

Prof. Dr. Bernd Luderer

Investment Banking

Übungen und Lösungen

Keine Garantie für die Richtigkeit aller Lösungen

Sommersemester 2001

Übung 1: Klassische Finanzmathematik

Einfache Verzinsung, Zinseszinsrechnung, unterjährige und kontinuierliche Verzinsung

1. Wie viel ist ein Kapital von $K_0 = 5000$ (Geldeinheiten) in 9 Monaten bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % wert?
2. Ein Schuldner muss in 8 Monaten 5000 DM und nach weiteren 3 Monaten (also von heute an in 11 Monaten) 6000 DM zurückzahlen. Wie groß ist die Gesamtschuld am heutigen Tag, wenn mit einer jährlichen Verzinsung von 6 % gerechnet wird?
3. Auf einer Handwerkerrechnung findet man folgenden Text: „Der Rechnungsbetrag ist unter Gewährung eines Skontos von 2 % innerhalb von 10 Tagen oder ohne Abzug innerhalb von 30 Tagen zu zahlen.“ Zu welchem Zinssatz müsste man sein Geld anlegen, damit beide Zahlungsweisen gleichwertig sind?
4. Beim Verkauf eines Gebrauchtwagens werden dem Verkäufer zwei Angebote gemacht. Beim ersten Angebot werden 4000 DM in 3 Monaten und weitere 6000 DM in 9 Monaten nach Vertragsabschluss gezahlt, beim zweiten Angebot zahlt der Käufer 5200 DM in 2 Monaten und 4700 DM in 8 Monaten.
 - a) Welches der beiden Angebote ist günstiger bei Verwendung eines Kalkulationszinssatzes von 10% bzw. 3 %?
 - b) Bei welchem Zinssatz sind beide Angebote äquivalent?
5. Wie erst kürzlich bekannt wurde, legte August der Starke, Kurfürst von Sachsen, anlässlich seiner Krönung zum König von Polen im Jahre 1697 bei der Dresdner Hofbank 10000 Geldeinheiten (Taler) zu 2 % p.a. an. Über welches Kapital können seine Erben im Jahre 1997 verfügen, wenn mit gleichbleibendem Zinssatz und a) einfachen Zinsen, b) Zinseszinsen gerechnet wird?
6. Jemand erwirbt Finanzierungsschätze des Bundes, die eine Laufzeit von 2 Jahren sowie eine Rendite von 5,8 % aufweisen, im Nominalwert von 2000 DM (d.h., Auszahlung von 2000 DM in 2 Jahren). Wie viel hat er dafür zu zahlen?
7. a) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei 3 %, 5 %, 8 % bzw. 10 % Verzinsung p.a.?
 - b) Man gebe eine Näherungsformel an, die es erlaubt, die Rechnung im Kopf durchzuführen.
8. Ein Kapital werde jährlich mit 12 % verzinst.
 - a) Welcher Endwert ergibt sich bei jährlicher, halbjährlicher, quartalsweiser, monatlicher bzw. Augenblicksverzinsung, wenn jeweils der relative unterjährige Zinssatz für die kurzen Perioden verwendet wird?
 - b) Welche (jährliche) Effektivverzinsung entspricht den obigen Arten der unterjährigen Verzinsung bzw. – im Falle der stetigen Verzinsung – welche Zinsintensität erhält man?

Lösungen

1. $K_{270} = 5000 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{270}{360}) = 5187,50 \text{ GE}$

2. $B = \frac{5000}{1 + 0,06 \cdot \frac{8}{12}} + \frac{6000}{1 + 0,06 \cdot \frac{11}{12}} = 10494,90 \text{ DM}$

3. Barwertvergleich: $0,98R = \frac{R}{1 + i \cdot \frac{20}{360}} \Rightarrow i = 0,3673, \text{ d. h. } 36,73 \%$

4. a) Zinssatz 10 %:

$B_{(1)} = \frac{4000}{1 + 0,1 \cdot \frac{3}{12}} + \frac{6000}{1 + 0,1 \cdot \frac{9}{12}} = 9483,83 \text{ DM}, \quad B_{(2)} = \frac{5200}{1 + 0,1 \cdot \frac{2}{12}} + \frac{4700}{1 + 0,1 \cdot \frac{8}{12}} = 9521,00 \text{ DM}$

Obwohl die Gesamtzahlungen des 1. Angebotes größer sind, ist der Barwert des 2. Angebots höher; damit ist das 2. Angebot aus Verkäufersicht besser.

Zinssatz 3 %: Mit analoger Rechnung ergeben sich die Werte $B_{(1)} = 9838,19, B_{(2)} = 9781,97$; hier ist das 1. Angebot besser.

b) Gleichheit beider Angebote erhält man aus dem Ansatz $\frac{4000}{1 + i \cdot \frac{3}{12}} + \frac{6000}{1 + i \cdot \frac{9}{12}} = \frac{5200}{1 + i \cdot \frac{2}{12}} + \frac{4700}{1 + i \cdot \frac{8}{12}}$, woraus $i \approx 0,07$ resultiert, was einer Verzinsung von ca. 7% entspricht.

