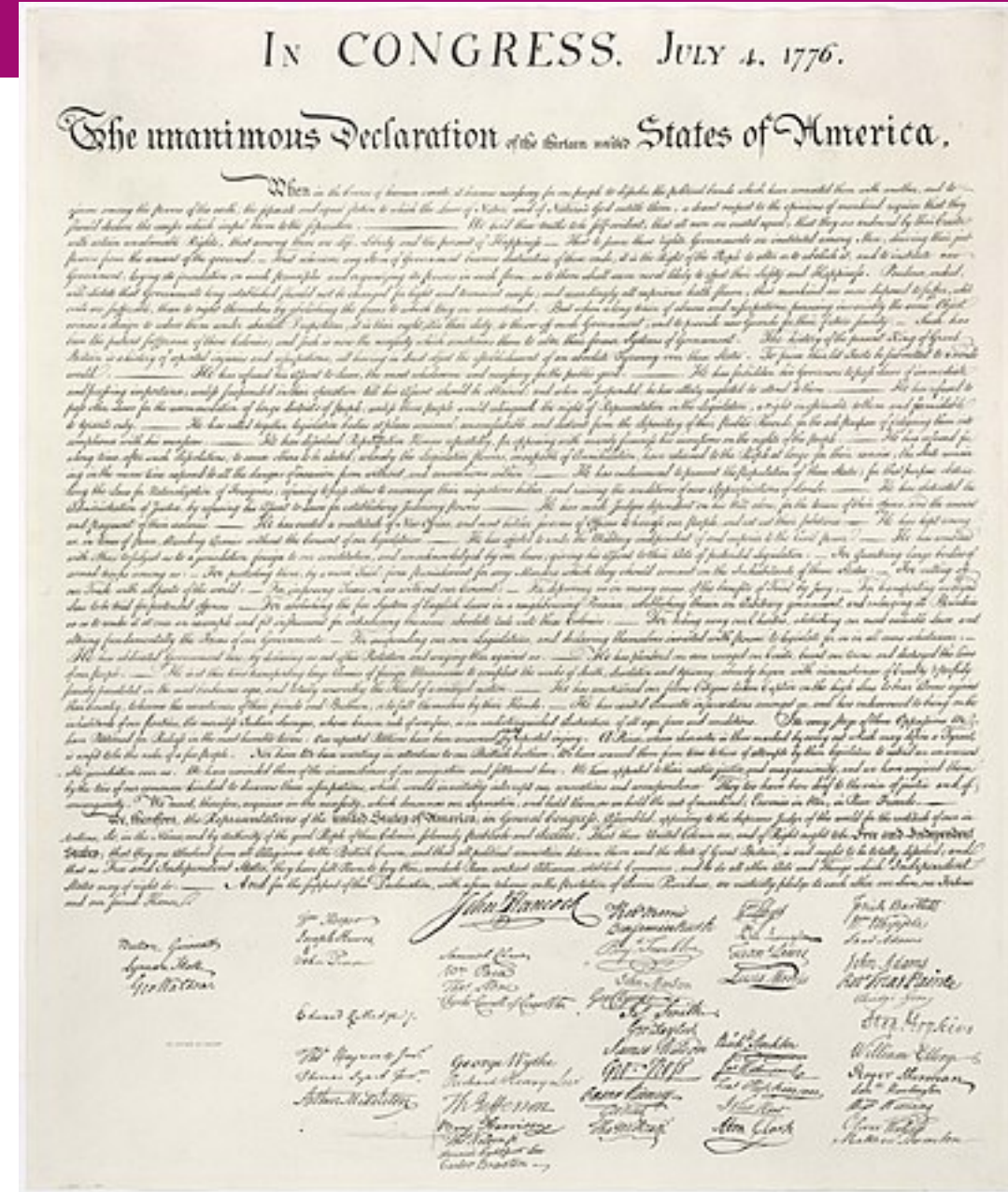
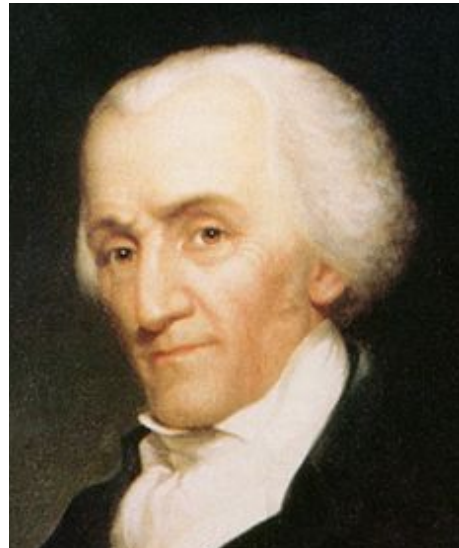
- Es gibt nur zwei Alternativen.
- Es gibt eine Alternative, die unabhängig von den individuellen Reihungen nie nominiert wird.
- Das Verfahren ist diktatorisch.
- Es ist **manipulierbar**: Unter bestimmten Umständen kann ein Wähler durch Änderung seiner Reihung die Wahl zu seinen Gunsten beeinflussen.

