

Kulturgut Mathematik und Leben

Daniel Potts

Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Semester	Thema	Titel	Referent·in	Ort
WiSe 22/23	Religion	Das salomonische Urteil im mathematischen Kontext	Prof. Dr. V. Shikhman	Jakobisaal, Ev.-Luth. Gemeinde
SoSe 2023	Politik	Kann Mathematik helfen, ein faires Wahlverfahren festzulegen?	Prof. Dr. Ph. Reiter	Stadtverordnetensaal, Rathaus
WiSe 23/24	Kunst	Mathematik und Ästhetik	Prof. Dr. B. Güneysu	Schlossbergmuseum, Chemnitz
SoSe 2024	Justiz	Iudex non calculat (?)	Prof. Dr. O. Ernst	Landgericht Chemnitz
SoSe 2024	Geschichte	Deutsche Mathematik im Dritten Reich	Prof. Dr. P. Stollmann	Hörsaal C10.112, TU Chemnitz
WiSe 24/25	Logistik	Es kann und muss nicht immer alles optimal sein!	Prof. Dr. C. Helmberg	Industriemuseum Chemnitz
SoSe 2025	Musik	Dimension und Klang	Prof. Dr. U. Schwarz	Städt. Musikschule Chemnitz
SoSe 2025	Musik	Alles eine Frage der Stimmung?	Prof. Dr. U. Freiberg	Städt. Musikschule Chemnitz
WiSe 25/26	Arbeit	Faire Löhne mathematisch aushandeln	Prof. Dr. V. Shikhman	Haus der Gewerkschaften, Chemnitz

- ▶ Einleitung zur Fourier Analysis
- ▶ bildgebende Verfahren in der Medizin
 - ▶ Computertomographie
 - ▶ Magnetresonanztomographie
- ▶ Datenkompression von Bildern
- ▶ effiziente Rekonstruktionstechniken

Jede Kurve ist eine Summe von Schwingungen



Joseph Fourier (1768–1830)

„Jede periodische Erscheinung lässt sich als Überlagerung einfacher Schwingungen darstellen.“

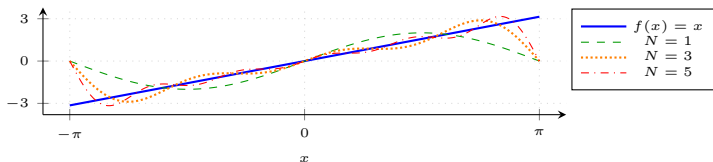
Die Idee in einem Satz: Jede (periodische) Kurve lässt sich durch *Sinus-Funktionen* und *Kosinus-Funktionen* zusammensetzen – wie Bausteine.

Fourier-Reihe (Bausteine: Sinus- und Kosinus-Schwingungen):

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Beispiel $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$:

$N = 1$: $2 \sin x$; $N = 3$: $+\sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x$; $N = 5$: $+\dots$
Mehr Bausteine $\Rightarrow$ bessere Annäherung.



Anwendung: MP3

Von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation

Schritt 1 – Fourier-Reihe

periodisch, Periode T

Diskrete Frequenzen n/T , Koeffizienten c_n :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i \frac{n}{T} x} dx$$

Schritt 2 – Grenzübergang $T \rightarrow \infty$

- ▶ Funktion muss *nicht mehr periodisch* sein.
- ▶ n/T (diskret) $\rightarrow \xi \in \mathbb{R}$ (kontinuierlich).
- ▶ $\frac{1}{T} \sum_n \rightarrow \int d\xi$ (Summe $\rightarrow$ Integral).

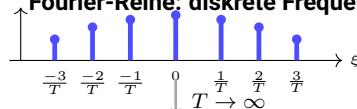
Schritt 3 – Fourier-Transformation

beliebige Funktion

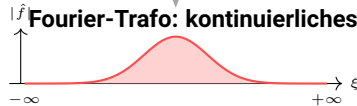
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

$\hat{f}(\xi)$: Stärke der Frequenz ξ im Signal.

