Faire Löhne mathematisch aushandeln

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Faire Löhne

Robert Bosch: **„Ich zahle nicht gute Löhne, weil ich viel Geld habe, sondern ich habe viel Geld, weil ich gute Löhne bezahle."**

Henry Ford: **„Es ist nicht der Unternehmer, der die Löhne zahlt – er übergibt nur das Geld. Es ist das Produkt, das die Löhne zahlt."**

Gerechtigkeit

„Was ist Gerechtigkeit? Keine andere Frage ist so leidenschaftlich erörtert, für keine andere Frage so viel kostbares Blut, so viel bittere Tränen vergossen worden, über keine andere Frage haben die erlauchtesten Geister – von Platon bis Kant – so tief gegrübelt. Und doch ist die Frage heute so unbeantwortet wie je.“

Hans Kelsen (1881-1973), bedeutender Rechtswissenschaftler

„Da sich alle in der gleichen Lage befinden und niemand Grundsätze ausdenken kann, die ihn aufgrund seiner besonderen Verhältnisse bevorzugen, sind die Grundsätze der Gerechtigkeit das Ergebnis einer fairen Übereinkunft oder Verhandlung.“

John Rawls (1921-2002), bedeutender Philosoph

Produktion

Designed by Freepik

Ein Kapitalist produziert zusammen mit mehreren Arbeitern Güter, welche dann verkauft werden. Dadurch werden Profite generiert. Es können bis zu **m** Arbeitern eingestellt werden. Die entsprechenden Profite werden durch eine Funktion dargestellt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}), \mathbf{i} = 1, \ldots, \mathbf{m},$$

wobei **i** die Anzahl tatsächlich Beschäftigter bezeichnet.

Profit

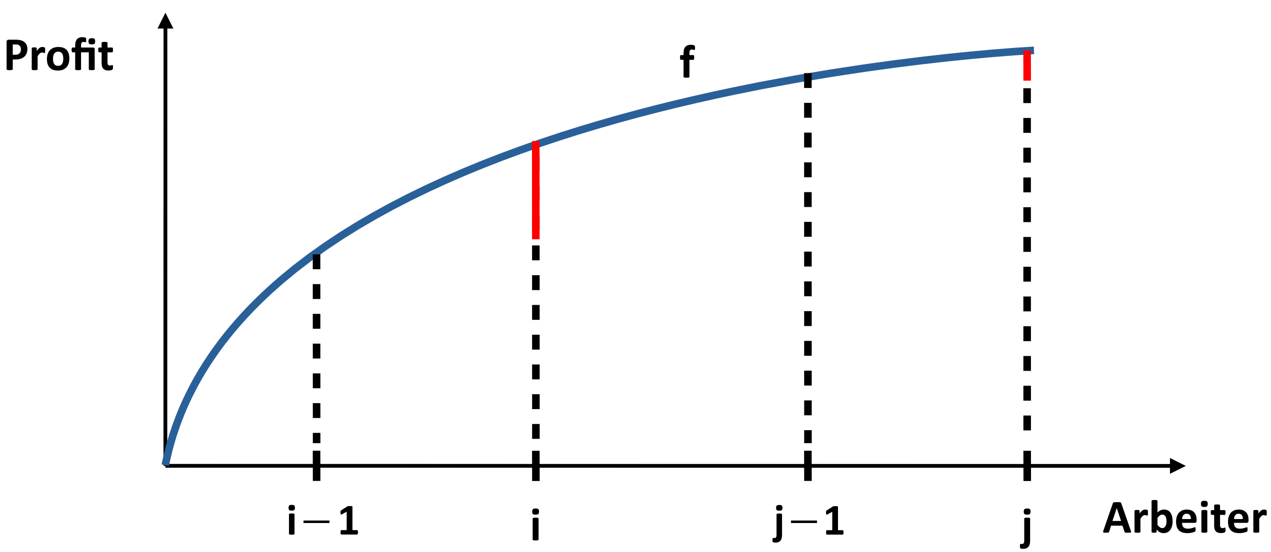
Annahmen an den Profit f als Funktion von i:

- Monotonie, d.h. Arbeiter generieren Mehrwert:

$$f(i) \leq f(j) \text{ für alle } i \leq j.$$

- Konkavität, d.h. jeder nächste Arbeiter generiert weniger an Mehrwert als zuvor:

$$f(j) - f(j-1) \leq f(i) - f(i-1) \text{ für alle } i \leq j.$$



Gesetz vom abnehmenden Grenzprodukt:

Der zusätzliche Output wird immer geringer, je mehr Input eingesetzt wird.