5. a) $K_{303} = 10000(1 + 0,02 \cdot 303) = 70600, \quad \text{b) } K_{303} = 10000 \cdot (1 + 0,02)^{303} = 4035079 \text{ [Taler]}$

6. $K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t} = \frac{2000}{1,058^2} = 1786,73 \text{ DM}$

7. a) Ansatz: $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \stackrel{!}{=} 2K_0$; hieraus folgt $t = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$, wobei $i = \frac{p}{100}$

Man erhält:

p	3	5	8	10
t	23,45	14,21	9,01	7,27

b) Aus obigem Ansatz und der Beziehung $\ln(1+x) \approx x$ (Taylorentwicklung für kleine Werte x) folgt: $t = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \approx \frac{0,69}{i} = \frac{69}{p}$.

8. a) Eine jährliche Verzinsung von 12% entspricht einer halbjährlichen Verzinsung mit 6%, einer monatlichen Verzinsung mit 1% etc. (relative unterjährige Zinsrate). Dies liefert:

$m = 1: K_1^{(1)} = 1,12K_0, \quad m = 2: K_1^{(2)} = K_0 \cdot (1 + \frac{0,12}{2})^2 = 1,1236K_0, \quad m = 4: K_1^{(4)} = 1,1255K_0,$

$m = 12: K_1^{(12)} = K_0 \cdot (1 + \frac{0,12}{12})^{12} = 1,1268K_0, \quad m = \infty: K_1^{(\infty)} = K_0 \cdot e^{0,12} = 1,1275K_0$

b) Aus dem Ansatz $K_1^{(m)} = K_0 \cdot (1 + \frac{i_{eff}}{100})$ ergibt sich

m	1	2	4	12
p_{eff}	12	12,36	12,55	12,68

Eine Zinsintensität von $i^* = 0,12$ bei der stetigen Verzinsung liefert eine einmalige jährliche (Effektiv-) Verzinsung von $i = e^{i^*} - 1 = 0,1275$. Hingegen wäre die einer einmaligen Verzinsung mit 12% entsprechende Zinsintensität $i^* = \ln(1 + 0,12) = 0,1133$.

Mathematik des Investment Banking

Prof. Dr. Luderer

Übung 2: Klassische Finanzmathematik

Rentenrechnung, Kursrechnung

1. Welcher Endwert nach einem Jahr ergibt sich, wenn man monatlich (vorschüssig bzw. nachschüssig) einen gleichbleibenden Betrag r spart?
2. a) Ein Bürger zahlt jährlich 3600 DM auf ein Konto ein, das mit 3 % verzinst wird. Welcher Betrag ergibt sich am Ende des 5. Jahres, wenn die Einzahlungen jeweils (1) zu Jahresbeginn, (2) am Jahresende erfolgen?
b) Was ergibt sich, wenn stattdessen monatlich 300 DM eingezahlt werden?
3. Welchen Betrag muss man heute (am Anfang eines Jahres) auf dem Konto haben, wenn man bei 7% jährlicher Verzinsung über 6 Jahre (1) am Ende, (2) am Anfang jedes Jahres 2000 DM abheben will und am Ende der Kontostand gerade Null sein soll?
4. Aus einem Leserbrief an ein Fondsjournal: „Sie berichten über deutsche Aktienfonds, die in den vergangenen 10 Jahren einen Gewinn von 230 Prozent erzielten. Andererseits berichten Sie über Vermögensbildung mittels deutscher Aktienfonds durch regelmäßiges Sparen von 100 DM im Monat, was nach 10 Jahren auf 23294 DM führte. Habe ich in der Schule richtig zu rechnen gelernt? Die Einzahlungen betragen $100 \times 12 \times 10 = 12000$ DM, so dass ein Gewinn von 11294 DM verbleibt, was „nur“ 94,1 % entspricht. Dr. XXX, Gifhorn“ Hat Herr Dr. XXX recht?
5. a) Wie hoch muss ein Kapital sein, wenn eine (1) zu Anfang, (2) am Ende jeden Jahres zahlbare ewige Rente von 1800 DM bei einem Zinssatz von 6% sichergestellt werden soll?
b) Wie groß muss der Betrag bei nachschüssiger Zahlung sein, wenn die Rente jährlich um 4% erhöht werden soll?
6. Welchen Kurs hat eine endfällige Anleihe mit einer Restlaufzeit von 8 Jahren und einem Kupon von 6%, die zum Nominalwert zurückgezahlt wird, wenn der Marktzinssatz 5% beträgt und die Anleihe fair bewertet ist?
7. Welche Rendite besitzt eine Anleihe mit Restlaufzeit von 8 Jahren, Nominalzinssatz 6% und Kurs von 98?
8. Bei der Anleihe aus Aufgabe 6 steige der Marktzinssatz von 5% auf 5,05% an. Wie wirkt sich das auf den Kurs aus? (1) Näherungsweise Aussage mittels Differentialrechnung, (2) exakte Berechnung zum Vergleich.
9. Bei der Anleihe aus Aufgabe 7 ändere sich der Kurs von 98 auf 99. Wie wirkt sich das auf die Rendite der Anleihe aus? (1) Näherungsweise Aussage mittels Differentialrechnung, (2) exakte Berechnung zum Vergleich.
10. Der Kurs der Aktie X fällt um s %. Um wie viel Prozent muss der Kurs der Aktie wieder steigen, damit der alte Stand wieder erreicht wird? (Speziell $s = 5$, $s = 10$, $s = 20$, $s = 50$)