Fourier-Reihe: diskrete Frequenzen



Fourier-Trafo: kontinuierliches Spektrum



Satz: Die Fourier-Transformation zeigt, *welche Frequenzen* in einem Signal stecken – auch wenn es *nicht periodisch* ist.

Ein Bild besteht aus Pixeln – Pixel sind Zahlen

Was ist ein digitales Bild?

Ein Bild ist ein *Raster von Pixeln*
– kleine Quadrate, die
zusammen das Bild ergeben.

Graustufen-Bild:

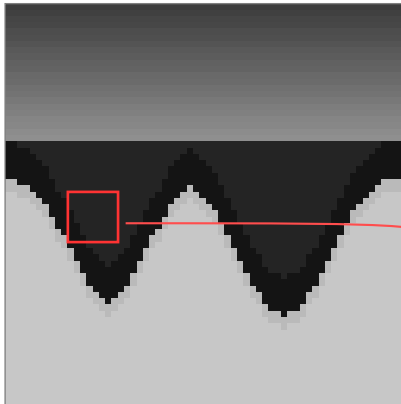
Jeder Pixel ist *genau eine Zahl*:

0 (schwarz) ... 255 (weiß)

Das Bild rechts hat 64×64
= 4096 Pixel, also
4096 Zahlen.

Ein Full-HD-Bild (1920×1080)
enthält bereits ≈ 2 Mio. Zahlen.

64×64 Pixel



Zoom: Zahlenwerte

220	220	220	220	220	220	220	220	220
220	220	220	220	220	220	220	220	220
220	220	220	220	220	220	220	220	220
235	220	220	220	220	220	220	220	220
235	220	220	220	220	220	220	220	220
235	235	220	220	220	220	220	220	220
235	235	220	220	220	220	220	220	220
235	235	235	220	220	220	220	220	220