Kooperatives Spiel

- Kapitalist steigert Profite durch die Einstellung von Arbeitern;
- Arbeiter können ohne den Kapitalisten nicht produzieren.

Wir ordnen den sogenannten Koalitionen **S** also folgende Werte zu:

$$v(S) = \begin{cases} f(i)\text{, falls S aus dem Kapitalisten und i Arbeitern besteht} \\ 0\text{, sonst} \end{cases}$$

Um den Profit zu maximieren, bildet sich nun die große Koalition **N** bestehend aus dem Kapitalisten und allen **m** zur Verfügung stehenden Arbeitern. Wie soll dann der kooperativ erzielte Profit $v(N) = f(m)$ unter den Spielern fair verteilt werden? Wie hoch soll der gerechte Lohn für die erbrachte Arbeit sein und wie viel bleibt dem Kapitalisten für sein Unternehmertum?

Kooperative Spieltheorie

In der kooperativen Spieltheorie liegt der Fokus auf den Auszahlungen, die durch die Kooperation begründet sind. Hier werden durchsetzbare Vereinbarungen getroffen und eine Zentralinstanz ist in der Lage, das Verteilungsproblem zu lösen. Die Auszahlungen der Spieler beruhen insbesondere auf zwei Pfeilern. Zum einen hängen die Auszahlungen von der **Koalitionsfunktion** ab, diese beschreibt das kooperative Ergebnis der Spieler, die sich zu der jeweiligen Koalition zusammengeschlossen haben. Zum anderen ist das angewandte **Lösungskonzept** entscheidend, um das kooperative Ergebnis der Koalition fair zu verteilen. Die verschiedenen Lösungskonzepte definieren Fairness dabei durch die Erfüllung verschiedener Eigenschaften.

Designed by Freepik

Lloyd S. Shapley, 1923-2013

Lloyd S. Shapley
1980

Lloyd S. Shapley war ein Mathematiker und Professor an der University of California, Los Angeles (UCLA). Er leistete grundlegende wie bahnbrechende Beiträge auf dem Gebiet der mathematischen Ökonomie und insbesondere der Spieltheorie. Bekannt ist der nach ihm benannte Shapley-Wert sowie der Gale-Shapley-Algorithmus. Zusammen mit Alvin E. Roth erhielt Shapley 2012 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften „für die Theorie stabiler Verteilungen und die Praxis des Marktdesign".

Axiome der Gerechtigkeit I

Gegeben sei ein kooperatives Spiel mit N Spielern und einer Wertefunktion $v(S)$, wobei S Koalitionen aus den Spielern $1,\ldots,N$ bezeichnet.

Folgende Anforderungen werden an eine Auszahlung $\phi_k, k=1,\ldots,N$ gestellt:

- Axiom EFFIZIENZ: Gesamtwert wird vollständig verteilt, d.h.

$$\sum_{k=1}^{N} \phi_k = v(N).$$

- Axiom TAUGENICHTS: Wer zu keiner Koalition S beiträgt, kriegt nichts, d.h.

$$\text{Falls } v(S \text{ mit } k) - v(S) = 0 \text{ für alle } S \text{ gilt, dann ist } \phi_k(v) = 0.$$

- Axiom GLEICHBEHANDLUNG: Wer zu jeder Koalition S gleichermaßen beiträgt, kriegt dasselbe, d.h.

$$\text{Falls } v(S \text{ mit } k) = v(S \text{ mit } \ell) \text{ für alle } S \text{ ohne } k \text{ und } \ell \text{ gilt, dann ist } \phi_k(v) = \phi_\ell(v).$$