Folgerung Die Borda-Wahl ist (bei mehr als zwei Alternativen) manipulierbar.

Independence Day

4. Juli 1776

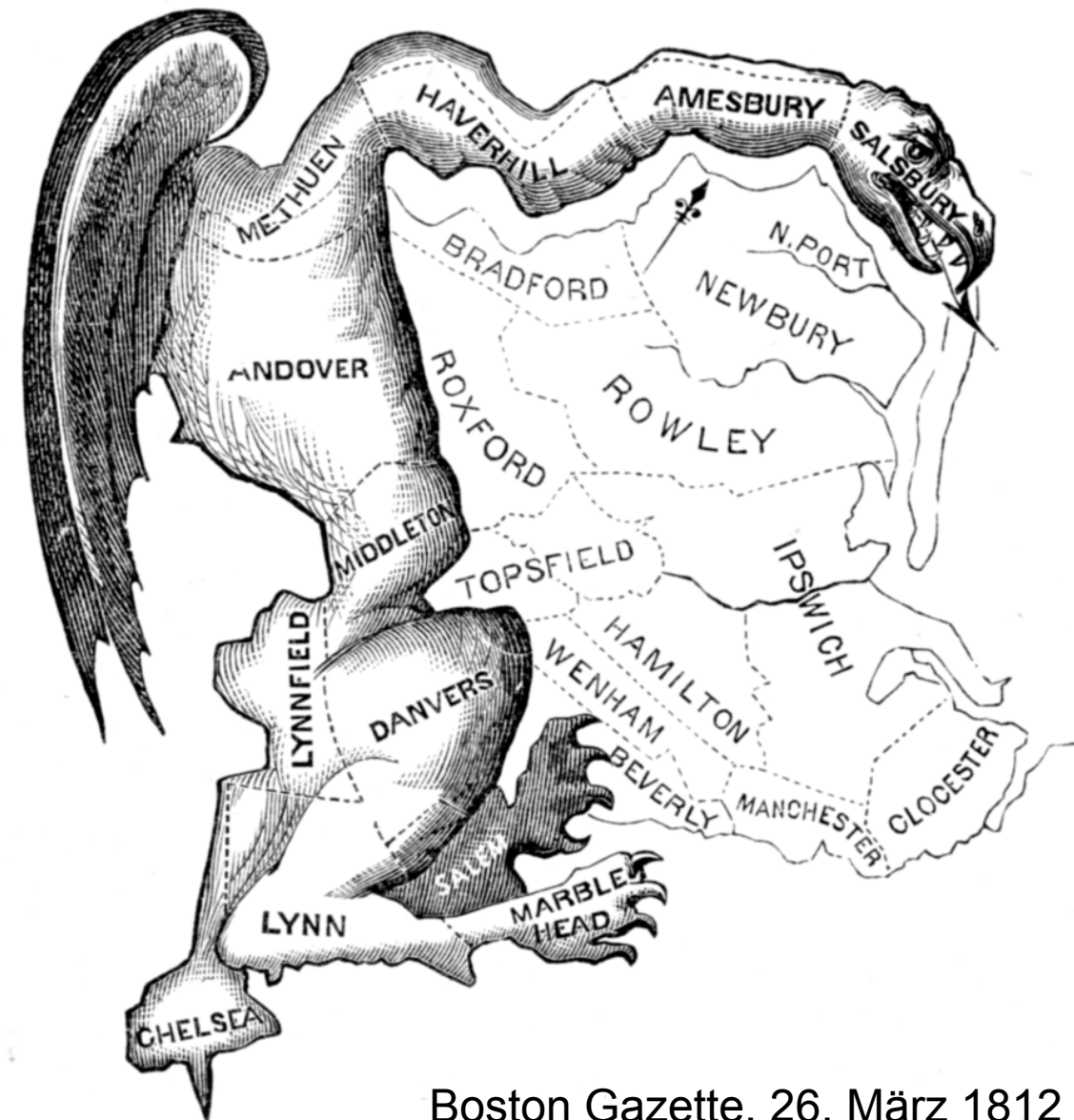
- Zweiter Kontinentalkongress in Philadelphia (seit 1775)
- Vertreter von 12 der 13 vertretenen britischen Kolonien stimmen für Unabhängigkeit von Großbritannien.
- Unterzeichnet von 56 Delegierten.
- Darunter *Elbridge Gerry*
- 1744 – 1814
- Fünfter Vizepräsident der USA (1813–14)
- Gouverneur von Massachusetts (1810–12)
- Gesetz zum Neuzuschnitt der Wahlkreise für den Senat von Massachusetts (1812)