Lösungen

1. Vorschüssig: $R = r(12 + 6,5i)$, nachschüssig: $R = r(12 + 5,5i)$

$$2. \text{ a) } E_5^{vor} = r \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 3600 \cdot 1,03 \cdot \frac{1,03^5 - 1}{0,03} = 19686,27$$

$$E_5^{nach} = 3600 \cdot \frac{1,03^5 - 1}{0,03} = 19112,88$$

$$\text{ b) } E_5^{vor} = 300(12 + 6,5 \cdot 0,03) \cdot \frac{1,03^5 - 1}{0,03} = 19423,46$$

$$E_5^{nach} = 300(12 + 5,5 \cdot 0,03) \cdot \frac{1,03^5 - 1}{0,03} = 19375,68$$

$$3. (1): B_6^{nach} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2000}{1,07^6} \cdot \frac{1,07^6 - 1}{0,07} = 9533,07$$

$$(2): B_6^{vor} = \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 10200,39$$

4. 230 % Gewinn bedeutet: $K_{10} = 3,3K_0$. Aus $K_{10} = K_0q^{10}$ ergibt sich $q = \sqrt[10]{3,3} = 1,1268$, d. h. eine jährliche Rendite von 12,68%.

Regelmäßiges (vorschüssiges) Sparen führt bei derselben Rendite auf einen Endwert von $E_{10} = 100(12 + 6,5 \cdot 0,1268) \cdot \frac{1,1268^{10} - 1}{0,1268} = 23258$.

Nein, es gibt keinen Widerspruch. Herr Dr. XXX hat falsche Überlegungen angestellt.

$$5. \text{ a) } (1): B_{\infty}^{vor} = \frac{rq}{q - 1} = \frac{1800 \cdot 1,06}{0,06} = 31800, \quad (2): B_{\infty}^{nach} = \frac{r}{q - 1} = 30000$$

$$\text{ b) } B = \frac{r}{i - g} = \frac{1800}{0,06 - 0,04} = 90000$$

$$6. C = \frac{1}{q^n} \left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100 \right) = \frac{1}{1,05^8} \left(6 \cdot \frac{1,05^8 - 1}{0,05} + 100 \right) = 106,46$$

$$7. 98 = \frac{1}{q^8} \left(6 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} + 100 \right) \Rightarrow 98(q - 1)q^8 - 6(q^8 - 1) - 100(q - 1) = 0$$

$$f(q) = 98q^9 - 104q^8 - 100q + 106 \stackrel{!}{=} 0, \quad f'(q) = 882q^8 - 832q^7 - 100$$

Das Newtonverfahren mit dem Startwert $q_0 = 1,062$ (z.B.) liefert in 2 Schritten den Wert $q = 1,0633$, was einer Rendite von 6,33% entspricht.

$$8. C = f(q) = \frac{1}{q^n} \left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100 \right)$$

$$(1): f'(q) = \frac{-n}{q^{n+1}} \left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100 \right) + \frac{1}{q^n} \left(p \cdot \frac{(q - 1)nq^{n-1} - (q^n - 1)}{(q - 1)^2} \right)$$

$$\bar{q} = 1,05, p = 6, n = 8; \quad f'(\bar{q}) = -672,45$$

$f(\bar{q} + \Delta q) \approx f(\bar{q}) + f'(\bar{q})\Delta q = 106,46 - 672,45 \cdot 0,0005 = 106,124$ (neuer Kurs)

(2) Exakt (Einsetzen von $q = 1,0505$ in obige Formel): $C_{neu} = 106,128$

9. Aus der obigen Kursformel ergibt sich nach Umstellung die Gleichung

$$F(C, q) = Cq^n(q-1) - p(q^n - 1) - 100(q-1) = 0,$$

die eine implizite Funktion $q = \varphi(C)$ definiert. Mit

$F_C(C, q) = q^n(q-1)$ und $F_q(C, q) = nCq^{n-1}(q-1) + Cq^n - npq^{n-1} - 100$
erhält man $F_C(\bar{C}, \bar{q}) = 0,10343$, $F_q(\bar{C}, \bar{q}) = 62,63048$, woraus

$$\varphi'(\bar{C}) = -\frac{F_C(\bar{C}, \bar{q})}{F_q(\bar{C}, \bar{q})} = -\frac{0,10343}{62,63048} = -0,00165$$

resultiert. Damit folgt

$$q_{neu} = \varphi(\bar{C} + \Delta C) \approx \varphi(\bar{C}) + \varphi'(\bar{C}) \cdot \Delta C = 1,0633 - 0,00165 \cdot 1 = 1,06165$$

(2) Exakte Berechnung mittels numerischer Methoden aus der Beziehung

$$99 = \frac{1}{q^8} \left(6 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} + 100 \right)$$

liefert $q_{neu} = 1,06162$.

Bemerkung: Alle Rechnungen müssten eigentlich mit noch höherer Genauigkeit ausgeführt werden, um sichere Ergebnisse zu erhalten.

10. Aus P wird $P_1 = \left(1 - \frac{s}{100}\right) P$ und daraus $P_2 = \left(1 + \frac{g}{100}\right) P_1 = \left(1 - \frac{s}{100}\right) \left(1 + \frac{g}{100}\right) P$.

Nach kurzer Umformung ergibt sich hieraus $g = \frac{s}{1 - \frac{s}{100}}$.

