# Mathematik des Investmentbankings

Wintersemester 2005/2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

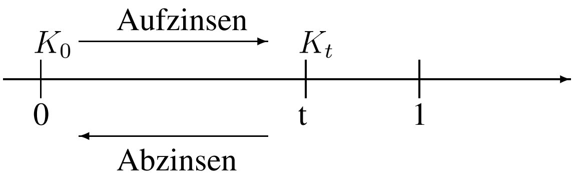
Prof. Luderer

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Klassische Finanzmathematik im Überblick

## 1.1 Einfache Verzinsung




$t$ ... Zeitpunkt oder Zeitraum

$K_t$ ... Zeitwert zum Zeitpunkt $t$

$K_0$ ... Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$

$p$ ... Zinssatz

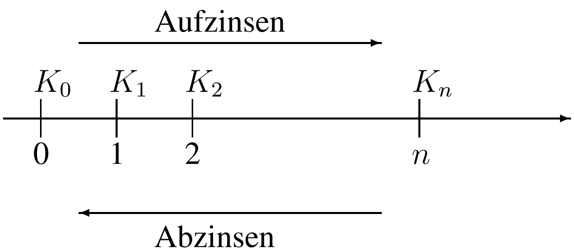
$i = \frac{p}{100}$ ... Zinsrate

$$K_t = K_0(1 + it) \tag{1.1}$$

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + it} \tag{1.2}$$

## 1.2 Zinseszinsrechnung

### 1.2.1 Grundmodell




$K_n$ ... Endwert zum Zeitpunkt $n$

$n$ ... Anzahl der Zinsperioden

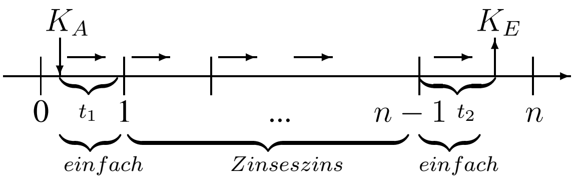
$q = 1 + i$ ... Aufzinsungsfaktor

$v = \frac{1}{q}$ ... Abzinsungsfaktor

$$K_n = K_0(1+i)^n \qquad \text{(Leibnizsche Endwertformel)} \tag{1.3}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} \tag{1.4}$$

Gemischte Verzinsung:




$$K_E = K_A(1+it_1)\cdot q^{n-2}(1+it_2) \tag{1.5}$$

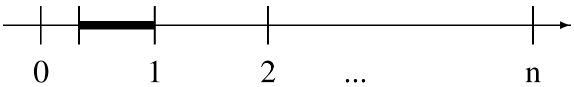
(taggenaue Verzinsung)

Zur Vereinfachung ersetzen wir $1+it$ durch $(1+i)^t$. Daraus ergibt sich

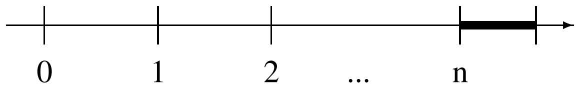
$$K_E \approx K_A(1\ +\ i)^{t_1+n-2+t_2} \approx K_A(1+i)^\Delta \tag{1.6}$$

Dies entspricht der Leibnizschen Endwertformel, allerdings ist $\Delta$ im Allgemeinen nicht ganzzahlig.

Zwei wichtige Situationen, wo es nur **eine** angebrochene Periode gibt:



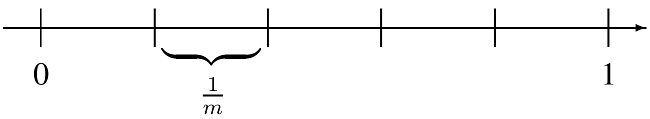

- Kauf festverzinslicher Wertpapiere




- Ratenkredite
- Rendite nach PAngV

### 1.2.2 Unterjährige und Augenblicksverzinsung

Die Rendite (Effektivverzinsung) bezieht sich in aller Regel auf das Jahr. Allerdings gibt es oft Wertpapiere, die halbjährliche Zinsen zahlen (unterjährlicher Kupon).




- **Variante 1**: Eimalige Zinszahlung am Periodenende

- **Variante 2**: m-malige anteilige Zinszahlung (unterjährliche Verzinsung)
  relative unterjährige Zinsrate: $\frac{i}{m}$

Vergleich der Endwerte bei einmaliger und m-maliger Verzinsung:

$$K_1 = K_0\,(1+i) < K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = K_1^{(m)} \tag{1.7}$$

Die m-malige Verzinsung mit $\frac{i}{m}$ ergibt also einen größeren Endwert als die einmalige Verzinsung mit $i$.

Frage: Für welches $i_{eff}$ ergibt sich eine Gleichheit?

Setzen $K_0\,(1+i) = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$

$$\Rightarrow \qquad i_{eff} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 \tag{1.8}$$

<u>**jetzt:**</u> $m \to \infty$ bzw. $\frac{1}{m} \to 0$

Berechnung des Endwertes nach einer Periode bei **stetiger** Verzinsung:

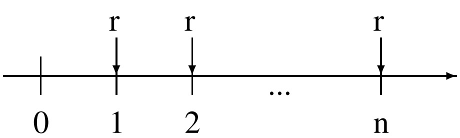
$$K_1^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} K_1^{(m)} = \lim_{m\to\infty} K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = K_0 e^i$$

analog für mehrere Perioden:

$$K_t = K_0 e^{it} \tag{1.9}$$
$$K_0 = K_t e^{-it} \tag{1.10}$$

## 1.3 Rentenrechnung

Eine Rente sind $n$ regelmäßige Zahlungen in gleichen Zeitabständen, die in konstanter Höhe (starre Rente) oder nach einem bestimmten Bildungsgesetz (dynamische Rente) erfolgen.




nachschüssige Rentenzahlung

Zusammenfassung der n Einzelzahlungen zu einer Gesamtzahlung: $(q \neq 1)$

$$\text{Endwertformel:} \qquad E_n^{nach} = r\frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{1.11}$$

$$\text{Barwertformel:} \qquad B_n^{nach} = r\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)} \tag{1.12}$$

<u>Ewige Rente:</u>

n ist unbegrenzt, d.h. $n = \infty \Rightarrow$ Endwert ist sinnlos
Der Barwert ergibt sich als:

$$B_\infty^{nach} = \lim_{n\to\infty} B_n^{nach} = \lim_{n\to\infty} r\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

$$B_\infty^{nach} = \frac{r}{q - 1} = \frac{r}{i} \tag{1.13}$$

$\Rightarrow r = B_\infty^{nach} \cdot i$

# Kapitel 2

# Gegenwartswerte

Gegenwartswerte werden auch als Barwert oder Present value bezeichnet.

Grundidee:

- Unterbewertete Titel werden gekauft und überbewertete Titel werden verkauft. Ziel ist ein Vergleich der Marktpreise mit individueller Bewertung. = mathematischer Aspekt
- daneben beeinflussen weitere Faktoren die Barwerte:
  - psychologische Aspekte
  - Hintergrundinformationen
  - Menschenkentnisse
  - Risiko, welches in die Kalkulationszinssätze eingeht

## 2.1 Gegenwartswerte und Opportunitätskosten

Vorbemerkungen:

- Sichere Zahlungen sind mehr wert als unsichere Zahlungen
- ein höheres Risiko spiegelt sich in höheren Zinssätzen wider
- wegen der höheren Abzinsungsfaktoren sinkt der Barwert

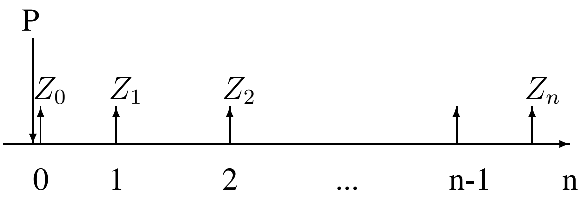
Oppertunitätskosten: = Marktverzinsung + Risikoprämie

Opportunitätskosten sind ein Entscheidungskriterium für Anleger, denn risikoscheue Investoren erwarten höhere Prämien als risikofreudige Anleger. Diese erwarten einen niedrigen Barwert.

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} &\text{Rendite} &>\ &\text{Geldbeschaffungskosten} \\ \text{bzw.}\quad &\text{Nettobarwert} &>\ &0 \end{aligned}$$

## 2.2 Berechnung von Gegenwartswerten




P ... Preis, Present Value, Barwert

Discounted Cash Flow-Methode: (DCF-Methode)

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{Z_k}{q^k} \tag{2.1}$$

mit $q = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ und $p$ Kalkulationszinssatz

Berechnung des internen Zinsfußes: (IRR...internal rate of return)

Ansatz:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{Z_k}{q^k} \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.2}$$

$\Rightarrow$ interner Zinsfuß $i >$ Opportunitätskosten

$$Z_0 q^n + Z_1 q^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} q + Z_n = 0 \tag{2.3}$$

Polynom n-ten Grades im Allgemeinen nur numerisch lösbar.

Einige theoretische Überlegungen:

- Hauptsatz der Algebra:
  Polynom n-ten Grades hat maximal $n$ Nullstellen
- Vorzeichenregel von Descartes:
  Zahl der positiven Nullstellen ist $w$ oder $w - 2$ oder $w - 4$ oder ...
  wobei $w$ Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten des Polynoms ist

- Standardsituation:
  $Z_0 < 0,\ Z_1, \ldots, Z_n > 0$ (z.B. Kauf einer Anleihe)
  $- + + \ldots +$ $w = 1$ Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 1 Nullstelle $\Rightarrow$ Rendite

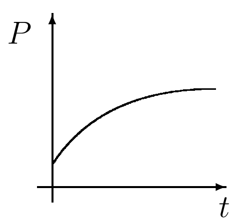
- Reguläre Investition:
  $$E_k = \sum_{j=0}^{k} Z_j \tag{2.4}$$
  Es existert ein Zeitpunkt $t$:
  $$E_0 < 0, E_1 \leq 0, \ldots, E_t \leq 0, E_{t+1} \geq 0, \ldots, E_{n-1} \geq 0, E_n > 0$$
  Dann besitzt die Gleichung genau einen positiven internen Zinsfuß.

Bem:

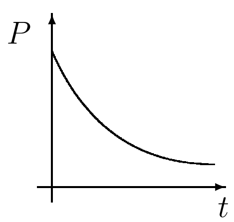
1. Falls es mehrere Zinsfüße gibt, kann entstehen:

2. Vorteile der DCF-Methode gegenüber der Methode des internen Zinssatzes:
   (a) einfachere Berechenbarkeit
   (b) Bisher: einheitlicher Zinssatz $p$ unabhängig von der Laufzeit
   Aber in der Praxis: Zinssätze sind laufzeitabhängig
   Diese Zinstruktur lässt sich gut bei der DCF-Methode berücksichtigen.

Zinsstrukturkurven:



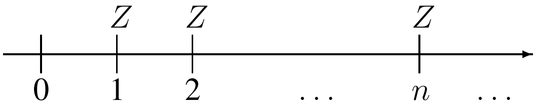

normale Zinsstruktur



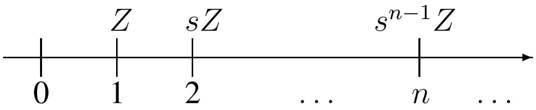

inverse Zinsstruktur

Gegenwartswerte konkreter Zahlungsströme:

- konstante Annuitäten (ewige Rente)




(2.5)

- 


$s = 1 + g$ ... Dynamisierungsfaktor

Barwerte berechnen:

Daraus ergibt sich

(2.6)

Für eine unendliche Laufzeit erhält man unter der Voraussetzung $0 < s < q \Rightarrow 0 < \frac{s}{q} < 1$, d.h. $0 < g < i$

(2.7)

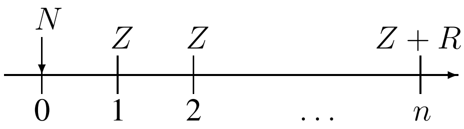
Ansonsten gilt

## 2.3 Gegenwartswerte von Aktien und Anleihen

### 2.3.1 Anleihen

hier:

- ganzzahlige Laufzeiten
- Zahlungsstrom genau festgelegt
- Abzinsen mit Kalkulationszins bzw. -rate




N ... Nominalwert (oft $N = 100$)

Z ... $N \cdot i$ (oft $N = 100 \Rightarrow Z = p = 100 \cdot i$)

R ... Rückzahlung (meist $R = N$)

Bezeichnungen können auch sein: endfällige Anleihe, bond, plain-vanilla bond

Barwert:

(2.8)

Falls $N = 100 = R$, gilt

(2.9)

(2.10)

Wichtige Bemerkung:

bisher: $q = 1 + \frac{p}{100}$

jetzt: $p = p_{nom}$ ... Nominalzins, Kupon

$p_{eff}$ ... Effektivzinssatz $\Rightarrow q = 1 + \frac{p}{100}$

$$p \neq p_{eff}$$

Zwei wichtige Probleme:

1. Gegeben sei $p_{eff}$ bzw. $q = 1 + \frac{p_{eff}}{100}$. Gesucht ist der Preis bzw. der Kurs der Anleihe.
2. Gegeben ist der Preis $P$. Gesucht wird die Rendite $p_{eff}$. Dabei müssen häufig numerische Näherungsverfahren angewandt werden.