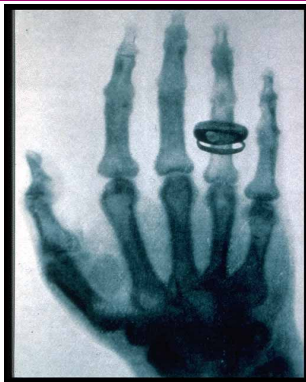
W. C. Röntgen
Physik
Nobelpreis 1901



G.H. Hounsfield A.M. Cormack
Medizin Nobelpreis 1979



P. C. Lauterbur P. Mansfield
Medizin Nobelpreis 2003



Hand, aufgenommen von Prof. Röntgen am 23. Januar 1896

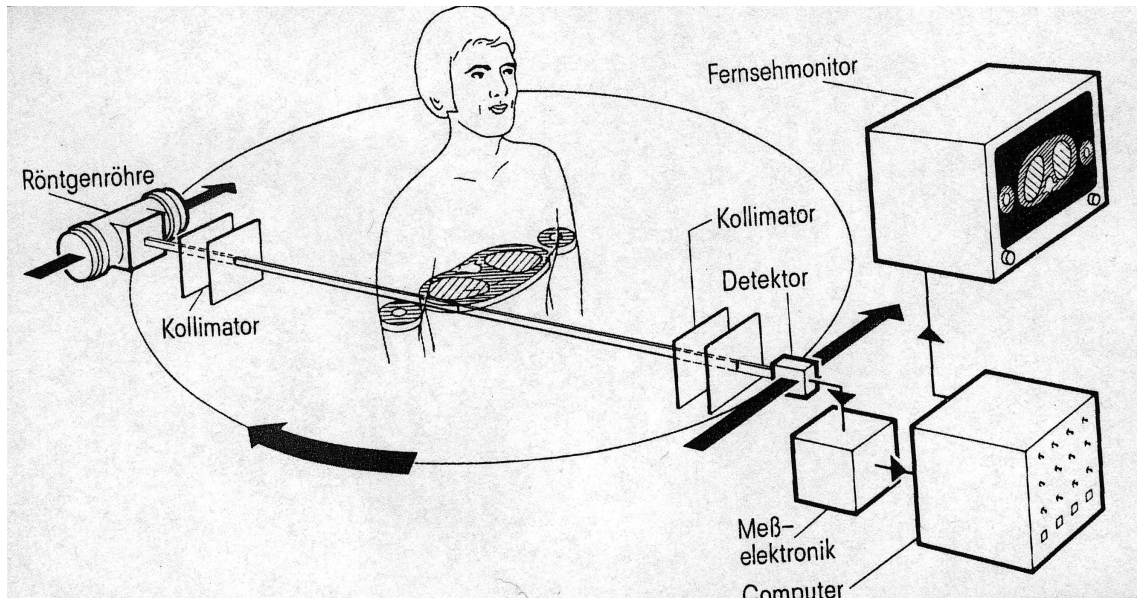
Historisches Röntgengerät

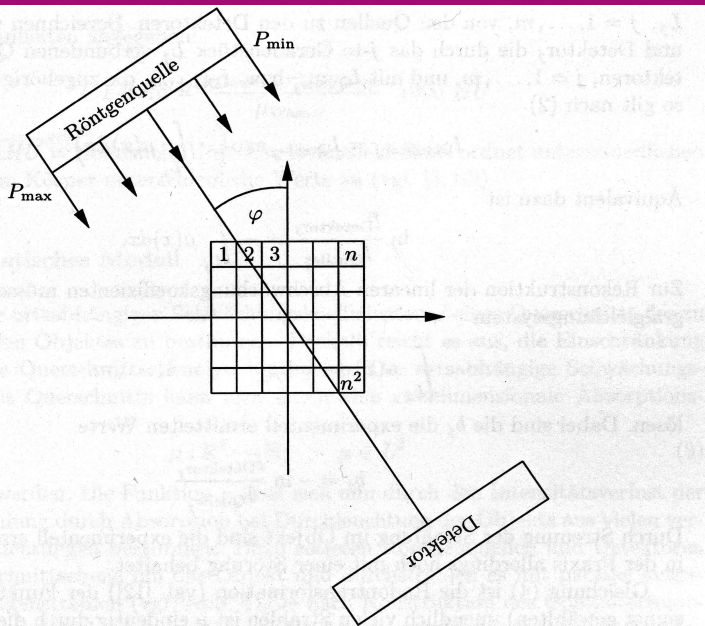
Röntgenbild eines Thorax

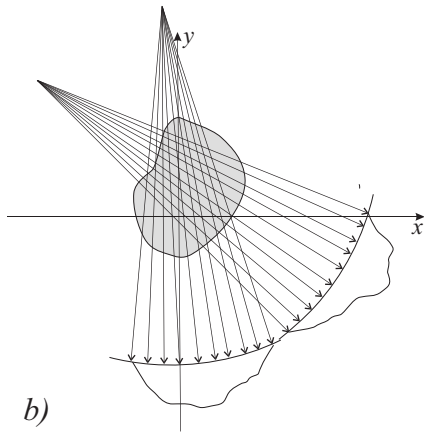
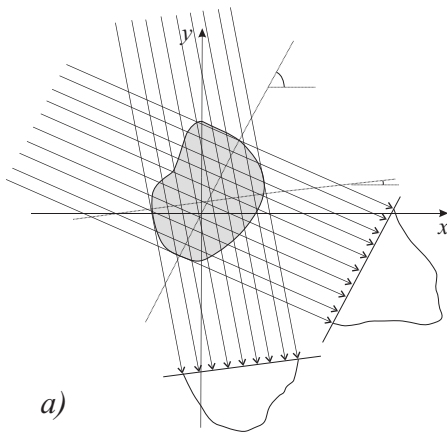
Röntgendiagnostik: Die unterschiedlich dichten Gewebe des menschlichen (oder tierischen) Körpers absorbieren die Röntgenstrahlen unterschiedlich stark, so dass man eine Abbildung des Körperinneren erreicht.

weitere Anwendungen: Materialprüfung, Qualitätssicherung, Archäologie, Röntgen-Strukturanalyse