Gerrymandering

“Optimales” Design von Wahlkreisen

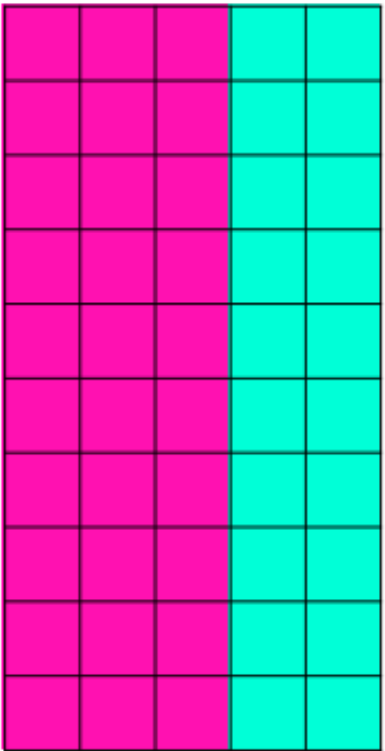
- Ziel: (knappe) Mehrheit in möglichst vielen Wahlkreisen; führt zu teils eigenartigen Formen
- Salamander → “gerrymander”
- Wahlen von 1812: Gerrys Partei verlor die Mehrheit Repräsentantenhaus von Massachusetts und den Posten des Gouverneurs, jedoch nicht den Senat