Aus diesen Problemen ergeben sich zwei abgeleitete Probleme:

1. Gegeben: Änderung des Marktzinssatzes $\Delta p$
   Gesucht: (näherungsweise) Änderung des Preises (Differentialrechnung, Elastizität, Risikokennzahlen)

$$\Delta P = f'(\bar{p}) \cdot \Delta p$$

2. Gegeben: Änderung des Preises. Gesucht: Änderung der Rendite.
   Wäre bekannt $p = g(P)$, so könnte man genauso vorgehen.

$$\Delta p \approx g'\left(\bar{P}\right) \cdot \Delta P$$

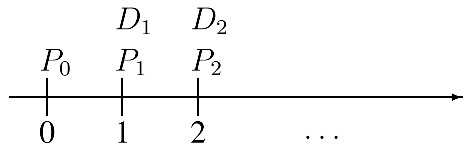
Aber $g$ ist nicht explizit bekannt.
$\rightarrow g'\left(\bar{P}\right)$ aus Satz der impliziten Funktionen bzw. aus Satz über Ableitung der Umkehrfunktion

### 2.3.2 Bewertung von Aktien

hier: zwei einfache Modelle

Vorbemerkung: Betrachten den Preis der Aktie kurz nach der Dividendenzahlung.

Sei
$P_i \ldots$ Kurs zum Zeitpunkt $i$
$D_i \ldots$ Dividendenzahlung zum Zeitpunkt $i$
$p \ \ldots$ Kalkulationszins $\Rightarrow q = 1 + \frac{p}{100}$




Der Kurs der Aktie in $t = 0$ ist gleich dem abgezinsten Betrag vom Kurs zuzüglich der Dividendenzahlung in $t = 1$.

$$P_0 = \frac{P_1 + D_1}{q} \tag{2.11}$$

analog $P_1 = \frac{P_2 + D_2}{q}, \ldots$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{D_1}{q} + \frac{D_2}{q^2} + \frac{D_3}{q^3} + \ldots \tag{2.12}$$

Also: Der Kurs ist gleich dem Barwert künftiger Dividendenzahlungen.

| | | |
|---|---|---|
| **Modell 1** : | Dividenden sind konstant | $\Rightarrow$ Es wird der Barwert der ewigen nachschüssigen Rente verwendet |
| **Modell 2** : | Dividenden werden jährlich um Faktor $s = 1 + g$ erhöht<br>$g \ldots$ Wachstumswert | $\Rightarrow$ Verwendung des Barwertes der ewigen dynamischen Rente<br>$P_0 = \frac{D_1}{i - g}$ |

Das Problem der Aktienbewertung reduziert sich also auf die Festlegung der Größen $D$,$g$ und $i$. Diese ist aber aus ökonomischer Sicht schwierig.

# Kapitel 3

# Ermittlung der Effektivverzinsung / Rendite

Es gibt zwei Möglichkeiten der Bewertung. Man kann aus dem Kurs die Rendite ermitteln und aus der Rendite den Kurs.

| | |
|---|---|
| **Geldmarkt** (kurze Laufzeiten): | einfache Verzinsung |
| **Anleihe-/Kapitalmarkt** (mittlere bis lange Laufzeiten): | Zinseszins und Rentenrechnung |

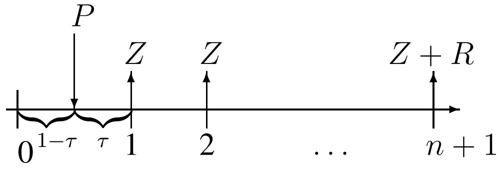
---

| | |
|---|---|
| gebrochene Laufzeiten: | verschiedene Methoden |

Zur genaueren Beschreibung muss man die Zinsstrukturkurven verwenden.

## 3.1 Grundbegriffe und Grundlagen

- **Aufzinsungsverfahren**: (nach Preisangabenverordnung) gebrochener Teil der Laufzeit am Ende
- **Abzinsungsverfahren**: gebrochener Teil der Laufzeit zu Beginn




Für den Zeitraum $1-\tau$ müssen Stückzinsen gezahlt werden.

clean price: Kurs ohne Stückzinsen

dirty price: Kurs mit Stückzinsen

Beispielanleihe mit folgenden Bestandteilen:

- Kupon von $8\%$ und einer Restlaufzeit von $9$ Jahren
- Rückzahlung am Ende der Laufzeit beträgt $R = 102$
- Nominalwert $N = 100$
- Kurswert / Preis beträgt $110$
- Der Emittent hat eine Kündigungsmöglichkeit (sog. Call) nach $5$ Jahren ab jetzt zum Preis von $104$

**Kupon, Nominalzins** (coupon rate): $p = 8$

**laufende Verzinsung** (current yield, interest yield, income yield, flat yield):

$$i_c = \frac{\text{Kupon}}{\text{Kurs}} = \frac{\text{Nominalzins}}{\text{Kapitaleinsatz}} \tag{3.1}$$

**einfache Verzinsung** (simple yield maturity):

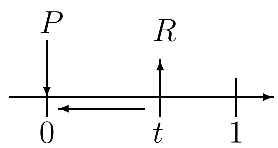
$$i_{sim} = \frac{\text{Kupon} + \frac{\text{Rückzahlung - Kurs}}{n}}{\text{Kurs}} \tag{3.2}$$

**yield to call**:
Emittent wird nach $5$ Jahren vom Kündigungsrecht Gebrauch machen, wenn zu diesem Zeitpunkt der Marktzins niedrig und der Kurs hoch ist.
$\Rightarrow$ Bei der Bewertung der Anleihe für ca. $5$ Jahre vom worst case ausgehen, d.h. Rückkauf zum Preis $104$ nach $5$ Jahren annehmen.

## 3.2 Verzinsung von Geldmarktpapieren

Im Regelfall hat man folgendes Szenario:

endfällige Anleihe ohne zwischenzeitliche Zinszahlung und einer Laufzeit $t \in (0, 1)$




Bemerkung: Die Berechnung von $t$ ist von Usancen abhängig. Dies können sein: $\frac{30}{360}$, $\frac{act}{360}$, $\frac{act}{365}$ oder $\frac{act}{act}$.

Diskontpapier (=endfälliges Wertpapier ohne laufende Zinszahlung):

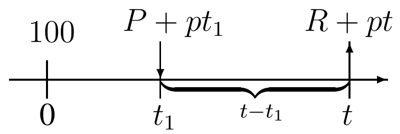
Der Kurs, Preis beträgt

$$P = \frac{R}{1+it} \tag{3.3}$$

Dabei sind die Werte $P$, $R$ und $t$ gegeben. Gesucht wird die Rendite $i$.

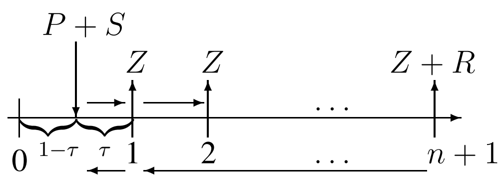
$$i = \frac{R-P}{Pt} \tag{3.4}$$

Seltener gibt es Papiere mit einmaliger Zinszahlung bei Fälligkeit.




Zur Bestimmung der Rendite $i$ muss man einen Barwertvergleich durchführen. Dabei sind $P$, $R$, $p$, $t$ und $t_1$ gegebene Werte:

## 3.3 Effektivverzinsung von Anleihen mit gebrochener Restlaufzeit




Bemerkung:
Während bei Anleihen mit ganzzahliger Restlaufzeit die Berechnungsmethode eindeutig feststeht, gibt es hier verschiedene Möglichkeiten, wobei gleichzeitig Kuponzahlungen pro Jahr möglich sein sollen. Dabei entsteht die Frage nach der Diskontierung in der gebrochenen Periode (einfach oder geometrisch) und die Umrechnung unterjährlicher Zinssätze auf das Jahr.

Die wichtigste Methode ist die **ISMA (AIBD)-Methode**. Diese Methode wird international genutzt und ist „finanzmathematisch freundlich".

ISMA: International Securities Market Association
AIBD: Association of International Bond Dealers (frühere Bezeichnung)

$$P + S = \frac{1}{q^\tau} \cdot \frac{1}{q^n} \left( \frac{p}{m} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + R \right) \tag{3.5}$$

mit $n$... ganze Perioden, $m$... Anzahl der Kupons pro Jahr und $S$... Stückzinsen
Anschließend muss die Periodenrendite auf eine Jahresrendite umgerechnet werden:

$$i_{p.a.} = (1 + i_m)^m - 1.$$

Für $n = 0$, d.h. es gibt keine ganze Periode mehr, ergibt sich nach ISMA

$$P + S = \frac{1}{q^\tau} \left( \frac{p}{m} + R \right) \tag{3.6}$$

**SIA-Methode**: (Security Industries Association)
analog zu ISMA, aber:

1. $i = m \cdot i_m$
2. falls $n = 0$, so wird mit Geldmarktusancen gerechnet, d.h. einfache Verzinsung

$$i = \frac{1}{\tau} \frac{\left( \frac{p}{m} + R \right) - (P + S)}{P + S} \tag{3.7}$$

**US-Treasury**:
wie SIA, aber: lineare Diskontierung im gebrochenen Anteil

$$P + S = \frac{1}{1 + i\tau} \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \left( \frac{p}{m} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + R \right) \tag{3.8}$$

Achtung: Besonderheiten in der Stückzinsberechnung.

**Moosmüller**:
Wird vor allem im deutschen Rentenhandel angewandt.
wie US-Treasury mit $i = (1 + i_m)^m - 1$

Bemerkung:

1. Es gibt noch weitere Methoden, z.B. Braeß-Fangmeier (siehe Literatur: Frühwirth, Heidorn u.a.).
2. Anwendung verschiedener Methoden führt im Allgemeinen zu unterschiedlichen Resultaten. $\Rightarrow$ Vorsicht bei Vergleichen!

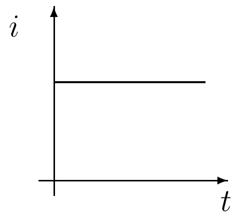
## 3.4 Die Zinsstrukturkurve und ihre Bedeutung

bisher: einheitlicher Durchschnittszinssatz, unabhängig von der Laufzeit. Der Vorteil ist, dass man evtl. aus der Summe eine geschlossene Formel erhält

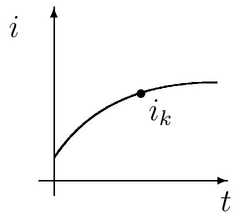
jetzt: genauere Beschreibung und Bewertung durch laufzeitabhängige Zinssätze

$\Rightarrow$ Zinsstrukturkurve

a) flache Zinsstrukurkurve

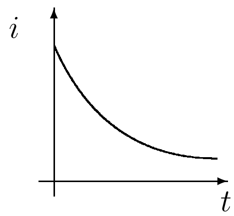



b) normale Zinsstruktur




Spot Rate, d.h. Zinsrate von $0$ bis $k$

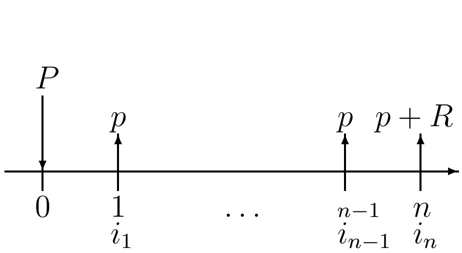
b) inverse Zinsstruktur




(seltener)

### 3.4.1 Spot Rates und Forward Rates

Ziel: marktgerechtere Bewertung von Anleihen bzw. allgemeinen Zahlungsströmen



$$P = \frac{p}{1+i_1} + \frac{p}{(1+i_2)^2} + \ldots + \frac{p+R}{(1+i_n)^n} \tag{3.9}$$

Hier gibt es keine geschlossene Formel mehr. $\Rightarrow$ unterschiedliche Zinssätze pro Zinsperiode.