Speziell erhält man:

s	5	10	20	50
g	5,26	11,11	25	100

Übung 3: Bewertung von Aktien; Renditen von Anleihen

1. **(Aktienbewertung)** a) Für eine Aktie werden in einem Jahr eine Dividende von 5 GE und ein Kurs von 110 erwartet. Welcher Kurs müsste sich heute einstellen, wenn alle Marktteilnehmer mit 15 % diskontieren?

b) Eine Firma wird in absehbarer Zukunft konstant 20 GE Dividende pro Aktie und Jahr zahlen. Wie bewerten ein risikoneutraler Anleger (Opportunitätszinssatz von bspw. 15 %), ein risikofreudiger Anleger (12 %) und ein risikoscheuer Anleger (25 %) die Aktie heute? Man diskutiere die unterschiedlichen Zinssätze.

c) Die Dividende einer Aktie im kommenden Jahr wird 8 GE betragen (Flüsterschätzung), wobei eine jährliche Steigerung von 10 % erwartet wird. Welche heutige Bewertung des Aktienkurses ergibt sich bei einem Kalkulationszinssatz von 15 %?

2. **(Rendite einer Anleihe)** Die Anleihe X habe folgende Ausstattungsmerkmale: Kupon 8 %, Restlaufzeit 9 Jahre, endfällige Tilgung 102, Kurs 110, Kündigungsmöglichkeit des Emittenten 4 Jahre vor Fälligkeit bei 104.

a) Welche laufende Verzinsung besitzt die Anleihe X? b) Welche einfache Verzinsung besitzt die Anleihe X? c) Welche Rendite besitzt die Anleihe X? d) Wie lauten die Größen yield-to-call und yield-to-worst?

3. **(Verzinsung von Geldmarktpapieren)** a) Ein Diskontpapier hat am Abrechnungstag (15.5.) den Preis 98,69 und wird am Fälligkeitstag (1.8.) zu 100 zurückgezahlt. Welche Effektivverzinsung weist es auf, wenn mit act/360 bzw. 30/360 gerechnet wird?

b) Ein Geldmarktpapier wurde am 5.3. emittiert, Kauftag (Kaufvaluta) war am 5.5., Fälligkeitsdatum ist der 20.6. Es hat einen Kupon von 6 % und einen Preis von 99,975. Welche Verzinsung ergibt sich bei Verwendung der Usance 30/360?

c) Wie lässt sich bei einem Diskontpapier der Effektivzins bei unterschiedlichen Basisperioden ineinander umrechnen (z.B. act/360, act/365)?

4. **(Verzinsung von Anleihen mit glatter Restlaufzeit)** a) Ein Zerobond mit Laufzeit $n = 10$ und Rückzahlung 100 wird zu 60 ausgegeben. Wie lautet seine Effektivverzinsung p. a. bei jährlicher, halbjährlicher und stetiger Zinsvergütung?

b) Eine Kuponanleihe mit 6 % Verzinsung p. a., Rückzahlung 100 und Laufzeit $n = 2$ wird zum Kurs von $P = 90$ erworben. Welche Rendite erzielt man mit dieser Anleihe bei jährlicher bzw. halbjährlicher Zinsverrechnung?

c) Welche Rendite p. a. ergibt sich in b), wenn halbjährlich 3 % Zinsen gezahlt werden?

5. **(Stückzinsen unter verschiedenen Usancen)** Eine mit einem Kupon von $5\frac{3}{4}$ versehene Anleihe wurde am 2.4.1995 aufgelegt, ist am 2.4.2010 fällig und wird am 4.10.2000 erworben (Valutatag). Welche Stückzinsen sind zu zahlen unter den Usancen 30/360, act/360, act/act?

Lösungen 3. Übung

1. a) $D_1 = 5, P_1 = 110, P_0 = \frac{110 + 5}{1,15} = 100$

b) (1) $P_0 = \frac{D}{i} = \frac{20}{0,15} = 133,33$, (2) $P_0 = \frac{20}{0,12} = 166,67$, (3) $P_0 = \frac{20}{0,25} = 80$

Je risikoscheuer, desto größere Risikoprämie wird erwartet, desto höher der verwendete Zinssatz, desto niedriger der Barwert, desto vorsichtiger die Kaufentscheidung.

c) $g = 0,1, P_0 = \frac{D_1}{i - g} = \frac{8}{0,15 - 0,10} = 160$

2. a) $i_c = \frac{p}{P} = \frac{8}{110} = 0,0727 = 7,27\%$

b) $i_{simple} = \frac{p + \frac{R-P}{n}}{P} = \frac{8 + \frac{102-110}{9}}{110} = 6,46\%$

c) $110 = \frac{1}{q^n} \left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + R \right) = \frac{1}{q^9} \left(8 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} + 102 \right)$

$\implies 110(q^{10} - q^9) - 8(q^9 - 1) - 102(q - 1) = 0$

Mittels Newtonverfahren (oder anderem numerischen Verfahren) erhält man $i = 6,66\%$.

d) $R = 104, n = 5 \implies 110 = \frac{1}{q^5} \left(8 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} + 104 \right)$

Nach Umformung und mittels numerischem Näherungsverfahren ergibt sich $i = 6,31\%$ (yield-to-call). Dies ist die gesicherte Rendite (für die ersten 5 Jahre) im Falle des Rückkaufs durch den Emittenten.

Yield-to-worst = $\min\{6,31\%; 6,66\%\} = 6,31\%$ (garantierte Rendite für 5 Jahre).