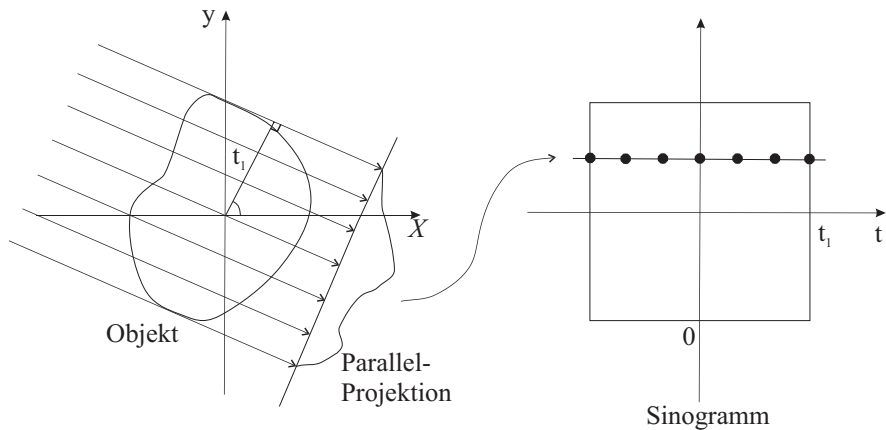
- ▶ Die Computertomographie basiert auf einem mathematischen Verfahren, das 1917 von dem Mathematiker **Johann Radon** entwickelt wurde.
- ▶ Die Radontransformation ermöglicht die zerstörungsfreie räumliche Aufnahme eines Objektes mit seinen gesamten Innenstrukturen.
- ▶ Nach Vorarbeiten des Physikers Allan M. Cormack in den 1960er Jahren realisierte der Elektrotechniker Godfrey Hounsfield mehrere Prototypen. Die erste CT-Aufnahme wurde 1971 an einem Menschen vorgenommen. Beide erhielten für ihre Arbeiten 1979 gemeinsam den Nobelpreis in Medizin.







Parallel-Projektionen (links), Fächerstrahl-Projektionen (rechts).



Parallel-Projektion für einen Winkel θ und die zugehörigen Punkte im Sinogramm.

Die Idee (z. B. CT-Scanner):

Röntgenstrahlen durchdringen das Objekt in vielen Richtungen. Jede Messung liefert eine *Summe* der Pixelwerte entlang eines Strahls.

Das Gleichungssystem:

Gesucht: Bild $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (alle Pixelwerte).

Gemessen: Strahlsummen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

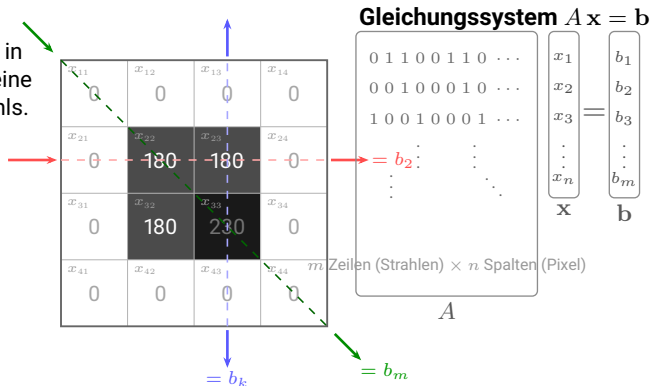
A_{ij} : Anteil von Pixel j an Messung i .

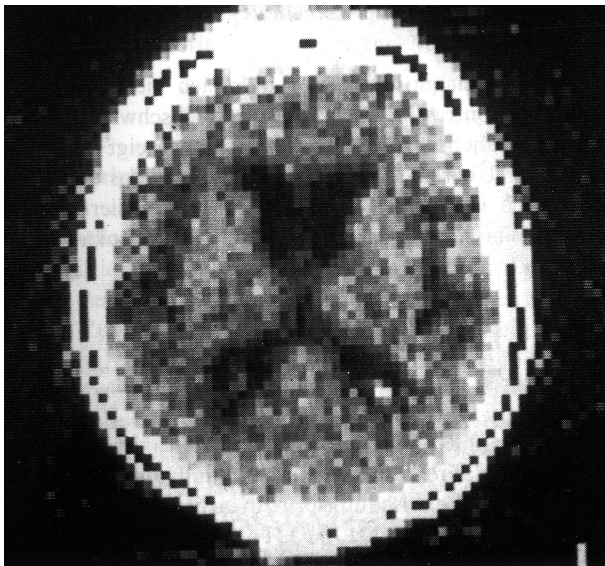
$m < n$: System ist unterbestimmt!