<u>Zerobond der Laufzeit $k$:</u>


$$P = \frac{R}{(1+i_k)^k} \quad \Rightarrow \quad (1+i_k)^k = \frac{R}{p}$$

$$\Rightarrow i_k = \sqrt[k]{\frac{R}{p}} - 1 \tag{3.10}$$

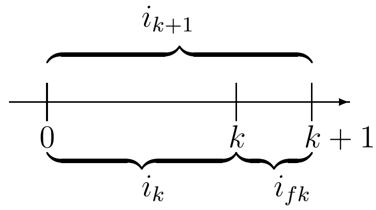
Leider gibt es am Markt nur sehr wenige Zerobonds. Weitere Berechnungsmöglichkeiten aus Anleihen bzw. Swap Rates (siehe unten).

<u>Forward Rates:</u>

$=$ Zinssätze für Perioden, die in der Zukunft liegen. Die Berechnung erfolgt aus Spot Rates.

Gegeben: Spot Rates $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n$

Gesucht: $i_{fk}$ $=$ Zinssatz in der Periode $[k, k+1]$




Idee:
Eine Anlage über $k+1$ Jahre soll genauso viel erbringen wie eine Anlage über $k$ Jahre und anschließender Forward-Anlage über 1 Periode.

$$\begin{aligned} Ansatz: \quad & (1+i_k)^k(1+i_{fk}) \stackrel{!}{=} (1+i_{k+1})^{k+1} \\ \Rightarrow \quad & i_{fk} = \frac{(1+i_{k+1})^{k+1}}{(1+i_k)^k} - 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

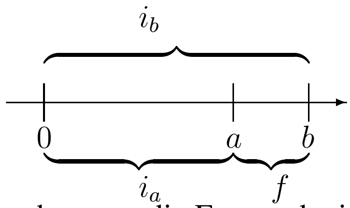
Bemerkungen:

1. Forward Rate $i_{fk}$ kann man sich heute am Markt durch Geldanlage und -aufnahme über $k$ bzw. $k+1$ Perioden sichern.

2. Bei normaler (steigender) Zinsstruktur ergeben sich deutlich stärker steigende Forward Rates.

3. Forward Rates stellen keine Meinung über zukünftige Zinssätze dar, sondern sind heute risikolos absicherbar, also Arbitrageergebnis.

4. Der Zeitraum $[k, k+1]$ mit der Länge $1$ kann verallgemeinert werden:

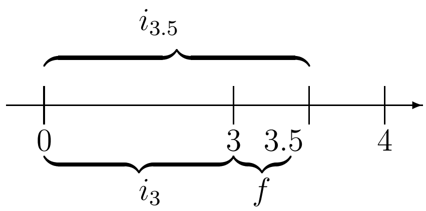
   
   

   Bei Auftreten von gebrochenen Perioden, hat man die Frage, ob eine geometrische oder einfache Verzinsung verwendet werden sollte. Dazu folgende Faustregel:

   Länge $\leq 1$ $\Rightarrow$ einfache Verzinsung

   Länge $> 1$ $\Rightarrow$ geometrische Verzinsung

Beispiel:




(3.12)

### 3.4.2 Spot Rates als Bewertungskriterium

Spot Rates können auch für die Bewertung von Anleihen dienen (siehe unten). Dazu müssen die Spot Rates allerdings bekannt sein.

Es gibt verschiedene Berechnungsmöglichkeiten von Spotrates (siehe unten):

1. aus Zerobonds (vgl. Idee, S.18)

2. aus einem Linearen Gleichungssystem (vgl. Beziehung (3.13))

3. aus einer Linearen Optimierungsaufgabe (vgl. die LOA auf S. 19)

4. aus der Festsatzseite von Zinsswaps (vgl. S. 21)

Idee: Die Anleihe wird in eine Summe von Zerobonds zerlegt, sog. Anleihe-Stripping.

Bsp.: $N = 100$

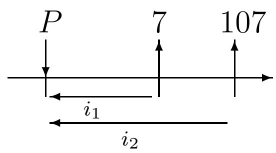
| Anleihe | Laufzeit | Kurs | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | Rendite $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 100 | 108 | - | - | 8,00% |
| $A_2$ | 2 | 96,54 | 7 | 107 | - | 8,97% |
| $A_3$ | 3 | 95 | 8 | 8 | 108 | 10,00% |
| $B$ | 3 | 102,49 | 11 | 11 | 111 | 10,00% |

Wir wollen $A$ und $B$ bewerten. Dazu haben wir folgende Kriterien:

a) Rendite: $A_3 = B = 10\%$ Sind beide Anleihen gleich gut?

b) Ermittlung der Spotrates für $i_3$, da $i_1$ und $i_2$ durch $A_1, A_2$ bereits festliegen:

1. Aus $A_1$ folgt $i_1 = 8\%$ (entspricht einem Zerobond)
2. Aus $A_2$ :




3. Spotrate $i_3$ ergibt sich auf zwei Arten:

$$A_1, A_2, A_3: \quad 95 - \frac{8}{1,08} - \frac{8}{1,09^2} \stackrel{!}{=} \frac{108}{(1+i_3)^3} \quad \Rightarrow i_3 = 10,13\%$$

$$A_1, A_2, B: \quad 102,49 - \frac{11}{1,08} - \frac{11}{1,09^2} \stackrel{!}{=} \frac{111}{(1+i_3)^3} \quad \Rightarrow i_3 = 10,15\%$$

Behauptung:
Da die Spotrates $i_1$ und $i_2$ hier festliegen und $i_3^B > i_3^{A_3}$ (= laufzeitabhängige Rendite), ist $B$ besser. Wenn dies so ist, muss es möglich sein, aus $A_1, A_2$ und $B$ ein Portfolio zu konstruieren (= *Arbitrageportfolio*), das den Cashflow von $A_3$ dupliziert und billiger als $A_3$ ist. Dadurch ergibt sich folgende Aufgabenstellung:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + bx_3 = a_3 \tag{3.13}$$

Hierbei sind: $a_i, b$ ... Vektoren, die den Cashflow von $A_i$ und $B$ darstellen,
$x_i$ ... Menge, die von $a_i$ bzw. $b$ gekauft werden.

Achtung: $x_i < 0$ bedeutet einen Leerverkauf, der aber in der Praxis evtl. nicht zulässig ist.

Hier: $x_1^* = -0,023, x_2^* = -0,025, x_3^* = 0,973$, d.h.

verkaufe $0,023$ Teile von $A_1$,
verkaufe $0,025$ Teile von $A_2$,
kaufe $0,973$ Teile von $B$.

Der Preis dieser Linearkombination beträgt $94,95 < 95$. Tatsächlich ist also der Preis der Linearkombination kleiner als der Preis der Anlage $A_3$, d.h. dass diese teurer und somit schlechter ist.

Also:

1. Wir haben die Anleihe mittels Spot Rates bewertet.
2. Gleichzeitig haben wir aus den am Markt verfügbaren Anleihen Spotrates berechnet, wobei $i_1$ und $i_2$ eindeutig sind und $i_3$ davon abhängt, ob $A_3$ oder $B$ verwendet wird.

Eine andere Sicht auf dasselbe Problem:

Am Markt existieren viele Anleihen. Man muss einige dieser Anleihen auswählen, um geeignete Spot Rates zu berechnen. $\Rightarrow$ Lineare Optimierungsaufgabe (LOA):
Gegeben seien:

- Cashflow, der genügend hoch sein muss (z.B. der Cashflow von $A_3$ oder irgendein anderer, z.B. gewisse Zahlungsverpflichtungen)
- mehrere Anleihen am Markt

Gesucht: Portfolio aus diesen Anleihen derart, dass der gegebene Cashflow möglichst billig sichergestellt werden kann.

z.B. ein Cashflow von 100, 100, 100

(P)

mit $x_i \geq 0$ (keine Leerverkäufe) und $x_i$ Anzahl an Anleihen $A_i, B$.

Bemerkung: Diese lineare Optimierungsaufgabe ist immer lösbar.

Optimale Lösung: (d.h. zu diesen Anteilen sollen die Anleihen $A_i, B$ gekauft werden)

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0,7856 \\ x_2^* &= 0,8420 \\ x_3^* &= 0 \\ x_4^* &= 0,9009 \end{aligned}$$

Die dazu duale Aufgabe lautet:

(D)

mit $y_i \geq 0$.

Optimale Lösung:

$$y_1^* = 0,9259, \quad y_2^* = 0,8417, \quad y_3^* = 0,7482$$

Bemerkung:
Wegen $x_1^*, x_2^*, x_4^* > 0$ muss die 1., 2. und 4. Nebenbedingung in (D) als Gleichung erfüllt sein.
$\Rightarrow y_i^*$ berechnen.

Nebenbedingungen in (D):

rechte Seite = Preis der Anleihe

linke Seite = Barwert aller Zahlungen aus einer Anleihe, wenn $y_i$ als (laufzeitabhängige) Diskontfaktoren interpretiert werden:

$$\begin{aligned} y_1^* &= \tfrac{1}{1+i_1} & \Rightarrow \quad i_1 &= 8\% \\ y_2^* &= \tfrac{1}{(1+i_2)^2} & \Rightarrow \quad i_2 &= 9\% \\ y_3^* &= \tfrac{1}{(1+i_3)^3} & \Rightarrow \quad i_3 &= 10,15\% \end{aligned}$$

Eine weitere Methode berechnet die Spotrates aus der Festsatzseite von Zinsswaps:

Swap Rate $\hat{=}$ Kupon einer Anleihe, damit diese bei einer gegebenen Zinsstrukturkurve zu $100$ notiert.

**Ges.:** Spotrates $i_t$ (Dabei wird die Methode des „Bootstrappings" verwendet, d.h. ein gestaffeltes Gleichungssystem.)
**Geg.:** Zerozinssätze (Spotrates) $i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}$
Wertpapier mit $N = 100, P = 100$, Laufzeit $t$ und Kupon $p$ (= Festsatzseite des Swaps)

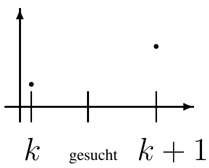
Barwertvergleich:

mit $d_k = \dfrac{1}{(1+i_k)^k}$. Daraus ergeben sich die Spotrates:

Bemerkung:
Im unterjährigen Bereich (Tage, Wochen, Monate) werden als Spotrates beobachtbare Depotsätze (z.B. aus Interbankenhandel) genommen.

Spotrates für gebrochene Laufzeiten

Zwischenwerte aus verschiedenen Interpolationszugängen, wobei $i_k, k \in \mathbb{N}$, gegeben sind.




a) Lineare Interpolation der Spotrates

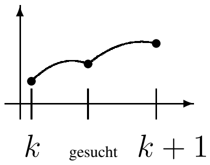
b) Berechne Diskontfaktoren $d_{k-1}$ und $d_k$ und führe anschließend eine lineare Interpolation durch.

c) Forward-Based Interpolation
Idee: Für die Periode $[k-1, k]$ wird für jeden Tag ein mittlerer Zinssatz $i_f$ berechnet.

Ansatz:

Anschließend wird über die entsprechende Anzahl an Tagen aufgezinst.

d) Nichtlineare Interpolation = Spline-Approximation




e) Methode der kleinsten Quadratsumme (MKQ)

Ein Nachteil ist, dass in den Stützstellen i.Allg. keine Gleichheit vorhanden ist.

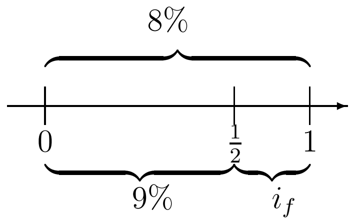
# Kapitel 4

# Finanzinnovationen

## 4.1 Forward Rate Agreement – FRA

### 4.1.1 Funktionsweise

Ein Forward Rate Agreement ist ein Termingeschäft über ein halbes bis zwei Jahre. Man kann sich damit einen zukünftigen Zinssatz bereits heute sichern.