Axiome der Gerechtigkeit II

- Axiom KONSISTENZ: Wenn die Spieler ihre alten Koalitionswerte $v(S)$ über eine neue Wertefunktion $w(S)$ steigern können, dann soll diese Wertesteigerung nach dem selben Prinzip wie zuvor verteilt werden, d.h.

$$\phi_k(v+w)=\phi_k(v)+\phi_k(w) \text{ für alle } k=1,\ldots,N.$$

Alle sollen vom Wachstum profitieren und zwar unabhängig davon, wie ihr Beitrag zum Gemeinwohl früher ausgesehen hat. Auf unser kooperatives Spiel übertragen, bedeutet das insbesondere, dass der technologische Fortschritt sich proportional auf die Löhne überträgt.

Theorem: Es gibt genau eine Auszahlungsvorschrift ϕ, Shapley-Wert genannt, welche die Axiome EFFIZIENZ, TAUGENICHTS, GLEICHBEHANDLUNG und KONSISTENZ erfüllt.

Shapley-Wert

Shapley-Wert des Spiels zwischen dem Kapitalisten c und den Arbeitern i=1,...,m ist

$$\phi_i = \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}\left[f(m)-f(j)\right]}_{\text{gemittelter Mehrwert}} \text{ für alle } i=1,\dots,m \text{ und } \phi_c = f(m) - m\cdot\phi_i .$$

Aus der Sicht des Kapitalisten:

- Was ist der Mehrwert an Profit, wenn ich die Belegschaft von j bestehenden Arbeitern auf m vergrößere? Das ist $f(m)-f(j)$.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich eine solche Entscheidung für ein konkretes j=0,1,...,m treffen muss? Das ist $\frac{1}{m+1}$.
- Zahle den gemittelten Mehrwert an die m Arbeiter zu gleichen Teilen aus und behalte den Rest für sich.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

$m \cdot \phi_i$

Mehrwert im marxistischen Sinne

Der Begriff "Mehrwert" im Kontext von Löhnen bezieht sich auf die Differenz zwischen dem Wert, den Arbeitnehmer durch ihre Arbeit schaffen, d.h. $f(m)$, und dem ihnen gezahlten Lohn $m \cdot \phi_i$. Diese Differenz, d.h. ϕ_c, die als Mehrwert im Sinne von Karl Marx bezeichnet wird, fließt dem Arbeitgeber als Eigentümer der Produktionsmittel zu und wird als "unbezahlte Mehrarbeit" angesehen. Der Mehrwert ist also die Differenz zwischen dem Wert der von den Arbeitern produzierten Güter und ihrem Lohn. Arbeitnehmer arbeiten über die Zeit hinaus, die nötig ist, um ihren eigenen Lohn zu reproduzieren. Die zusätzliche, unbezahlte Arbeitszeit schafft Mehrwert, der dem Kapitalisten gehört.

Robert Aumann, geb. 1930

Robert Aumann 1977

Robert Aumann ist ein Mathematiker und Professor an der Hebrew University in Jerusalem. Er ist einer der einflussreichsten und kreativsten Spieltheoretiker weltweit. Unter anderem führte er das korrelierte Gleichgewicht ein und löste das talmudische Verteilungsproblem mithilfe des Nucleolus -Konzepts. Zusammen mit Thomas Schelling erhielt Aumann 2005 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften „für ihre grund-legenden Beiträge zur Spieltheorie und zum besseren Verständnis von Konflikt und Kooperation“.

Axiome der Stabilität

Gegeben sei ein kooperatives Spiel mit N Spielern und einer Wertefunktion $v(S)$, wobei S Koalitionen aus den Spielern $1,\ldots,N$ bezeichnet.

Folgende Anforderungen werden an eine Auszahlung $\psi_k, k=1,\ldots,N$ gestellt:

- Axiom EFFIZIENZ: Gesamtwert wird vollständig verteilt, d.h.

$$\sum_{k=1}^{N} \psi_k = v(N).$$

- Axiom INDIVIDUELLE RATIONALITÄT: Jeder Spieler k erhält mindestens den Wert, den er/sie schon alleine sicher hat, d.h.

$$\psi_k \geq v(k).$$

Solche Auszahlungen, die Axiome EFFIZIENZ und INDIVIDUELLE RATIONALITÄT erfüllen, werden Imputationen genannt.