3. a) $P = 98,69, R = 100, i = \frac{R - P}{P \cdot t}$ (t - Anteil an Zinsperiode)

(1): $\text{act} = 1.8 - 15.5 = 78, t = \frac{78}{360}$

(2): $30/360: T = (m_2 - m_1) + 30(n_2 - n_1) = 76 \implies t = \frac{76}{360}$

Damit ergibt sich: (1) $i_e = 0,06126 = 6,126\%$, (2) $i_e = 0,06288 = 6,288\%$.

b) $i_e = \frac{R - P + p \cdot \frac{T - T_1}{360}}{\left(P + p \cdot \frac{T_1}{360} \right) \cdot \frac{T - T_1}{360}} = \frac{100 - 99,975 + 6 \cdot \frac{105 - 60}{360}}{\left(99,975 + 6 \cdot \frac{60}{360} \right) \cdot \frac{105 - 60}{360}} = 6,140\%$

c) Hier: Umrechnung der Effektivzinsrate für die Basisperioden 360 und 365:

$i_{365} = \frac{R - P}{P \cdot \frac{T}{360}} = x \cdot i_{360} = x \cdot \frac{R - P}{P \cdot \frac{T}{360}} \implies x = \frac{365}{360}$, also: $i_{365} = \frac{365}{360} \cdot i_{360}$.

4. a) $n = 10, R = 100, P = 60$

jährlich: $i_e = \sqrt[n]{\frac{R}{P}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{100}{60}} - 1 = 5,241\%$

halbjährlich: $i_e = 2 \cdot \left(\sqrt[2n]{\frac{R}{P}} - 1 \right) = 5,174\%$ (p.a.)

kontinuierlich: $R = Pe^{i^*n} \implies i^* = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{R}{P} = 5,108\%$ bzw. $i^* = \ln(1+i) = \ln 1,05241 = 5,108\%$ (denn: $\ln \left(1 + \sqrt[n]{\frac{R}{P}} - 1 \right) = \ln \left(\frac{R}{P} \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{R}{P}$)

b) jährlich: $90 = \frac{6}{q} + \frac{106}{q^2} \implies q^2 - \frac{1}{15}q - \frac{106}{90} = 0 \implies q_1 = 1,1190998$ ($q_2 < 0$ entfällt), also $i_e = 11,91\%$

halbjährlich: $w = 1,1191$ (siehe oben), $q = \sqrt{w} = 1,0578751$ (entspricht 5,7875 % pro Halbjahr), $i_e = 2(\sqrt{w} - 1) = 11,575\%$ (p.a.)

c) Halbjahr als Periode, Zahlungen 3, 3, 3, 103 $\implies 90 = \frac{1}{q^4} \left(3 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} + 100 \right)$

Mittels Newton-Verfahren berechnet man $q_{halbj.} = 1,0588$, woraus sich $q = 1,121$, d.h. $i = 12,10\%$ (p.a.) ergibt.

Bemerkung: Die Rendite ist hier etwas größer als in b), da die Gesamtzahlungen zwar gleich sind, die Zahlungen aber teilweise eher erfolgen.

5: $p = 5,75$, $N = 100$ Termine: 2.4. bzw. 4.10.

$S = t \cdot \frac{p}{100} \cdot N = 5,75t$, wobei $t = \frac{T}{Basis}$

a) 30/360: $T = (m_2 - m_1) + 30(n_2 - n_1) = (4 - 2) + 30(10 - 4) = 182$, $S = 2,91$

b) act/360: $T = 185$, $S = 2,95$

c) act/act: $T = 185$, Basis 365, $t = \frac{185}{365}$, $S = 2,91$; würde die Betrachtung ein Jahr eher erfolgen, wäre die Basis 366, aber weiterhin $S = 2,91$.

Übung 4: Effektivverzinsung bei gebrochenen Laufzeiten; Zinsstrukturkurve

1. (Effektivverzinsung bei gebrochenen Laufzeiten)

Geg. seien folgende Anleihen:

	Kupon (p.a.)	Restlaufzeit	Tilgung	Kurs	Anzahl Kupons pro Jahr
A	8 %	9 Jahre	102	110	1
B	8 %	9 Jahre	102	110	2
C	5,75 %	9 Jahre, 178 Tage	100	85,20	1
D	5,75 %	9 Jahre, 178 Tage	100	85,20	2

Man ermittle die Renditen nach den Methoden ISMA, SIA, US Treasury und Moosmüller.

2. (Kurse mittels Spot Rates)

Gegeben seien zwei Anleihen mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren und einem Kupon von 6 % bzw. 12 %. Ferner sei die Zinsstruktur (Spot Rates) $i_1 = 10 \%$, $i_2 = 11 \%$, $i_3 = 12 \%$ bekannt.

- Man bewerte die beiden Anleihen mittels Spot Rates.
- Man berechne die Effektivzinssätze beider Anleihen mittels der in a) erzielten Bewertungen.
- Welche Schlussfolgerung ergibt sich?

3. (Spot Rates und Forward Rates)

Aus den in 2. gegebenen Spot Rates ermittle man die zugehörigen Forward Rates.