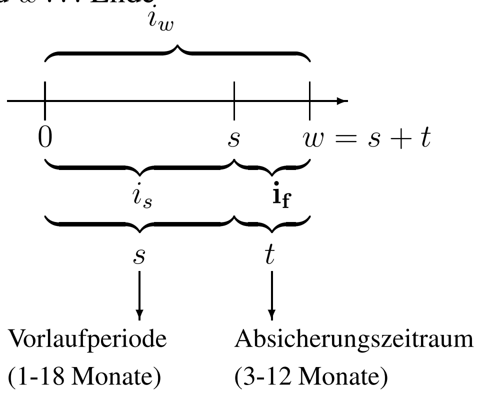

Beispiel:
Ein Kreditnehmer will in einem halben Jahr einen Kredit für die Dauer eines halben Jahres aufnehmen. Dazu müssen wir die risikolose Forward Rate $i_f$ ermitteln: z.B. aus einem 6-Monats-LIBOR (9%) und aus einem 12-Monats-LIBOR (8%).
Hier: Geldmarktusancen: $\frac{1}{2}$ Jahr $= \frac{180}{360}$

Die Forward Rate kann heute durch Kauf / Verkauf eines FRA gesichert werden. ($\hat{=}$ Terminkredit)

<u>Bestandteile eines FRA:</u>

- Kauf / Verkauf eines (Referenz-) Zinssatzes (z.B. LIBOR, EURIBOR, ...)
- Vereinbarung eines FRA-Satzes (= Forward Rate $i_f$)
- Nominalbetrag

- Zeitraum $s \times w$ mit $s \dots$ Beginn und $w \dots$ Ende




(4.1)

<u>Vereinbarung einer Ausgleichszahlung:</u>

$$A = \frac{N \cdot (i_{lib} - i_f) \cdot t}{1 + i_{lib} \cdot t} \tag{4.2}$$

mit $N \dots$ Nominalbetrag, $i_{lib} \dots$ Libor-Zinssatz.

Falls $A > 0 \Rightarrow$ Käufer des FRA erhält die Ausgleichszahlung.
Falls $A < 0 \Rightarrow$ Verkäufer des FRA erhält $|A|$.

In $t = 0$ sind $i_s$ und $i_w$ bekannt und man kann $i_f$ ermitteln. Unbekannt in $t = 0$ ist $i_{lib}$, der aber in $t = s$ bekannt ist.

Wegen der Ausgleichszahlung sind die Gesamtzinskosten unabhängig von $i_{lib}$ und hängen nur von $i_f$ ab.

Bemerkung:
Auch längere Perioden können durch Verknüpfung abgesichert werden. Aus $3 \times 9$ und $9 \times 15$ wird ein $3 \times 15$-FRA. Bei noch längeren Laufzeiten verwendet man Swaps.

### 4.1.2 Strategien mit Forward Rate Agreements

Es gibt drei mögliche Strategien:

1. Arbitrage
2. Spekulation
3. Hedgen (Absichern)

Es liege folgendes Szenario vor (vgl. auch Beispiel im Abschnitt 4.1.1):

inverse Zinsstruktur: Zins über $6$ Monate: $9\%$

Zins über $12$ Monate: $8\%$

$\Rightarrow$ Daraus ergibt sich $i_f = 6,7\%$ .

Wir nehmen nun an, dass in $6$ Monaten dieselbe Zinstrukturkurve vorliegt, d.h. wir spekulieren.

Behauptung: Der Zinsmanager schätzt mit seiner Annahme die Zukunft richtig ein. Deshalb kann er die Kreditkosten senken (auf $i_f = 6,7\%$).

Es gibt nun zwei Handlungsmöglichkeiten für den Zinsmanager.

1. Der Zinsmanager tut nichts. $\Rightarrow$ Es bleibt die Zinsbedingung von $N \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,09$ für ein halbes Jahr.
2. Der Zinsmanager kauft einen FRA mit $i_f = 6,7\%$. $\Rightarrow$ Ausgleichszahlung:

   Wegen $A > 0$ erhält der Käufer, d.h. der Zinsmanager, die Ausgleichszahlung $A$. Nach einem Jahr ergibt sich das folgende Bild:

   Zinsen aus erhaltener Ausgleichszahlung $A$:

   Zu zahlen hat der Zinsmanager:

   $$N \cdot 0,09 \cdot \frac{1}{2}$$

   Daraus ergibt sich an tatsächlich zu zahlenden Zinsen:

   $$N \cdot 0,067 \cdot \frac{1}{2}$$

   $\Rightarrow$ Man kann sich also den Zinssatz $i_f$ für die Zukunft sichern.

## 4.2 Zinsswaps

Ein Zinsswap ist eine Vereinbarung über den Austausch künftiger Zinsströme. Zinsswaps werden auch als interest rate swaps (IRS) bezeichnet.

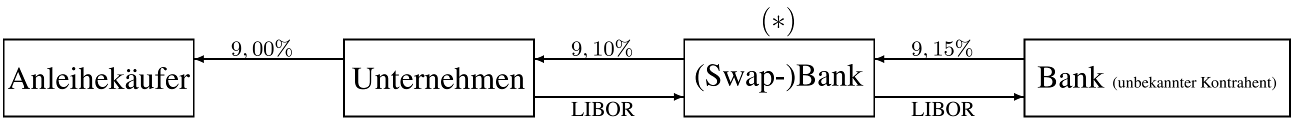
Im Normalfall wird ein Festzinssatz gegen einen variablen Zinssatz getauscht.

### 4.2.1 Funktionsweise

- 2–10 Jahre Laufzeit
- 5–100 Millionen Nominalbetrag
- Usancen: $\frac{30}{360}$ für kurzfristige Zahlungen (Festzinssatz), $\frac{act}{360}$ für variablen Zinssatz

Beispiel:
Eine Bank macht folgendes Angebot: $\boxed{\text{6-Monats-LIBOR, 5 Jahre, 9,10–9,15 \%}}$ $(*)$
D.h., die Bank ist bereit, fünf Jahre einen Festsatz von $9,10\%$ zu zahlen und LIBOR zu empfangen oder LIBOR zu zahlen und $9,15\%$ zu empfangen.

Beispiel:
Ein Unternehmen begibt Anleihe zu $9\%$. Es möchte fixe Verbindlichkeiten von $9\%$ gegen variable Zinssahlungen eintauschen.




Bilanz: Unternehmen hat zu zahlen: $9\% - 9,1\% + LIBOR = LIBOR - 0,1\%$

Bank hat zu zahlen: $9,1\% - 9,15\% + LIBOR - LIBOR = -0,05\%$ ($\hat{=}$ Gewinn)

<u>Vorteile von Swapgeschäften:</u>

- Beide Partner bringen ihre speziellen Vorteile in das Geschäft ein.
- Einfache Umkehrbarkeit:
  - Abschluss eines Gegengeschäfts
  - Close-out-Vereinbarung
    (Alle vereinbarten Zinssätze werden zum aktuellen Marktzins abgezinst. ⇒ Barwertausgleich)
  - Assignment
    (Ein Dritter übernimmt alle Verpflichtungen.)

### 4.2.2 Strategien mit Swaps

Analog zu den FRA's gibt es drei mögliche Strategien:

1. Arbitrage
2. Spekulation
3. Hedgen (Absichern)

Vergleiche dazu Abschnitt 4.1.2

### 4.2.3 Pricing und Arten von Swaps

| | | |
|---|---|---|
| FRA | Preis $= 0$ | Es muss aber ein Partner gefunden werden. $\Rightarrow$ Deshalb kann $i_f$ als Preis betrachtet werden. |
| Swap | Preis $= 0$ | Auch hier muss man einen Partner finden. $\Rightarrow$ Preis = Festzinssatz<br><br>Neben dem Festsatz könenn auch ein möglicher Spread zum variablen Zinssatz, eine zusätzliche Anfangszahlung ... als Preise betrachtet werden. |

Die Grundidee beim Bepreisen ist wiederum der *Barwertvergleich*. Es wird zwischen dem Festzinssatz, der unbekannt ist, und den variablen Zinsen, die aus der Zinsstrukturkurve ersichtlich sind, verglichen.

Das **Pricing** entspricht einer korrekten Bewertung auf Grundlage eines Barwertvergleichs.
Das **Pricing von Swaps** besteht damit in der korrekten Berechnung von „Stellgrößen“:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ Festzinssatz (Swapsatz)}\\ \bullet \text{ Spread}\\ \bullet \text{ Up-front payment}\end{array}\right\}\text{ unter Zugrundelegung von einer bzw. zwei Zinsstrukturkurven}$$

<u>Arten von Swaps:</u>

- **Kuponswap** (Straight Swap, Plain-vanilla Swap)
  fester Zinssatz $\leftrightarrow$ variabler Zinssatz
- **Basisswap**
  variabler Zinssatz $\leftrightarrow$ variabler Zinssatz
- **Währungsswap** (Cross-currency Swap, ccs)

  $$\underset{\text{Währung 1}}{\text{fester / variabler Zinssatz}} \quad \leftrightarrow \quad \underset{\text{Währung 2}}{\text{fester / variabler Zinssatz}}$$

Modifikationen:

- gleicher Nominalbetrag in allen Perioden → steigende oder fallende Nominalbeträge
- Festzinssatz → steigende oder fallende Zinssätze auf der Festsatzseite
- Variable Seite: statt LIBOR → LIBOR ± Spread
- Einmalige Sonderzahlungen am Anfang oder Ende des Zeitraumes (z.B. Up-front payment)
- Forward-Swap: Beginn erst in der Zukunft
- IRS in arrears („im Rückstand")

  z.B.: ein Partner erhält 6-Monats-LIBOR vor der Periode und zahlt am Ende der Periode 6-Monats-LIBOR ± Spread

# Kapitel 5

# Risikokennzahlen

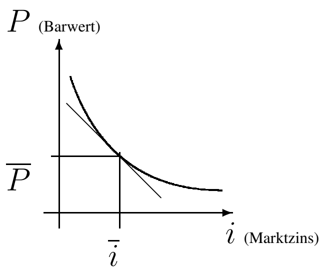
## 5.1 Definition und Eigenschaften wichtiger Risikokennzahlen

Risiken: Es gibt Markt-, Währungs-, Wiederanlage-, Zeit- und weitere Risiken.

| | |
|---|---|
| genauer: | Risiken sind die Veränderung gewisser Größen in Abhängigkeit von anderen Größen. |
| speziell: | Änderung des Barwertes in Abhängigkeit von Marktzinsänderungen |
| | Änderung des Barwertes in Abhängigkeit von Zeitänderungen |
| zunächst: | festverzinsliche Wertpapiere |
| später: | Optionen, Derivate |

Ziele:

- Messen (Berechnen) von Veränderungen
- Ausnutzen dieser Änderungen zum Beispiel im Portfoliomanagement (speziell: Hedgen)




**Ziel:** Möglichst einfache, aber möglichst genaue Beschreibung der Änderung des Funktionswertes der Funktion $P = f(i)$

$$\underbrace{\Delta P}_{\text{exakte Änderung}} \approx \mathrm{d}P = \underbrace{f'(\overline{i}) \cdot \Delta i}_{\text{Differenzial} \,\widehat{=}\, \text{Hauptanteil der Änderung}}$$

Es gibt verschiedene Kennzahlen zur Beschreibung der Änderungen:

- lineare Approximation:
  - Modified Duration
  - Duration, Elastizität
  - Basis Point Value (BPV)
- quadratische Approximation: Konvexität
- Kombination: Rendite- und Zeitänderung

$$P = f(i, T) \Rightarrow \text{Delta-Plus-Ansatz} \tag{5.1}$$

Bei Optionen gibt es die so genannten „Greeks“, z.B. Delta, Gamma, …

Annahme: Ein Zahlungsstrom ist gegeben.

Barwert (= Preis):

(5.2)

mit $q = 1 + i$, d.h. es gibt einen einheitlichen (Kalkulations- oder Markt-) Zinssatz $i$ (flache Zinsstruktur).

$\Rightarrow$ Die Summe kann oftmals als geschlossene Formel dargestellt werden. Dann kann sie z.B. differenziert oder anderweitig untersucht werden.

$\Rightarrow$ Die Formel kann auf variierende Zinsraten (Zinsstrukturkurve) verallgemeinert werden. $\rightarrow$ Im Allgemeinen existiert in diesem Fall aber keine geschlossene Formel.

## 5.2 Ausgewählte Risikokennzahlen

### 5.2.1 Basis Point Value (BPV)

$P = f(i)$ 1 Basis Point (BP) $= 0,01\% = \frac{1}{10.000}$ (absolute Größe)

$$\Delta P = \mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} \cdot \Delta i = f'(\bar{i}) \cdot \Delta i \tag{5.3}$$

Die Näherung der Kurve durch eine Tangente ist bis ca. 50 BP gut.