Einwände

- Gegen eine Imputation ψ kann die Koalition **S** einen Einwand mittels einer Imputation ω erheben, falls sie daraus bessere Auszahlungen als aus ψ für sich erwartet, d.h.

$$\sum_{k \in S} \psi_k \le \sum_{k \in S} \omega_k .$$

- Der Einwand gegen ψ erhoben von **S** mittels ω kann erwidert werden, falls es eine Koalition **T** gibt, die aus ψ höhere Auszahlung als aus ω realisieren kann, d.h.

$$\sum_{k \in T} \psi_k \ge \sum_{k \in T} \omega_k .$$

Theorem: Es gibt genau eine Imputation ψ, Nucleolus genannt, sodass jeder Einwand dagegen erwidert werden kann.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Nucleolus

Nucleolus des Spiels zwischen dem Kapitalisten c und den Arbeitern i=1,…,m ist

$$\phi_i = \underbrace{\frac{1}{2}[f(m) - f(m-1)]}_{\text{halber marginaler Mehrwert des zuletzt dazugekommenen Arbeiters}} \text{ für alle } i = 1, \ldots, m \text{ und } \phi_c = f(m) - m \cdot \phi_i .$$

- Marginalanalyse ist eine Methode der modernen Wirtschaftstheorie, bei der die Effekte einer geringfügigen Änderung einer oder mehrerer Variablen auf die Ausgangslage untersucht werden. Die Marginalanalyse in Bezug auf Löhne nach Alfred Marshall (1842-1924) besagt, dass der Lohn durch das Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage bestimmt wird und dem Wert des Grenzprodukts der Arbeit entspricht. Marshall argumentierte, dass der Lohn den Kosten entspricht, die notwendig sind, um die Arbeitskräfte zu erhalten und ihre Leistungsfähigkeit zu entwickeln und zu erhalten. Auf der anderen Seite tendieren die Löhne dazu, sich mit dem Wert des Produkts der Arbeit auszugleichen, d.h. mit dem, was der letzte in den Produktionsprozess eingestellte Arbeiter erwirtschaftet.

Shapley-Wert vs. Nucleolus

Shapley- bzw. Nucleolus-Lohn eines jeden Arbeiters sind

$$\phi_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}\left[f(m)-f(j)\right] \text{ und } \psi_i = \frac{1}{2}\left[f(m)-f(m-1)\right].$$

- Es gilt die Beziehung:

Konkavität

$$\phi_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}\left[f(m)-f(j)\right] \geq \frac{1}{m(m+1)}\sum_{j=0}^{m}(m-j)\cdot\left[f(m)-f(m-1)\right]$$

$$= \frac{1}{m(m+1)}\sum_{j=0}^{m} j\cdot\left[f(m)-f(m-1)\right] = \frac{1}{m(m+1)}\cdot\frac{m(m+1)}{2}\left[f(m)-f(m-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(m)-f(m-1)\right] = \psi_i.$$

- Bei Shapley ist der Lohn mindestens so groß wie bei Nucleolus.

Linearer Fall

Shapley- bzw. Nucleolus-Lohn eines jeden Arbeiters sind

$$\phi_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}[f(m)-f(j)] \text{ und } \psi_i = \frac{1}{2}[f(m)-f(m-1)].$$

- Es sei $f(j)=j$ linear:

$$\phi_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}[f(m)-f(j)] = \frac{1}{m(m+1)}\sum_{j=0}^{m}(m-j)$$