Lösungen 4. Übung

1. a) ISMA-Methode:

A Laufzeit ganzzahlig, $P = \frac{1}{q^n} \left(R + \frac{p}{m} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$, konkret: $110 = \frac{1}{q^9} \left(102 + 8 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} \right)$

q	rechte Seite
1,0665	110,048
1,06656	110,00592
1,06657	109,99884
1,0666	109,977

$$i_e = 6,66\%$$

B Laufzeit ganzzahlig, neue Periode = Halbjahr, $110 = \frac{1}{q^{18}} \left(102 + 4 \cdot \frac{q^{18} - 1}{q - 1} \right)$

q	rechte Seite
1,0333	110,072
1,03335	110,000
1,0334	109,929

$$i_e = 1,03335^2 - 1 = 6,78\%$$

C Laufzeit gebrochen, $P + S = \frac{1}{q^f \cdot q^n} \left(R + \frac{p}{m} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$, $f = \frac{178}{360} = 0,49444$,
 $S = 5,75 \cdot \frac{182}{360} = 2,91$, konkret: $85,20 + 2,91 = 88,11 = \frac{1}{q^{9,49444}} \left(100 + 5,75 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \right)$

q	rechte Seite
1,0802	88,116
1,0803	88,095
1,0804	88,037

$$i_e = 8,02\% \quad (\text{evtl. } i_e = 8,03\%)$$

D Laufzeit gebrochen, neue Periode = Halbjahr

$$f = \frac{178}{180} = 0,98889, \quad S = \frac{5,75}{2} \cdot \frac{2}{180} = 0,03$$

$$\text{Ansatz: } 85,23 = \frac{1}{q^{18,98889}} \left(100 + 2,875 \cdot \frac{q^{19} - 1}{q - 1} \right)$$

q	rechte Seite
1,04	85,2614
1,0401	85,1428

$$i_e = 1,04^2 - 1 = 8,16\%$$

b) SIA-Methode:

A siehe oben: 6,66 % **B** vgl. oben: $i_e = 0,03335 \cdot 2 = 6,67\%$

C siehe oben: 8,02 %, **D** vgl. oben: $0,04 \cdot 2 = 8,00\%$

c) US Treasury:

A siehe oben: 6,66 %, **B** siehe oben: 6,67 %

$$\text{C} \quad P + S = \frac{1}{1 + f \cdot i} \cdot \frac{1}{q^n} \left(R + \frac{p}{m} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$$

konkret: $88,11 = \frac{1}{1 + 0,49444i} \cdot \frac{1}{q^9} \left(100 + 5,75 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \right)$

q	rechte Seite
1,0801	88,146
1,08016	88,111
1,0802	88,088

$$i_e = 8,016\%$$

D Ansatz: $85,23 = \frac{1}{1 + 0,98889i} \cdot \frac{1}{q^{18}} \left(100 + 2,875 \cdot \frac{q^{19} - 1}{q - 1} \right)$

q	rechte Seite
1,0400	85,26
1,0401	85,142

$$i_e = 0,04 \cdot 2 = 8,00\%$$

d) Moosmüller-Methode:

A siehe oben: 6,66 %,

B siehe oben: 6,78%

C siehe oben: 8,02 %,

D vgl. oben: $i_e = 1,04^2 - 1 = 8,16\%$

2. a) (1): $\frac{6}{1,1} + \frac{6}{1,11^2} + \frac{106}{1,12^3} = 85,773$, (2): $\frac{12}{1,1} + \frac{12}{1,11^2} + \frac{112}{1,12^3} = 100,368$

b) Der aus der Beziehung $\frac{6}{q} + \frac{6}{q^2} + \frac{106}{q^3} = 85,773$ ermittelte Effektivzinssatz lautet $i_e = q - 1 = 1,1192 - 1 = 11,92\%$; im Falle der zweiten Anleihe ergibt sich hingegen $i_e = 11,85\%$.

c) Obwohl beide Anleihen mittels Spot Rates exakt bewertet (und bei dem berechneten Kurs somit gleichwertig) sind, täuscht das Effektivzinskriterium einen Wertunterschied von 0,07% vor.

3. Forward Rates: $r_{fn} = \frac{(1 + r_{sn})^n}{(1 + r_{s,n-1})^{n-1}} - 1$

Per Definition: $r_{f1} = r_{s1} = 10\%$

Forward Rate in einem Jahr (für ein Jahr): $r_{f2} = \frac{(1 + r_{s2})^2}{(1 + r_{s1})^1} - 1 = \frac{1,11^2}{1,1} - 1 = 12,01\%$

Forward Rate in zwei Jahren (für ein Jahr): $r_{f3} = \frac{(1 + r_{s3})^3}{(1 + r_{s2})^2} - 1 = \frac{1,12^3}{1,11^2} - 1 = 14,03\%$

Übung 5: Zinsstrukturkurve

1. (Ermittlung von Spot Rates) Die folgenden Anleihen seien am Markt erhältlich:

Anleihe	Kurs	Z_1	Z_2	Z_3	Rendite
A	100	105	–	–	
B	98	4	104	–	
C	95,5	3	103	–	
D	101	5	5	105	
E	102,1	6	6	106	

- Gegeben seien die Anleihen A, B, D. Man berechne die durch diese Anleihen bestimmten Spot Rates.
- Welche Anleihen sollen in welcher Menge gekauft werden, um möglichst billig einen Cash Flow von 100, 200, 300 sicherzustellen?
- Welche Spot Rates ergeben sich unter Zugrundelegung der in a) ausgewählten Anleihen?
- Welche der Anleihen A, ..., E sind überbewertet?
- Welche Renditen besitzen die Anleihen A, ..., E?
- Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn man einen Cash Flow von 100, 100, 50 annimmt?