Wir wollen nun die Ableitung der Barwert-Rendite-Kurve berechnen.

$$P = f(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k} \tag{5.4}$$

(5.5)

Berechnen wir nun d$P$ für $\Delta i = 1BP = \frac{1}{10.000}$, so ergibt sich:

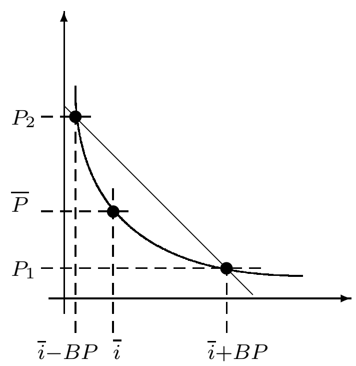
(5.6)

**Interpretation:** Wenn sich der (Markt-)Zinssatz absolut um $0,01\%$ ändert, so ändert sich der Barwert (des Zahlungsstromes) absolut um BPV.

Bemerkungen:

1. (Bew. Übungsaufgabe) (5.7)

2. Anderer Zugang zur Berechnung des BPV (= Simulation):




(5.8)

Dies entspricht dem Anstieg der Sekante.

3. Wir wollen nun die Zinsstrukturkurve zur Bewertung verwenden, d.h. mit Spot Rates $i_k$ arbeiten. Dafür nutzen wir eine modifizierte Barwertformel:

$$\tag{5.9}$$

Praktischer Zugang: Erstellen eines Portfolios mit verschiedenen Produkten in verschiedenen Laufzeitklassen.
D.h.: Einteilung in Laufzeitklassen (time buckets). $\Rightarrow$ Berechnung des BPV für jede Laufzeitklasse. $\Rightarrow$ Zusammenfassung aller Zahlungen einer Laufzeitklasse zu einem so genannten Macro Cashflow (*Key Rate Basis Point Value*).

| | | |
|---|---|---|
| z.B.: | Zone 1: | $\leq 1$ Woche |
| | Zone 2: | 1 Woche $< t \leq 1$ Monat |
| | Zone 3: | 1 Monat $< t \leq 1$ Jahr |
| | ... | |

### 5.2.2 Modified Duration (MD)

Die Modified Duration gibt die prozentuale Kursänderung an, wenn sich die Rendite um 100 BP ($= 1\%$ absolut) ändert. Wegen der großen Änderung ist die Approximation i.Allg. schlecht.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx MD = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} \cdot \frac{\Delta i}{P} = f'(i) \cdot \frac{\Delta i}{P} \tag{5.10}$$

mit $\Delta i = 100BP = 1\% = \frac{1}{100}$

$$\tag{5.11}$$

Bemerkungen:

1. MD eines Portfolios ist barwertgewichtet additiv.

$$\begin{array}{cccccccc} & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_k & \dots & & Z_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & & n \end{array}$$

Barwert der $k$-ten Zahlung: $P = \dfrac{Z_k}{(1+i)^k}$

$$\Rightarrow w_k = \frac{1}{P} \cdot \frac{Z_k}{(1+i)^k} \qquad \text{(„Gewicht“ des Barwerts der } k\text{-ten Zahlung)} \tag{5.12}$$

2. In der Praxis wird oft das Minuszeichen weggelassen.

3. Zusammenhang zwischen MD und BPV:

(5.13)

4. Analog zu BPV: Laufzeitklassen $\Rightarrow$ Key Rate Modified Duration

5. Problem:
   Falls für ein Portfolio gilt $P = 0$, so ist die MD nicht erklärt. Dies tritt z.B. bei refinanzierten Portfolios auf.
   Ausweg:

   - Wir betrachten die Aktiv- und die Passivseite einzeln.
   - Wir berechnen die einzelnen Risikokennzahlen und addieren diese.

6. Bei (Zins-) Elastizität wird die unabhängige Variable $i$ um $1\%$ (relativ) erhöht.

$$\frac{\text{relative Barwertänderung}}{\text{relative Zinsänderung}} = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{i}} \approx \varepsilon = f'(i) \cdot \frac{i}{P} \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow MD = -\frac{\varepsilon}{i} \tag{5.15}$$

### 5.2.3 Duration (D)

Die Duration ist die am häufigsten verwendete Kennzahl. Es gibt unterschiedliche Interpretationen dieser Kennzahl, die dann auf unterschiedliche Maßeinheiten führen: z.B. Jahr (Zinsperiode), dimensionslos:

(5.16)

Eine Verallgemeinerung auf nichtganzzahlige $k$ ist möglich.
Interpretation:

1. Der Zahlungsstrom bzw. die Anleihe entspricht einem Portfolio aus Zerobonds.

   (a) Duration = barwertgewichtete Summe der Durationen aller Zerobonds

   <u>Gewichte:</u>

$$w_k = \frac{Z_k}{(1+i)^k} \cdot \frac{1}{P} \tag{5.17}$$

mit $w_k$ ... Anteil des $k$-ten Barwerts am Portfolio $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k = 1$

$\frac{Z_k}{(1+i)^k}$ ... Barwert der $k$-ten Zahlung

$P$ ... Barwert des Portfolios

Duration:

$$\Rightarrow D = \sum_{k=1}^{n} k \cdot w_k \tag{5.18}$$

$k$ ... Duration der $k$-ten Zahlung

$w_k$ ... Gewichte

(b) Duration = barwertgewichtete mittlere Restlaufzeit der Anleihe

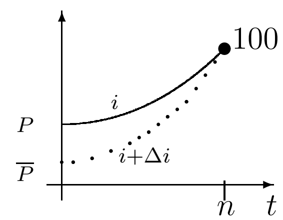
2. Weitere Erläuterungen zum Begriff der Duration:

   Barwert einer Anleihe / eines Zahlungsstromes, berechnet aus gegebener (Markt-) Rendite $i$ unmittelbar nach Kauf

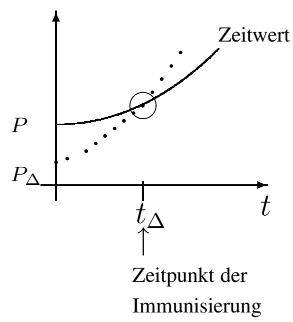
   Durch eine Barwertänderung oder durch Änderung des Wiederanlagezinssatzes ist Änderung der Rendite möglich.

   **Problem:** Wann erfolgt Kompensation (Immunisierung), d.h. wann ist die Anleihe unempfindlich gegenüber Marktzinsänderungen?

Zerobond:




Anleihe: (hier: $\Delta i > 0$)




Wiederanlage der Zinsen zu einem höherem Zinssatz

Ansatz (zur Bestimmung des Zeitpunkts $t_\delta$ der Gleichheit der Zeitwerte):

(5.19)

(5.20)

Jetzt lassen wir $\Delta i \to 0$ gehen:

für $\Delta i \to 0$ gilt:

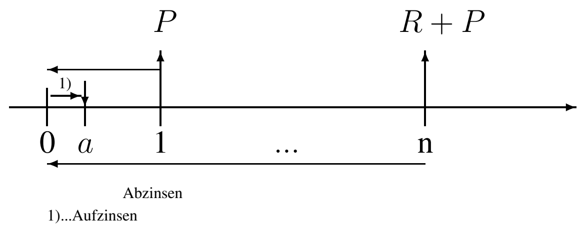
$$\begin{aligned} 1+i+\Delta i &\to 1+i \\ P_\Delta &\to P \end{aligned}$$

Also:
**Duration** $\hat{=}$ Zeitpunkt $t_\Delta$, wo die Anleihe immun gegen Zinsänderung ist für $\Delta i \to 0$.

Duration konkreter Produkte:

1. Zerobond: $D = n$

2. Endfällige Anleihe mit gebrochener Laufzeit:




hier: $n-1$ ganze Perioden.

(5.21)

mit $q = 1 + i$, während $n, a, p, R$ fixe Parameter sind.

$$f'(i) = \ldots = q^a \left[ \frac{ap}{iq} - \frac{p}{i^2 q^n} + \frac{(n-a)p}{iq^{n+1}} - \frac{(n-a)R}{q^{n+1}} \right] \tag{5.22}$$

$$\Rightarrow D = -f'(i) \cdot \frac{1+i}{P} = \ldots = \frac{1+i}{i} - a - \frac{np + (q - in)R}{p(q^n - 1) + iR} \tag{5.23}$$

falls $a = 0$, d.h. Laufzeit von $n$ ganzen Perioden

$$\tag{5.24}$$

3. Duration einer ewigen Rente:

$$D = \frac{1+i}{i} - a - \frac{np + (q - in)R}{p(q^n - 1) + iR} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tag{5.25}$$

$$0 < a < 1 : \tag{5.26}$$

D.h., die Duration wird als Schwerpunkt der Barwertmassen betrachtet. Sie ist endlich, obwohl die Zahlungen unendlich lange andauern.

Die Schranke wird kleiner, wenn $i$ größer wird. Gerade in Hochzinsphasen, wo man sein Geld möglichst lange anlegen will, ist eine langfristige Anlage besonders schwierig.

$\Rightarrow$ Geburtsstunde der Zerobonds (Geldanlage ist gesichert wegen $D = n$).

**Bemerkungen:**

(a) $D_{Portfolio}$ = barwertgewichtetes Mittel der Einzeldurationen.

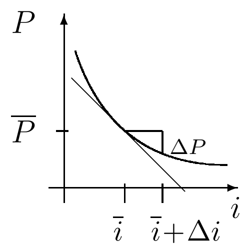
(b) Falls $P_{Portfolio} = 0 \Rightarrow$ Aktiv- und Passivseite einzeln betrachten.

(c) Laufzeitklassen betrachten $\Rightarrow$ Key Rate Duration

(d) Die Duration ist ein äquivalentes Sensibilitätsmaß zur Elastizität. Dann ist $D$ dimensionslos: $D = \ldots = \varepsilon \cdot \frac{1+i}{i}$.

2 Aspekte der Duration:

1. Absolute (relative) Barwertänderungen beschreiben.




$$\Delta P \approx -\frac{P}{1+i} \cdot D \cdot \Delta i \tag{5.27}$$

- Bei Zinsverringerung ($\Delta i < 0$): Tangente (Duration, Modified Duration) liefert Unterschätzung des Barwertes.
- Bei Zinserhöhung ($\Delta i \geq 0$): Die Tangente schätzt einen größeren Kursverlust, als tatsächlich entstanden ist.

$\Rightarrow$ eher konservatives, pessimistisches Konzept

2. Zinsimmunisierung

= Unempfindlichkeit gegenüber Zinsänderungen (zu bestimmten Zeitpunkt)

Situation: Anleger benötigt zu einem späteren Zeitpunkt $t^*$ eine gewisse Summe $K^*$.

Betrachten 3 Strategien um $K^*$ in $t^*$ zu sichern:

(a) Kauf eines Zerobonds mit Laufzeit $t^*$ und der Höhe $K^*$ $\Rightarrow$ unabhängig von der Zinsrate in $[0, t^*]$ $\Rightarrow$ $K^*$ ist sicher.

(b) Kauf eines Kurzläufers mit Laufzeit $t < t^*$ (geringeren Nominalwert anlegen). Ob $K^*$ in $t^*$ erreicht wird, hängt von dem (Wiederanlage-) Zinssatz in $t$ ab.

$i < i^*$ $\Rightarrow$ $K^*$ wird nicht erreicht

$i > i^*$ $\Rightarrow$ $K^*$ wird erreicht bzw. übertroffen.

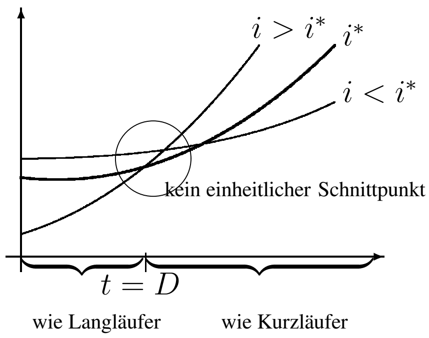
(c) Kauf eines Langläufers mit Laufzeit $t > t^*$ und Verkauf in $t^*$. Falls in $t^*$:

$i > i^*$ $\Rightarrow$ Kursverlust

$i < i^*$ $\Rightarrow$ $K^*$ wird übertroffen.

Also: Tendenziell sind 2b) und 2c) zinsempfindlich und gegenläufig.

Jetzt: Übertragung dieser Überlegungen auf den Zeitwert einer Anleihe.




Besonderheit der Duration:

Bei $t = D$ gilt: $K_D^{(i)} \geq K_D^{(i^*)}$, d.h. im Zeitpunkt $t = D$ bewirkt jede Zinsänderung höchstens eine Verbesserung (= Immunisierungseigenschaft der Duration).