Lösung: Minimiere

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x})$$

$\mathcal{R}$: Regularisierung (Glattheitsannahme).



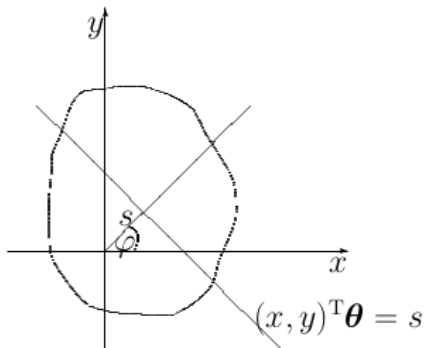


$$R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$$

$$Rf(s, \varphi) := \int_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}=s} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \left(\boldsymbol{\theta} := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right)$$



J. I. Radon

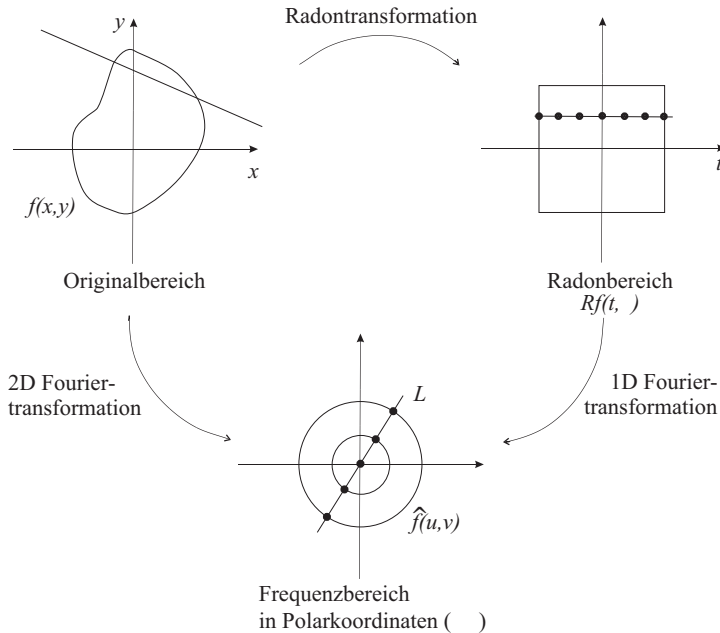


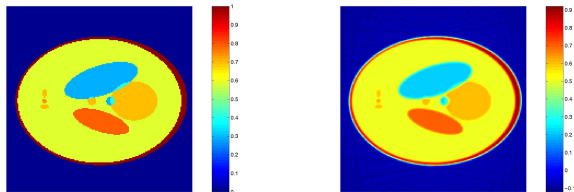
Fourier-Transformation von $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, ($n = 1, 2$)

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \xi} \, d\mathbf{x}$$

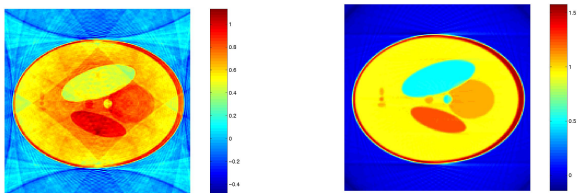
Satz: Falls $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, dann

$$\hat{f}(\sigma\theta) = \int_{\mathbb{R}} Rf(s, \varphi) e^{-2\pi i s\sigma} \, ds = \widehat{Rf}(\sigma, \varphi) \quad \left(\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right).$$