2. (Spotrates aus Swaprates) Am heutigen Tag seien folgende Swap-Sätze am Markt beobachtbar:

Laufzeit	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
Swap-Satz	2,000	3,000	3,500	4,000	5,140

- Man berechne die Zerozinssätze und die zugehörigen Diskontfaktoren und stelle sie gemeinsam in einer Grafik dar.
- Warum liegen die Zerozinssätze über den Swap-Sätzen?
- Was kann man aussagen, wenn die Swap-Sätze für alle Laufzeiten gleich wären?
- Man berechne den Zerosatz für die Laufzeit 4 Jahre und 2 Monate nach verschiedenen Interpolationsmethoden.

Lösungen:1. a) $i_1 = 5\%$;

$$98 - \frac{4}{1,05} = \frac{1,04}{q^2} \implies q^2 = \dots = \implies i_2 = 5,0783\%$$

$$101 - \frac{5}{5} 1,05 - \frac{5}{1,050783^2} = \frac{1,05}{q^3} \implies i_3 = 4,617\%$$

b) Primale LOA (P):

$$\begin{array}{rcccccc} 100x_1 & + & 98x_2 & + & 95,5x_3 & + & 101x_4 & + & 102,1x_5 & \rightarrow & \min \\ t = 1 : & 105x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\ t = 2 : & & & 104x_2 & + & 103x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 200 \\ t = 3 : & & & & & & + & 105x_4 & + & 106x_5 & \geq & 300 \\ & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe (und also auch ihre duale) besitzt immer eine Lösung. Diese kann prinzipiell mit der Simplexmethode ermittelt werden.

Optimale Lösung: $x_1^* = 0,7399$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1,7769$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 2,8302$, $z_P^* = 532,646$.

Der optimale ZFW gibt die minimalen Kosten zur Sicherstellung des gegebenen Cash Flow (von insgesamt 600) an.

c) Duale OA (D):

$$\begin{array}{rcccccc} 100y_1 & + & 200y_2 & + & 300y_3 & \rightarrow & \max \\ 105y_1 & & & & & \leq & 100 \\ 4y_1 & + & 104y_2 & + & & \leq & 98 \\ 3y_1 & + & 103y_2 & + & & \leq & 95,5 \\ 5y_1 & + & 5y_2 & + & 105y_3 & \leq & 101 \\ 6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 & \leq & 102,1 \\ & & & & y_i & \geq & 0 \end{array}$$

Bemerkung: Die LOA kann (nach Einführung von Schlupfvariablen relativ einfach mittels Simplexmethode gelöst werden. Noch schneller geht jedoch die Lösung unter Ausnutzung der aus der Dualitätstheorie bekannten Komplementaritätsbedingungen:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Wegen $x_1^* > 0$, $x_3^* > 0$, $x_5^* > 0$ müssen also die 1., 3. und 5. Nebenbedingung von (D) als Gleichung erfüllt sein, was auf das folgende LGS führt:

$$\begin{array}{rcccc} 105y_1 & & & = & 100 \\ 3y_1 & + & 103y_2 & = & 95,5 \\ 6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 = 102,1 \end{array}$$

Hieraus ermittelt man leicht $y_1^* = 0,952381$, $y_2^* = 0,899445$, $y_3 = 0,858387$, die als Diskontfaktoren interpretiert werden können.

Der optimale duale ZF-Wert beträgt $z_D^* = 532,643$ und stimmt (bis auf geringe Rundungsfehler) mit dem primalen überein (starker Dualitätssatz).

Aus den Diskontfaktoren lassen sich die Spot Rates berechnen:

$$y_1^* = \frac{1}{1 + i_1} \implies i_1 = 5,00\%$$

$$y_2^* = \frac{1}{(1 + i_2)^2} \implies i_2 = 5,44\%$$

$$y_3^* = \frac{1}{(1 + i_3)^3} \implies i_3 = 5,22\%$$

Bemerkung: Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Spot Rates besteht in der Lösung eines gestaffelten LGS, das zu den Anleihen A, C, E gehört (analog zu Teilaufgabe a)).

d) Die Anleihen A, C, E sind korrekt bewertet, da die NB in (D) gerade als Gleichungen erfüllt sind. Die restlichen beiden Anleihen werden jetzt mittels der in b) berechneten Spot Rates bewertet:

$$\text{Anleihe B: } 4 \cdot 0,952381 + 104 \cdot 0,899445 = 97,35 < 98$$

$$\text{Anleihe D: } 5 \cdot 0,952381 + 5 \cdot 0,899445 + 105 \cdot 0,858387 = 99,39 < 101,$$

d.h., der Marktpreis ist jeweils höher als die faire Bewertung.

e) Renditen:

$$\text{A: } 100 = \frac{105}{q} \implies \boxed{i = 5\%}$$

$$\text{B: } 98 = \frac{4}{q} + \frac{104}{q^2} \implies \boxed{i = 5,062\%}$$

$$\text{C: } 95,5 = \frac{3}{q} + \frac{103}{q^2} \implies \boxed{i = 5,448\%}$$

$$\text{D: } 101 = \frac{5}{q} + \frac{5}{q^2} + \frac{105}{q^3} \implies \boxed{i = 4,63\%}$$

$$\text{E: } 102,1 = \frac{6}{q} + \frac{6}{q^2} + \frac{106}{q^3} \implies \boxed{i = 5,225\%}$$

Bemerkung: Übrigens hat eine Anleihe F mit $n = 2, p = 10$ unter Nutzung der oben berechneten Spot Rates eine faire Bewertung von 108,466, wobei selbst bei höherem Kurs von z.B. 108,6 eine Effektivverzinsung von 5,46% vorliegt (besser als C). (Möglicherweise ändern sich allerdings die in a) bzw. b) berechneten Spot Rates, wenn man die Anleihe F noch zusätzlich ins Portfolio nimmt.)