Beweis dieser Behauptung: Wir betrachten die Extremwertaufgabe:

$$K_D^{(i)} \quad = \quad f(i) \rightarrow \min_i$$

**Ges.:** Zinsrate $\hat{i}$, welche die Extremwertaufgabe löst.

$\Rightarrow$ Eine Lösung ist: $i = i^*$

Dynamik:

Die heute berechnete Duration ändert sich bei verändertem Zinssatz und im Laufe der Zeit. Nach einer gewissen Zeit muss eine Anpassung vorgenommen werden. Dies kann geschehen durch Kauf eines weiteren Papieres oder durch geeignete Gewichtung des Portfolios.

Wir wissen:

$$D_{Portfolio} = \sum_{i=1}^{N} w_i D_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \quad w_i \geq 0$$

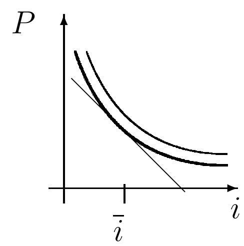
Jetzt betrachten wir ein Portfolio aus zwei Papieren:

Geg.: $D$ – gewünschte Duration (z.B. die Laufzeit bis zur Fälligkeit einer Verpflichtung)
$D_1, D_2$ – Durationen der Einzeltitel, ein mit $D_1 < D < D_2$
Ges.: Gewichte $w_1, w_2$ mit $w_2 = 1 - w_1$

$$D \overset{!}{=} D_{Portfolio} = w_1 D_1 + (1 - w_1) D_2 \Rightarrow w_1 = \ldots = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1} \quad \text{(lineare Interpolation)}$$

Aber auch hier muss man die Dynamik beachten.

### 5.2.4 Konvexititãt (C)




Wünschenswert ist eine genauere Approximation der Kurve als nur durch eine Tangente ⇒ Approximation der 2. Ordnung. Ist die Kurve unsymmetrisch, hat das Vorteile für den Investor. Diese sind umso größer, je stärker die Kurve gekrümmt ist. ⇒ Wünschenswert ist ein Krümmungsmaß.

Taylorentwicklung der Funktion $P = f(i)$:

$$P(i) \approx P(\bar{i}) + P'(\bar{i}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} P''(\bar{i}) \cdot (\Delta i)^2 \tag{5.28}$$

Es gilt

Daraus ergibt sich die Konvexität $C$:

$$C = \frac{P''(i)}{P} = \frac{1}{P(1+i)^2} \cdot \sum \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k} \tag{5.29}$$

$$\tag{5.30}$$

Näherungsformel:

$$\tag{5.31}$$

Bemerkungen:

1. Konvexität des Portfolios = barwertgewichtete Summe der einzelnen Konvexitäten
2. $P = 0 \Rightarrow$ Beide Seiten einzeln betrachten.
3. Es gibt auch Key Rate Convexity.
4. Es gilt $\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+i} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot C \cdot (\Delta i)^2$ (quadratische Approximation)
5. Je größer die Konvexität (bei gleichem Preis und gleicher Duration), desto besser.

### 5.2.5 Theta ($\Theta$)

Barwertänderung in Abhängigkeit von der Änderung der Restlaufzeit

$$P = f(T), \quad \text{T} \ldots \text{Restlaufzeit (gemessen in Jahren; Usancen beachten!)} \tag{5.32}$$

Zerobond:

z.B.: Restlaufzeitverkürzung von einem Tag: $\Delta T = -\frac{1}{360}$.

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} \approx P'(T) \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\Delta P}_{\text{exakte Änderung}} \approx \underbrace{P'(T) \cdot \Delta T}_{\text{Differenzial = näherungsweise Änderung}}$$

$$\Theta = P \cdot \ln(1+i) \cdot \frac{1}{360} \tag{5.33}$$

= näherungsweise Barwertänderung bei Restlaufzeitverkürzung um 1 Tag.

Anleihe: (bzw. beliebiger Zahlungsstrom) = Portfolio von Zerobonds

analog zu Zerobond:

$$\Delta P \approx \Theta = \frac{P}{360} \cdot \ln(1+i) \tag{5.34}$$

= Barwertänderung bei Laufzeitverkürzung von 1 Tag.

Bemerkungen:

1. Die geschlossene Formel (5.34) erhält man nur, wenn $i$ einheitlich ist, d.h. wenn eine flache Zinsstrukturkurve vorhanden ist. Ansonsten bleibt die Summe stehen.
2. Alternativer Zugang:

   Wir zinsen den heutigen Barwert um 1 Tag auf und bilden die Differenz.

   $$\overline{\Theta} = P \cdot (1+i)^{\frac{1}{360}} - P = P\left[(1+i)^{\frac{1}{360}} - 1\right] \tag{5.35}$$

   Es gilt: $\Theta = \overline{\Theta}$, weil nach der Taylorentwicklung gilt:

### 5.2.6 Delta-Plus-Ansatz

hier: $P = f(i,T)$ ist eine Funktion von zwei Veränderlichen

$$\begin{aligned} P = f(i,T) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}, \quad k \hat{=} T \\ \Delta P &\approx \frac{\partial P}{\partial i} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial i^2} \cdot (\Delta i)^2 + \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \Delta T \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \tag{5.36}$$

mit $BPV$ ... Basis Point Value

$C$ ... Konvexität

$\Theta$ ... Theta

Bemerkungen:

1. Der Delta-Plus-Ansatz (5.36) liefert die genaueste Approximation.
2. Von $i$ bzw. $T$ abhängige Größen sind additiv verknüpft und können deshalb einzeln gesteuert werden.

## 5.3 Ausgewählte Risikokennzahlen konkreter Produkte

Hier werden behandelt: Duration, Theta, Preis. Bei einem einheitlichen Zinssatz gilt für einen beliebigen Zahlungsstrom und damit für belibige Produkte: $\Theta = \frac{P}{360} \cdot \ln(1+i)$.

### 5.3.1 Zerobond

$$\text{Duration: } D = n \tag{5.37}$$

### 5.3.2 Anleihe

= Straight Bond; auch mit gebrochener Laufzeit

Duration: Siehe Punkt 5.2.3.

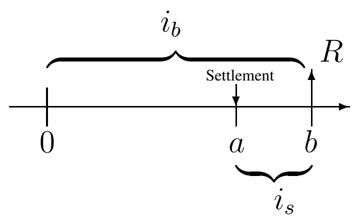
### 5.3.3 Floater

Für einen bestimmten Zeitraum (3 Monate, 6 Monate) werden variable Zinsen gezahlt (z.B. LIBOR, EURIBOR). Floater werden auch Straight Floater oder Plain-Vanilla Floater genannt.

Varianten: · Straight Floater + Spread

· Kapitalmarktfloater

Floater werden regelmäßig an (Geld-) Marktbedingungen angepasst und besitzen ein geringes Kursrisiko.



Preis: N=100

$$\begin{aligned}\text{Clean Price} &= \text{Dirty Price} - \text{Stückzinsen} \\ &= \frac{100(1+b\cdot i_b)}{1+i_s\cdot(b-a)} - 100\cdot a\cdot i_b \end{aligned} \tag{5.38}$$

Duration: (berechnet zum Zeitpunkt 0; mittels geometrischer oder linearer Verzinsung)
Floater $\hat{=}$ Zerobond:

$$D = \frac{100(1+b\cdot i_b)}{100(1+i_b)^b} \approx b \qquad \text{wobei } b \text{ – Laufzeit eines LIBOR, EURIBOR, ...} \tag{5.39}$$

Analog ergibt sich die Duration für einen beliebigen Zeitpunkt zwischen $0$ und $b$:

$$D = b - a \tag{5.40}$$

Theta: (zum Zeitpunkt $0$)

$$\Theta = \frac{100}{360}\cdot\ln(1+LIBOR) \tag{5.41}$$

Bemerkung:
Einen Floater $\pm$ Spread, d.h. Auf-/Abschlag, muss man in einen Floater und eine endliche Rente zerlegen, sog. Stripping. Die Kennzahlen und der Preis des Gesamtproduktes werden aus den Kennzahlen und dem Preis der einzelnen Teile berechnet. Dies ist ein allgemeines Vorgehen bei strukturierten Produkten.

### 5.3.4 Forward Rate Agreement (FRA)

Preis:

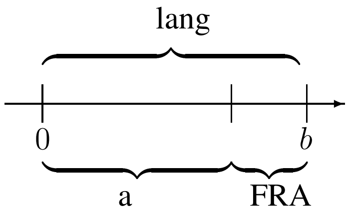
- Preis = 0, weil ein FRA gleich einer Abmachung über eine eventuelle Ausgleichszahlung ist.

oder

- „Preis“ $\hat{=} i_f =$ Forward Rate, die aus der Zinsstrukturkurve berechnet wurde.

Für die Risikokennzahlen steht hier die Marktrendite **nicht** zur Verfügung, da zukünftiger LIBOR unbekannt ist bzw. hängt $i_f$ von mehreren Zinssätzen ab.

Anderer Weg:




Die <u>Risikokennzahlen</u> eines FRA ergeben sich als Addition / Subtraktion der Risikokennzahlen der beiden Bestandteile.

### 5.3.5 Swaps

Der einfachste Fall ist ein Kuponswap, d.h. Tausch eines Festzinses gegen einen variablen.

<u>Preis:</u>

- Preis = 0

oder

- „Preis“ $\hat{=}$ Festzinssatz bzw. ein anderer Parameter des Swaps (in komplizierten Fällen).

<u>Risikokennzahlen:</u>
Kuponswap = gekaufte Anleihe (mit Festzinssatz) und verkaufter / emittierter Floater
$\Rightarrow$ Kennzahlen für die Einzelprodukte berechnen und Summe bzw. Differenz bilden.

### 5.3.6 Futures

exemplarisch: Bundfuture (es gibt auch: DAX-Future, Soja-, Öl-Future, Orangensaft, Schweinehälften,...)
Zweck: Spekulation, Hedgen

**Bundfuture:**

- Underlying eines Bundfutures: fiktive Bundesanleihe mit 10 Jahren Restlaufzeit und $p = 6$ (= Notional Bond).
- 1 Kontrakt $100.000$ EUR
- 1 Tick $\hat{=}$1 BP$\hat{=}$$10$ EUR
- ist ein standardisiertes Produkt, liquide, sicher
- 4 Verfallstermine pro Jahr

- Das Gegenstück sind Forward-Kontrakte (individuell zugeschnittene (OTC)-Produkte).

Verkäufer eines Bundfutures muss am Liefertag eine lieferbare Anleihe über 100.000 EUR an den Käufer des Bundfutures liefern, der dafür den Gegenwert zahlt.
Lieferbare Anleihen müssen bestimmten Bedingungen genügen (z.B. Bundesanleihent mit Restlaufzeit von $8\frac{1}{2} - 10$ Jahren). Dann wird die lieferbare Anleihe mit der fiktiven Anleihe mittels Preisfaktor verglichen:

$$F_{Anleihe} = \frac{P_{Anleihe} \text{ bei 6\% Marktrendite}}{P_{fiktiveAnleihe} \text{ bei 6\% Marktrendite}} \tag{5.42}$$

Bemerkung: Alle lieferbaren Anleihen und den Preisfaktor findet man im Börsenblatt.

Die Berechnung des Preisfaktors erfolgt mittels Börsenformel, die eine Näherung für den obigen Quotienten $\frac{P_{Anleihe}}{P_{fiktiv}}$) darstellt:

$$F_{Anleihe} = \frac{1}{1,06^f}\left[\frac{p}{6}\left(1,06 - \frac{1}{1,06^n}\right) + \frac{1}{1,06^n}\right] - p \cdot \frac{1-f}{100} \tag{5.43}$$

Erläuterung:

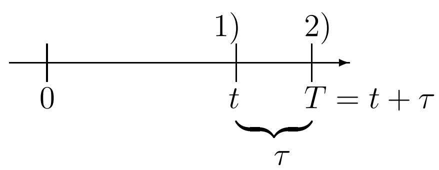
$$\tag{5.44}$$

mit: $p \ldots$ Kupon der Anleihe, $n \ldots$ Anzahl der ganzen Jahre
$f \in [0,1] \hat{=}$ Abrundung auf volle Monate Restlaufzeit
(vgl. ISMA-Methode zur Effektivzinsberechnung)

Abrechnungspreis: der vom Besitzer des Bundfutures an Lieferer gezahlt wird:

$$P = EDSP \cdot F_{Anleihe} + \text{Stückzinsen} \tag{5.45}$$

mit EDSP ... Exchange Delivery Settlement Price (= Durchschnittspreis am Liefertag)




**Wie kann man die Risikokennzahlen eines Bundfutures ermitteln?**
Aus einem Arbitrageportfolio (= häufig angewandter „Trick“ in der Finanzmathematik).