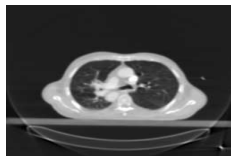
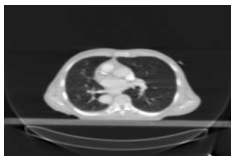
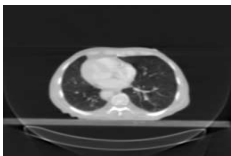
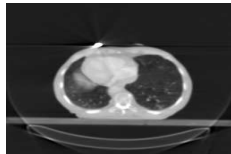
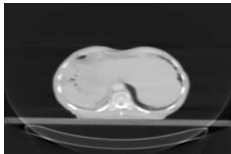
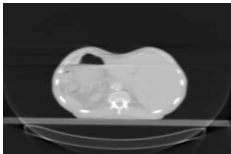


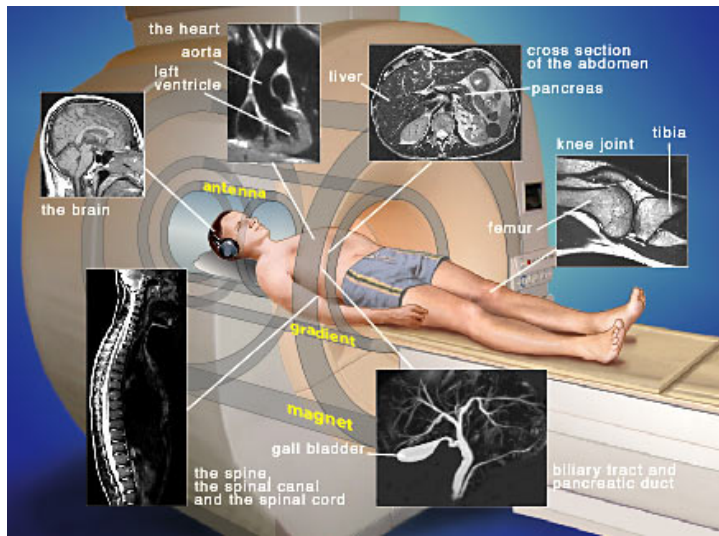


Shepp-Logan Phantom Rekonstruktion mit FB (20 Sek.)



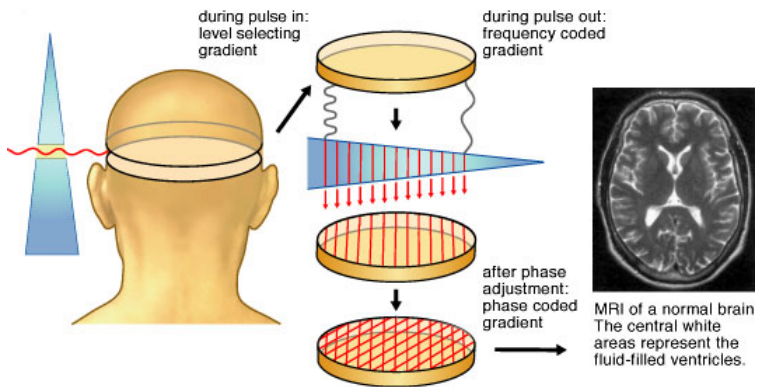
FFT-Rekonstruktion (2 Sek.) NFFT-Rekonstruktion (3 Sek.)





- ▶ Die physikalische Grundlage der Magnetresonanztomographie (MRT) bildet die Kernspinresonanz. Hier nutzt man die Tatsache, dass Protonen einen Eigendrehimpuls (Spin) besitzen und Atomkerne dadurch ein magnetisches Moment erhalten.
- ▶ Ein Atomkern kann als ein magnetischer Kreisel angesehen werden.



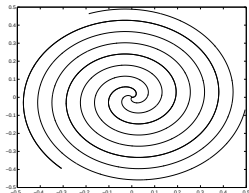


$$s(t) = \int_{\mathbb{R}^2} m(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}(t)\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

$$s_{\kappa} \approx \tilde{s}_{\kappa} := \sum_{\rho=0}^{N_1 N_2 - 1} m_{\rho} e^{i\mathbf{k}_{\kappa} \mathbf{r}_{\rho}}$$

$$\mathbf{A} := \left(e^{i\mathbf{k}_{\kappa} \mathbf{r}_{\rho}} \right)_{\kappa=0; \rho=0}^{M-1; N_1 N_2 - 1}$$

$$\mathbf{s} \approx \mathbf{A} \mathbf{m}$$

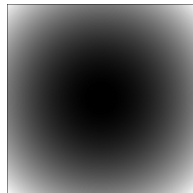


$$s(t) = \int_{\mathbb{R}^2} m(\mathbf{r}) e^{i\omega(\mathbf{r})t} e^{i\mathbf{k}(t)\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