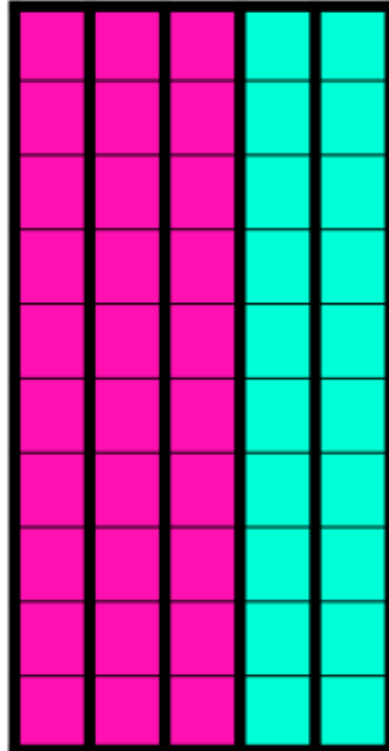
Boston Gazette, 26. März 1812

Gerrymandering

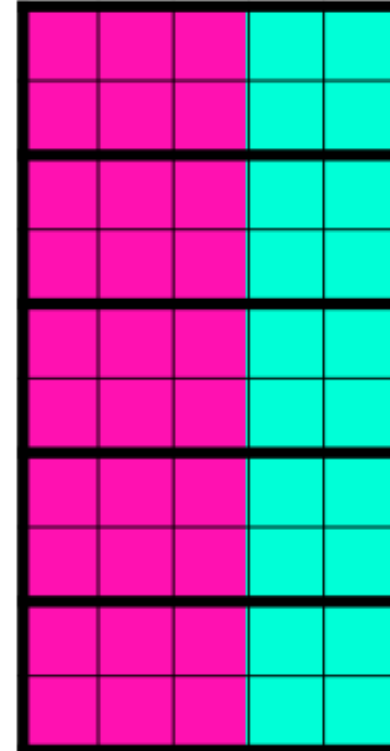
“Optimales” Design von Wahlkreisen



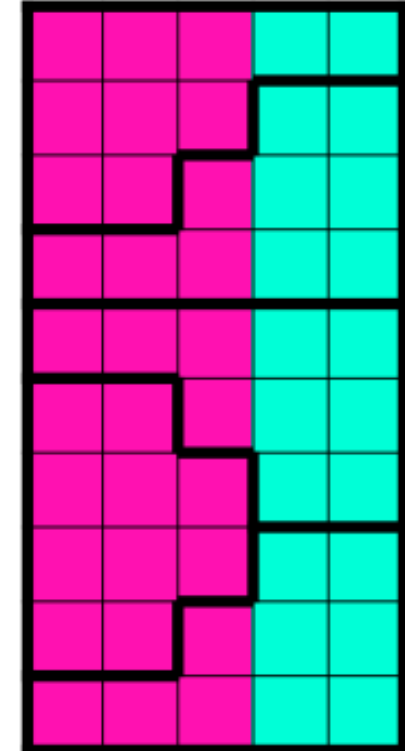
60 % magenta
40 % cyan



3 Sitze magenta
2 Sitze cyan



5 Sitze magenta
0 Sitze cyan



2 Sitze magenta
3 Sitze cyan

Mathematik trifft POLITIK

Frankfurter Allgemeine Zeitung vom 21.10.2003
Briefe an die Herausgeber, Seite 8

Zweierlei Mathematik

Zum Artikel „Erst Renten, dann Rüstung“ von Karl Moersch (F.A.Z. vom 11. Oktober) noch ein historisches Detail, von dem der damalige Bundestagsabgeordnete der CDU Alphons Horten berichtete: Zusammen mit Wilfried Schreiber war auch der Münsteraner Sozialethiker und spätere Erzbischof von Köln, Professor Dr. Joseph Höffner, als Sachverständiger zu einem Gespräch ins Kabinett geladen worden. Höffner hatte zusammen mit seinen Kollegen Achinger, Muthesius und Neundorfer das sogenann-

te „Vier-Professoren-Gutachten“ zur Rentenreform verfaßt. Er war mit Schreiber der Meinung, daß eine langfristig solide Grundsicherung nicht über ein Rentenniveau von 50 Prozent hinausgehen könne. Bei der Diskussion darüber fiel das Wort: „Man kann doch keine Rentenreform gegen die Mathematik machen.“

Konrad Adenauer entgegnete den Professoren: „Müssen Sie die nächsten Wahlen gewinnen oder ich?“ Damit war alles gesagt und entschieden. Inzwischen hat uns die Wahrheit der Professoren eingeholt.

Professor Dr. Lothar Roos, Bonn