1) Verkauf des Bundfutures, Aufnahme eines Kredits, Kauf einer Anleihe
2) 
   - Lieferung der Anleihe, Bezahlung dafür
   - Rückkauf des Bundfutures (Glattstellung)
   - Rückzahlung des Kredits

Bemerkung:
Preis Bundfuture = Terminkurs (zum Liefertermin des fiktiven Underlyings)

Berechnung des theoretisch fairen Preises des Bundfutures $P^T$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| <u>Bilanz in $t$:</u> | Verkauf $F_A$ Stück Bundfuture: | in $T$ erhalte ich: | $P^T \cdot F_A$ |
| | | in $t$: | $0$ |
| | Kauf Anleihe $A$: | in $t$: | $-(P_A + p_A \cdot t)$ |
| | Kreditaufnahme: | in $t$: | $\underline{+(P_A + p_A \cdot t)}$ |
| | | | $= 0$ |
| <u>Bilanz in $T$:</u> | Glattstellung des verkauften Bundfutures durch Rückkauf: | | $+P^T \cdot F_A - F_A \cdot EDSP$ |
| | Lieferung der Anleihe: | | $F_A \cdot EDSP + p_A(t+\tau)$ |
| | Kreditrückzahlung: | | $\underline{-(P_A + p_A t)(1 + r\tau)}$ |

$$= P^T \cdot F_A - P_A + p_A\tau - (P_A + p_A t) r\tau \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \text{in T:} \quad P^T \cdot F_A = \underbrace{P_A + \underbrace{\left[ \underbrace{(P_A + p_A t)\, r\tau}_{\text{Finanzierungskosten}} - \underbrace{p_A\tau}_{\text{Stückzinsen}} \right]}_{\text{Cost of Carry}}}_{\text{(theoret.) Terminkurs der Anleihe}} = P_A^T \tag{5.46}$$

**Bemerkungen:**

1. Der Ertrag bei der Lieferung der Anleihe (im Zeitpunkt $T$) hängt <u>nicht</u> ab vom EDSP, sondern von der konkreten Anleihe, die gekauft wurde, und vom kurzfristigen Zinssatz.

2. Unter verschiedenen lieferbaren Anleihen gibt es (mindestens) eine beste / billigste, die den höchsten Ertrag oder den niedrigsten Verlust erzeugt. Dies ist die CtD-Anleihe.

Wie findet man die CtD-Anleihe?

Für gegebenen Futurepreis $P^T$ berechnet man für alle lieferbaren Anleihen $A$ die Größe $r_A$ (IRR, Internal Repo Rate, Refinanzierungssatz). Das ist diejenige Größe, für die in obiger Bilanzgleichung Gleichheit gilt:

$$r_A = \frac{F_A P^T - P_A + p_A\tau}{(P_A + p_A t)\tau} \tag{5.47}$$

Von allen $r_A$ wird der größte Wert genommen. Dieser entspricht der CtD-Anleihe.

Übungsaufgabe: Man überlege sich, warum!

3. An der Cheapest-to-Deliver-Anleihe orientiert sich der Future-Preis:

$$P^T = \frac{P^T_{CtD}}{F_{CtD}} \tag{5.48}$$

4. Es besteht Gleichgewicht (zumindest theoretisch) zwischen dem Terminkurs der CtD-Anleihe und dem Futurepreis:

$$\begin{aligned} \text{Futurepreis} &= \frac{\text{Terminkurs } CtD}{F_{CtD}} \\ \text{Terminkurs } CtD &= \text{Kassakurs} + \text{Cost of Carry} \\ \text{Cost of Carry = Finanzierungskosten} &- \text{Stückzinsertrag} \end{aligned}$$

5. Die Risikokennzahlen des Futures lassen sich folglich so ermitteln:

$$\text{Risikokennzahl}_{Future} = \frac{1}{F_{CtD}} \cdot \text{Risikokennzahl}_{CtD} \tag{5.49}$$

Das bedeutet:
Die Risikokennzahlen des Bundfutures lassen sich ermitteln aus den Kennzahlen der CtD-Anleihe, dividiert durch $F_{CtD}$.

# Kapitel 6

# Einführung in die Optionspreistheorie

## 6.1 Grundlagen

### 6.1.1 Grundbegriffe

**Option:** = Vertrag, der dem Käufer

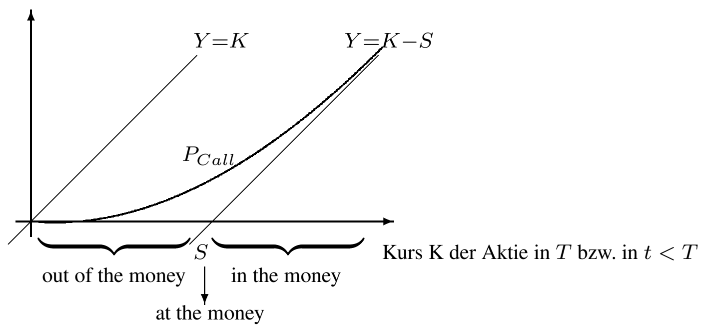
- während des Zeitraumes $[0, T]$ (= Amerikanische Option) oder in $T$ (= Europäische Option) das Recht (aber nicht die Verpflichtung) gibt,
- eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes,
- zu einem festgesetzten Preis (= Strike Price, Basispreis),
- zu kaufen (= Call) oder zu verkaufen (= Put).

Beispiel:
1 Aktie am 1.7. des kommenden Jahres kaufen zu 12 EUR $\Rightarrow$ $P_{Call} \ldots$ Preis eines Calls.
Am 1.7.2005 steht die Aktie bei 15 EUR und wir können für 12 EUR die Aktie kaufen (d.h. Option ausüben) und sofort wieder für 15 EUR verkaufen $\Rightarrow$ 3 EUR Gewinn.
Liegt der Aktienpreis aber am 1.7.2005 bei 5 EUR $\Rightarrow$ Option verfällt.

Tatsächlicher Gewinn:

$$\text{innerer Wert} - P_{Call} \cdot (1 + i) \tag{6.1}$$

Analog: Verkäufer eines Calls = Stillhalter



Qualitative Abhängigkeiten:

| | | |
|---|---|---|
| heutiger Aktienkurs: | $P_{Aktie} \uparrow$ | $P_{Call} \uparrow$ |
| Restlaufzeit: | $\tau \uparrow$ | $P_{Call} \uparrow$ |
| Volatilität: | $\sigma \uparrow$ | $P_{Call} \uparrow$ |
| Strike Price: | $S \uparrow$ | $P_{Call} \downarrow$ |
| risikoloser Zins: | $i \uparrow$ | $P_{Call} \uparrow$ |

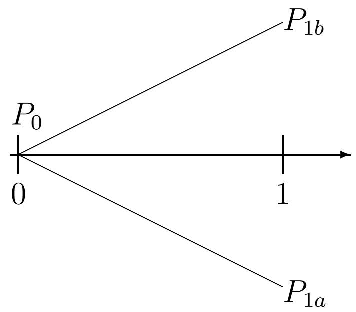
Wie muss der theoretisch richtige Call-Preis lauten?

Es gibt dazu verschiedene Berechnungsmöglichkeiten:

- Cox/Ross/Rubinstein-Modell
- Merton-Modell → Black-Scholes-Formel
- ...

**Bemerkung:** Das tatsächliche Verhalten am Markt wird in der Regel davon abweichen.

Grundidee:
Wir bilden ein **Arbitrageportfolio**. Call auf Aktie $\hat{=}$ gekaufte Aktie und geliehenes Geld in einer solchen Höhe, dass in $t = 0$ und $t = 1$ dieselben Zahlungen vorliegen.




$P_{1a/1b}$ ... Aktienpreis zum Zeitpunkt $t = 1$, geschätzt aus Historie
$L$ ... Menge geborgten Geldes
$x$ ... Menge des verkauften Calls
$y$ ... Menge der gekauften Aktie

$$\text{innerer Wert:} \qquad \Delta = P_{1b} - S \tag{6.2}$$

Gesucht: Preis des Calls $P_{Call}$

Bilanzbeziehungen:

$$
\begin{aligned}
t = 0: &\qquad \stackrel{!}{=} 0 \\
T = 1: &\qquad \stackrel{!}{=} 0 \quad (*) \\
T = 1: &\qquad \stackrel{!}{=} 0 \quad (**)
\end{aligned}
$$

(*) ... Der Call ist wertlos, d.h. es wird der Aktienkus $P_{1a}$ verwendet.
(**) ... Option wird ausgeübt, d.h. $P_{1b}$.

Dieses Gleichungssystem ist homogen und deshalb immer lösbar, aber nichttriviale Lösungen existieren nur für $\det A = 0$

$$\det A = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \qquad P_{Call} = \frac{\Delta[(1+i)P_0 - P_{1a}]}{(1+i)(P_{1b} - P_{1a})} \tag{6.3}$$

Andere Überlegung:

Ein Investor erwartet eine Rendite des Calls, die der risikolosen Verzinsung entspricht.

- Wir führen die „Wahrscheinlichkeit" $p$ ein. Mit der Wahrscheinlichkeit $p$ beträgt der Kurs in $t = 1$ $P_{1b}$ und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ der Kurs $P_{1a}$.
- Wir berechnen den Erwartungswert der Aktienrendite in $t = 1$:

$$p = \frac{(1+i)P_0 - P_{1a}}{P_{1b} - P_0} \tag{6.4}$$

- Erwartungswert des Calls in $\underline{t = 1}$:

$$p \cdot \Delta + (1-p) \cdot 0 = p \cdot \Delta$$

$\underline{\text{in } t = 0}$:

$$\frac{p \cdot \Delta}{1+i} \qquad \text{(d.h. Abzinsen um eine Periode)}$$

$$\Rightarrow P_{Call} = \frac{\Delta}{1+i} \cdot \frac{(1+i)P_0 - P_{1a}}{P_{1b} - P_{1a}} \tag{6.5}$$

### 6.1.2 Bewertung nach Black-Scholes

Wir verwenden das Modell von Cox-Ross-Rubinstein, erhöhen die Periodenzahl, d.h. $n \to \infty$, verkürzen die Intervalllänge, d.h. $\frac{1}{n} \to \infty$, und stellen noch einige weitere Voraussetzungen.

oder:

- Voraussetzungen bez. der Verteilung der zukünftigen Aktienkurse
- Voraussetzungen bez. des Modells

$\Rightarrow$ Es entsteht eine partielle Differentialgleichung; diese sind i. Allg. nur numerisch lösbar.

hier: geschlossene Lösung dieser partiellen Differentialgleichung möglich (= BS-Formel)

**Black-Scholes-Formel:**

$$P_{Call} = P_{Aktie} \cdot \Phi(d_1) - Se^{-it}\Phi(d_2) \tag{6.6}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{P_{Aktie}}{S}\right) + iT + \sigma^2\frac{T}{2}\right] \tag{6.7}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{P_{Aktie}}{S}\right) + iT - \sigma^2\frac{T}{2}\right] = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{6.8}$$

Hierbei bedeuten:

$\Phi$ ... Verteilungsfunktion der Normalverteilung
$i$ ... risikoloser Zinssatz
$\sigma$ ... Volatilität
$T$ ... Restlaufzeit
$P_{Aktie}$ ... heutiger Kurs der Aktie

**Bemerkung:** Der Wert $P_{Call}$ stellt (unter den getroffenen Voraussetzungen) eine faire Bewertung der Option dar.

## 6.2 The Greeks

Die Greeks sind die partiellen Ableitungen nach den Einflussgrößen. Sie stellen Risikokennzahlen dar.

### 6.2.1 Delta

$$\Delta = \frac{\partial P_{Call}}{\partial P_{Aktie}} = \Phi(d_1) > 0 \tag{6.9}$$

Vorsicht: Der Kurs der Aktie $P_{Aktie}$ ist in $d_1$ und $d_2$ enthalten. Deshalb muss die Kettenregel angewendet werden.

Für die Herleitung der Beziehung (6.9) benötigt man folgende Hilfsbeziehung

$$P_{Aktie} \cdot \varphi(d_1) = S \cdot \mathrm{e}^{-it} \cdot \varphi d_2 \tag{6.10}$$

Dann gilt:

**Interpretation:** Ändert sich der Aktienkurs um $\Delta P_{Aktie}$, so ändert sich $P_{Call}$ (näherungsweise). Das partielle Differential ist der Hauptanteil der Funktionsänderung bei Änderung einer Einflussgröße.