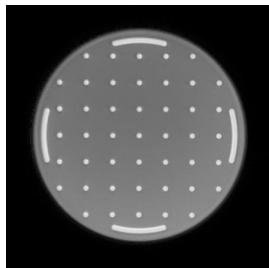
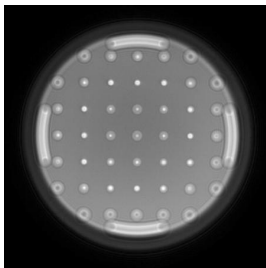
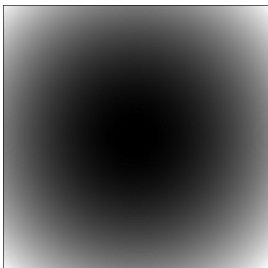
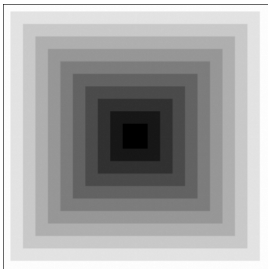
$$s_{\kappa} \approx \tilde{s}_{\kappa} := \sum_{\rho=0}^{N_1 N_2 - 1} m_{\rho} e^{i\omega_{\rho} t_{\kappa}} e^{i\mathbf{k}_{\kappa} \mathbf{r}_{\rho}}$$

$$\mathbf{H} := \left(e^{i\omega_{\rho} t_{\kappa}} e^{i\mathbf{k}_{\kappa} \mathbf{r}_{\rho}} \right)_{\kappa=0; \rho=0}^{M-1; N_1 N_2 - 1}$$

$$\mathbf{s} \approx \mathbf{H} \mathbf{m}$$



$$e^{2\pi i k x} \approx \frac{1}{\alpha N \hat{\varphi}(x)} \sum_{l=-\alpha N/2}^{\alpha N/2-1} \psi\left(k - \frac{l}{\alpha N}\right) e^{2\pi i \frac{l x}{\alpha N}},$$

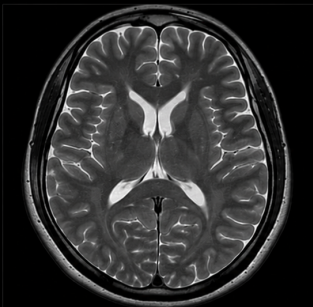




Ingrid Daubechies

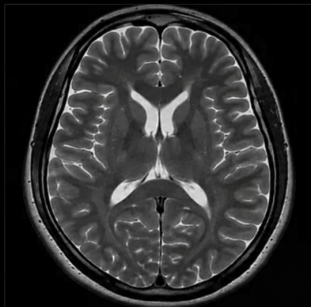
- ▶ **Mathematikerin** und Pionierin der Wavelet-Theorie
- ▶ Entwickelte die ersten **praktisch nutzbaren Wavelets** (1988)
- ▶ Erste Frau, die Präsidentin der **International Mathematical Union** (2014)
- ▶ Ihre Arbeit ermöglichte die **effiziente Kompression** von Bildern, Videos und Musik

Original (DICOM)



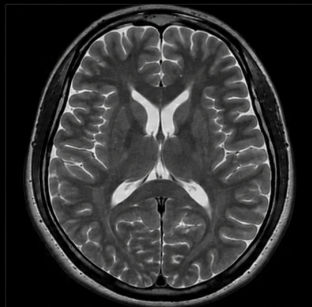
Format: DICOM (verlustfrei)
Auflösung: 2048 × 2048 Pixel
Graustufen: 16 Bit
Dateigröße: ca. **8,0 MB**
Kompression: **1:1 (keine)**

JPEG komprimiert (Qualität 20)