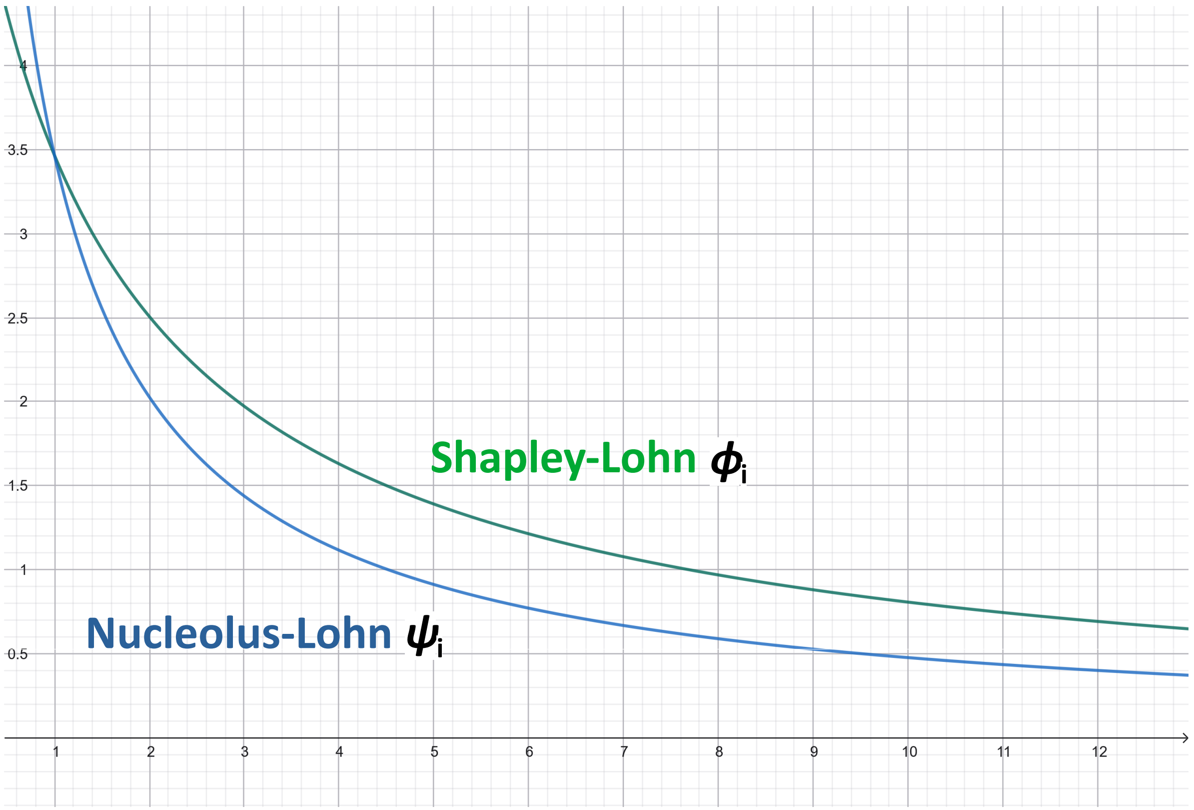
$$= \frac{1}{m(m+1)}\sum_{j=0}^{m} j = \frac{1}{m(m+1)}\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\psi_i = \frac{1}{2}[f(m)-f(m-1)] = \frac{1}{2}[m-(m-1)] = \frac{1}{2}.$$

- Im linearen Fall stimmt der Shapley-Lohn mit dem von Nucleolus überein.

- Der Kapitalist und die Arbeiter verteilen den Profit zu gleichen Teilen $\frac{m}{2}$.

Logarithmischer Fall



$$f(j) = 10 \cdot \ln(j+1)$$

- Der Shapley-Lohn kann echt höher als der von Nucleolus sein.

Fazit

- Verteilungsprobleme, insbesondere die der Lohngestaltung, können erfolgreich aus der Sicht der kooperativen Spieltheorie untersucht werden.

- Dafür ist eine Übereinkunft über ein Axiomensystem zur Gewährleistung der Gerechtigkeit bzw. der Stabilität notwendig.

- Gerechte Löhne (Shapley-Wert) sind gleich dem gemittelten Mehrwert.

- Stabile Löhne (Nucleolus) sind gleich dem halben marginalen Mehrwert.

- Gerechte Löhne sind immer höher als stabile Löhne.

- Die Differenz zwischen ihnen hängt von der Art der Produktivität ab.