Anwendung des $\Delta$: **Hedge-Strategie**
Besitzt der Stillhalter einer Option $\Delta$ Aktien, so ist er (zumindest in $t = 0$) perfekt abgesichert. D.h.: Wenn sich der Aktienkurs erhöht („gut"), so erhöht sich auch der Callpreis („schlecht"). Im Verhältnis $1$ Option zu $\Delta$ Aktien gleicht sich diese Beziehung gerade aus.

Aber Vorsicht! Es ist eine dynamische Anpassung notwendig. Man erreicht eine feinere Absicherung durch das so genannte $\Delta$–$\Gamma$–Hedging.

### 6.2.2 Gamma

$$\Gamma = \text{Veränderung des Deltas} = \frac{\partial^2 P_{Call}}{\partial P_{Aktie}^2} = \ldots = \frac{\varphi(d_1)}{P_{Aktie} \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} > 0 \tag{6.11}$$

**Bemerkung:** Eine (relativ starke) Änderung des Delta geschieht an der Stelle, wo der Call „am Geld" („at the money") ist. Bei „out of the money" und „ in the money" ändert sich das Delta hingegen kaum.

### 6.2.3 Theta

$$\Theta = \frac{\partial P_{Call}}{\partial T} = \ldots = \frac{P_{Aktie} \cdot \sigma \cdot \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + iSe^{-iT}\Phi(d_2) > 0 \tag{6.12}$$

### 6.2.4 Lambda

$$\Lambda = \frac{\partial P_{Call}}{\partial \sigma} = \ldots = P_{Aktie}\sqrt{T}\varphi(d_1) > 0 \tag{6.13}$$

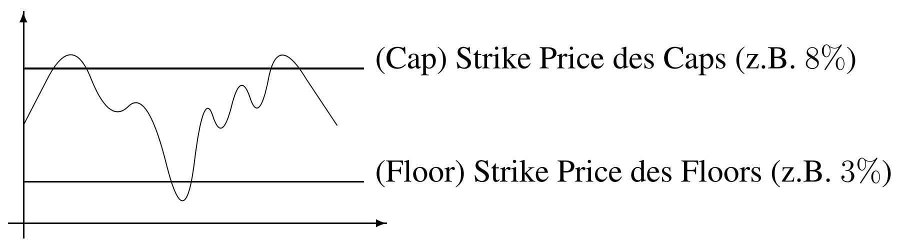
## 6.3 Weitere ähnliche Modelle

- Aktienoptionen mit Dividendenzahlung $\rightarrow$ Merton-Modell
- Devisenoptionen (inländischer risikoloser Zinssatz, inländischer risikoloser Zinssatz, heutiger Wechselkurs) $\rightarrow$ Garman-Kohlhagen-Modell
- Optionen auf Futures (Black-Modell)
- Zinsoptionen:

  Bei Zinsoptionen gibt es zum Teil andere Voraussetzungen, weil mehrere Zinssätze (kurzfristig, mittelfristig,...) wichtig sind und weil die Zinsen einem mean reversion-Prozess entsprechen, d.h. Rückkehr zu einem „mittleren“ Zinssatz.

  **Wichtige Zinsoptionen:**

  – Caps (Menge von Caplets) $\hat{=}$ Höchstzinssatz
  – Floors (Menge von Floorlets) $\hat{=}$ Mindestzinssatz
  – Collar („Korridor“) (gekauft) $\hat{=}$ Portfolio aus einem gekauften Cap und einem verkauften Floor




  Falls der Zinssatz im Korridor ist, wird die Option nicht ausgeübt. Falls er außerhalb ist, erfolgt eine Ausgleichszahlung.

- Swaption:

  = Option auf Interest Rate Swaps.

  Der Inhaber einer Payer Swaption zahlt einen Festzinssatz und der Inhaber einer Receiver Swaption erhählt einen Festzinssatz.
  Es existieren Modelle zur Bewertung von Swaptions (= Pricing) und zur Berechnung der Risikokennzahlen von Swaptions.

- Strukturierte Produkte:

  = Produkte, die auf spezielle Kundenwünsche zugeschnitten sind. Es sind Portfolios aus bekannten Bausteinen. Die Risikokennzahlen des Produktes ergeben sich dann aus den Risikokennzahlen der einzelnen Bausteine des Portfolios.

  z.B. Floored Floater, Collared Floater, Callable Bond, Putable Bond

# Kapitel 7

# Einige Aspekte des Portfolio-Managements

## 7.1 Kennzahlen für Portfolios

1. *Barwert eines Portfolios* = Summe der Barwerte aller $N$ Einzeltitel

2. *Basis Point Value eines Portfolios* = Summe der PBV aller Einzeltitel

3. *Duration eines Portfolios*:

$$D_p = \sum_{s=1}^{N} D_s \cdot \frac{P_s}{P_1 + \ldots + P_N} = \sum_{s=1}^{N} D_s \cdot w_S = \frac{1}{P_{\text{port}}} \cdot \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{k \cdot Z_{sk}}{q^k}$$

= barwertgewichtete Summe der Durationen der Einzeltitel bzw. Summe aller gewichteten und abgezinsten Einzelzahlungen

4. *Konvexität eines Portfolios* = barwertgewichtete Summe der Konvexitäten der Einzeltitel

5. *Rendite eines Portfolios*:

a) exakt: Löse die Polynomgleichung höherer Ordnung $P_{\text{port}} = \sum\limits_{s=1}^{N} \sum\limits_{k=1}^{n_s} \frac{Z_{sk}}{q^k}$

b) näherungsweise: $i_p \approx \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{N} D_s \cdot P_s \cdot i_s}{\sum\limits_{s=1}^{N} D_s \cdot P_s}$ = durationsgewichtete Summe der Einzelrenditen

c) schlechtere Näherung: $i_p \approx \dfrac{1}{P_{\text{port}}} \sum\limits_{s=1}^{n} P_s \cdot i_s$ = Summe der barwertgewichteten Renditen der Einzeltitel

6a. *Dispersion (Varianz) eines Einzeltitels*: $M^2 = \dfrac{1}{P_{\text{port}}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2 \cdot P_k - D^2$ = Maßfr Streuung des Cashflows um Duration, wobei $t_k$ – Zeitpunkt der $k$-ten Zahlung, $P_k$ – Barwert der $k$-ten Zahlung, Für die Dispersion einer Anleihe lässt sich eine geschlossene Formel angeben.

6b: *Dispersion eines Portfolios*:

$$M_p^2 = \frac{1}{P_{\text{port}}} \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_s} t_{ks}^2 \cdot \frac{Z_{ks}}{q^k} - D_{\text{port}}^2$$

## 7.2 Immunisierung

**Voraussetzung:** Portfolio mit **einer** Auszahlungsverpflichtung (bekannt in Höhe und Zeit)

| | |
|---|---|
| **Barwertprinzip:** | Barwert der Guthabens $\geq$ Barwert der Verpflichtung |
| **Durationsprinzip:** | Duration der Guthaben = Duration der Verpflichtung |
| **Konvexitätsprinzip:** | Konvexität d. Guthaben = Konvexität d. Verpflichtung |
| **Dispersionsprinzip:** | Dispersion der Guthaben möglichst klein |

Die Anwendung obiger Prinzipien (in verschiedene Kombinationen) führt auf die nachstehenden Optimierungsaufgaben.

$\boxed{\textbf{1.}}$ ZF: Durationsgewichtete Rendite $\rightarrow \max$

NB: Barwertprinzip, Durationsprinzip + evtl. Konvexitätsprinzip ($C$ - Konvexität; $x_s$ – Anzahl an Einheiten des $s$-ten Einzeltitels im Portfolio):

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{D_1P_1i_1x_1 + \ldots + D_NP_Ni_Nx_N}{D_1P_1x_1 + \ldots + D_NP_Nx_N} & \rightarrow & \max \\[2ex]
P_1x_1 \; + \; \ldots \; + \; P_Nx_N & \geq & P_V \\[2ex]
D_1P_1x_1 \; + \; \ldots \; + \; D_NP_Nx_N & = & D_V \cdot P_V \\[2ex]
C_1P_1x_1 \; + \; \ldots \; + \; C_NP_Nx_N & = & C_V \cdot P_V \\
x_s & \geq & 0
\end{array}$$

Dies ist eine Aufgabe der Quotientenoptimierung, die auf eine lineare Optimierungsaufgabe zurückgeführt werden kann.

$\boxed{\textbf{2.}}$ ZF: Dispersion $\rightarrow \min$

NB: Barwert- und Durationsprinzip, evtl. Konvexitätsprinzip

$$M^2_{\text{port}} = \frac{1}{P_{\text{port}}} \sum_s \sum_k t^2_{ks} P_{ks} x_s - D^2_{\text{port}} \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{lcll} \sum P_s x_s & \geq & P_V & \\ \sum D_s P_s x_s & = & D_V \cdot P_V & \qquad \text{(analog Konvexität)} \\ x_s & \geq & 0 & \end{array}$$

Dies ist eine lineare Optimierungsaufgabe.

Weitere Optimierungsaufgaben lassen sich formulieren.

## 7.3 Cashflowmatching

Zielstellung: Am Ende jeder Teilperiode innerhalb eines bestimmten Zeithorizonts soll die Liquidität nichtnegativ sein.

$$\boxed{\sum_{s=1}^{N} P_s x_s \rightarrow \min; \quad \sum_{t=1}^{k} \left( \sum_{s=1}^{N} A_{st} x_s - Z_t \right) q^{k-t} \geq 0,\ k=1,\dots,L; \quad x_s \geq 0,\ s=1,\dots,N}$$

Dies ist eine lineare Optimierungsaufgabe.

# Literaturverzeichnis


[1] **Adelmeyer M., Warmuth E.:** Finanzmathematik für Einsteiger, Vieweg, Wiesbaden 2003

[2] **Beike R., Köhler A.:** Risk-Management mit Finanzderivaten, 3. Auflage, Oldenbourg, München 2002

[3] **Biermann B.:** Die Mathematik von Zinsinstrumenten: Preise, Kennzahlen, Risikomanagement und Anwendung von Zinsinstrumenten in der modernen Investmentpraxis, 2. Auflage, Oldenbourg, München 2002

[4] **Bonnländer A.:** Bond Management: Analyse und Optimierung von Renten-Portfolios, Campus, Frankfurt 1995

[5] **Bühlmann N., Berliner B.:** Einführung in die Finanzmathematik I, Haupt, Bern 1992

[6] **Frühwirt M.:** Handbuch der Renditeberechnung, 2. Auflage, Oldenbourg, München 2002

[7] **Grundmann W., Luderer B.:** Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart 2003

[8] **Hausmann W., Diener K., Käsler J.:** Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection, Vieweg, Wiesbaden 2002

[9] **Heidorn T.:** Finanzmathematik in der Bankpraxis. Vom Zins zur Option, 4. Auflage, Gabler, Wiesbaden 2002

[10] **Hockmann H.J., Thießen F. (Hrsg.):** Investment Banking, Schäffer-Poeschel, Stuttgart 2002

[11] **Hull J.C.:** Options, Futures, and other Derivative Securities, 5. Auflage, Prentice-Hall Int., Englewood Cliffs, New Jersey 2002 (Deutsche Übersetzung: Pearson Studium, München 2005)

[12] **Keuper F.:** Finanzmanagement, Oldenbourg, München 2000

[13] **Loistl O.:** Computergestütztes Wertpapiermanagement, 5. Auflage, Oldenbourg, München 1996

[14] **Luderer B.:** Starthilfe Finanzmathmatik. 2. Auflage, Zinsen - Kurse - Renditen, Teubner, Stuttgart 2003

[15] **Pfeifer A.:** Praktische Finanzmathematik, 2. Auflage, Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. M., 2000

[16] **Reitz S., Schwarz W., Martin M.R.W.:** Zinsderivate. Eine Einführung in Produkte, Bewertung, Risiken, Vieweg, Wiesbaden 2004

[17] **Steiner P., Bruns C.:** Wertpapiermanagement, 8. Auflage, Schäffer-Poeschel, Stuttgart 2002

[18] **Tietze J.:** Einführung in die Finanzmathematik, 6. Auflage, Vieweg, Wiesbaden 2003

[19] **Uhlir H., Steiner P.:** Wertpapieranalyse, 4. Auflage, Physica-Verlag, Heidelberg 2001