Format: JPEG
Qualität: 20 (sehr starke Kompression)
Dateigröße: ca. **0,4 – 0,5 MB**
Kompressionsrate: ca. **15:1 – 30:1**
Einsparung: ca. **95 %**

Wavelet komprimiert (JPEG2000, 20:1)



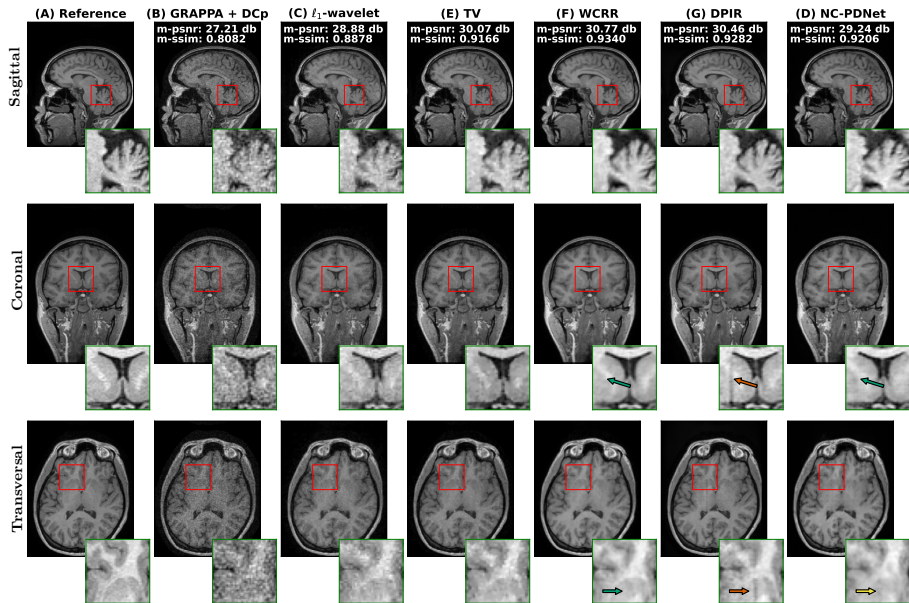
Format: JPEG2000 (Wavelet)
Kompressionsrate: 20:1
Dateigröße: ca. **0,4 MB**
Einsparung: ca. **95 %**
Vorteil: **weniger sichtbare Artefakte, bessere Detailerhaltung**

Zusammenfassung: Bei gleicher Kompressionsrate (~20:1) zeigt die Wavelet-Kompression deutlich weniger Artefakte als JPEG. JPEG erzeugt Blockartefakte durch 8×8-Blöcke, Wavelets arbeiten multiskalig und erhalten Strukturen besser.

- ▶ **Wavelets** behalten **Kanten und Details** besser
- ▶ **Keine "Blockeffekte"** wie bei JPEG
- ▶ **Ideal für medizinische Bilder, Archivierung, Fotos**

- ▶ **Mehr Speicherplatz** für Fotos, Videos, Medizinbilder
 - ▶ **Schnellere Übertragung** im Internet und in der Medizin
 - ▶ **Bessere Bildqualität** bei hoher Kompression
 - ▶ **Grundlage für** JPEG 2000, MRI-Scans
-
- ▶ Warum ein Bild rekonstruieren, wenn wir es zu **95% komprimieren** können?
 - ▶ Können wir die **5 wichtigen Prozente** rekonstruieren und sparen dabei viele Messungen?

Die **Compressed-Sensing** ist eine Rekonstruktionstechnik, die die Scan-Geschwindigkeit erhöht, indem sie im k-Raum weniger Datenpunkte erfasst und iterative, nichtlineare Algorithmen zur Rekonstruktion Bilder nutzt. Durch die Nutzung der „Bildspärlichkeit“ verkürzt sie die Scan-Zeiten von Minuten auf Sekunden und minimiert Bewegungsartefakte.



Mathematik fürs Leben.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Semester	Thema	Referent:in
WiSe 26/27	Philosophie	Prof. Dr. Kay Herrmann
SoSe 2027	Liebe	Prof.Dr. Uta Freiberg
WiSe 27/28	Sport	Dr. Sebastian Lämmel