Andere Idee: Für jede Anleihe Rendite berechnen, in jeder Laufzeitklasse die beste auswählen. Dies muss allerdings nicht zur besten Lösung führen, da Renditen und Preise aus Zinsstrukturkurven zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen führen können (siehe frühere Aufgaben).

f) Anderer Cash Flow: 100, 100, 50

Primale LOA (P) (nur rechte Seiten ändern sich):

$$\begin{array}{rcccccccl}
 100x_1 & + & 98x_2 & + & 95,5x_3 & + & 101x_4 & + & 102,1x_5 & \rightarrow & \min \\
 t = 1 : & 105x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\
 t = 2 : & & & 104x_2 & + & 103x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & \geq & 100 \\
 t = 3 : & & & & & & + & 105x_4 & + & 106x_5 & \geq & 50 \\
 & & & & & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

Dieselben Überlegungen wie in a) führen auf die optimale Lösung $x_1^* = 0,8984726$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0,94339623$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0,47169811$, $z_P^* = 228,10197$.

Duale LOA (D) (nur Zielfunktion ändert sich):

$$\begin{array}{rcccccl}
 100y_1 & + & 100y_2 & + & 50y_3 & \rightarrow & \max \\
 105y_1 & & & & & \leq & 100 \\
 4y_1 & + & 104 & + & & \leq & 98 \\
 3y_1 & + & 103 & + & & \leq & 95,5 \\
 5y_1 & + & 5y_2 & + & 105y_3 & \leq & 101 \\
 6y_1 & + & 6y_2 & + & 106y_3 & \leq & 102,1 \\
 & & & & y_i & \geq & 0
 \end{array}$$

Da in (P) dieselben Variablen x_1, x_3, x_5 (positive) Basisvariablen sind, müssen in (D) wegen der Komplementaritätsbedingungen auch dieselben Nebenbedingungen aktiv (d.h. als Gleichheit erfüllt) sein: 1., 3., 5. NB. Damit bleiben aber die Lösungen aus b) unverändert, denn an den NBen hat sich nichts geändert, und wir erhalten dieselben Diskontfaktoren und Spot Rates wie in b). Der optimale ZF-Wert lautet $z_D^* = 228,10197$ und stimmt mit z_P^* überein (starke Dualität).

Vermutung: Wenn nur der Cash Flow „groß genug“ angesetzt wird, so dass in der OA (P) die Nichtnegativitätsbedingungen nicht wirksam werden, sondern für die Basisvariablen gilt $x_i^* > 0$, so ist die Lösung von (P) in ihrer Struktur (welche Variablen sind BV) unabhängig vom konkreten Cash Flow. Folglich ist auch die Lösung von (D) unabhängig vom konkreten Cash Flow und liefert stets diejenigen Spot Rates, die (bei gegebenem Anleihe-Portfolio) zu günstigsten Bewertungen führen, d.h. den Cash Flow billigstmöglich sicherstellen.

2. a) Berechnung von Zerosätzen und Diskontfaktoren mittels „Bootstrapping“ gemäß der nachstehenden Formeln:

$$i_t = \left(\frac{100 + p_t}{100 - p_t \cdot \sum_{k=1}^{t-1} d_k} \right)^{\frac{1}{t}} - 1, \quad d_t = \frac{100 - p_t \cdot \sum_{k=1}^{t-1} d_k}{100 + p_t} = \frac{1}{(1 + i_t)^t}$$

$$t = 1 : \quad i_1 = 2,000\%, \quad d_1 = \frac{1}{1,02} = 0,98039,$$

$$t = 2 : \quad i_2 = \left(\frac{103}{100 - 3 \cdot 0,98039} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 3,0151\%, \quad d_2 = \frac{1}{1,03151^2} = 0,94232$$

$$t = 3 : i_3 = \left(\frac{103,5}{100 - 3,5 \cdot (0,98039 + 0,94232)} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 3,5298\%, \quad d_3 = \frac{1}{1,035298^3} = 0,90116$$

$$t = 4 : i_4 = 4,0571\%, \quad d_4 = 0,85293$$

$$t = 5 : i_5 = 5,3290\%, \quad d_5 = 0,77137$$

b) Hier liegt eine normale (monoton wachsende) Zinsstrukturkurve vor, weshalb die Forward-Sätze jeweils höher als die Spot Rates sind. Dies wiederum bewirkt, dass die Kupons (um auf den Endtermin des zu konstruierenden Zerobonds bezogen werden zu können) mit diesen höheren Forward Rates aufgezinst werden. Deshalb sind die Zerosätze höher als die Swap-Sätze.

c) Sind die Swap-Sätze konstant für alle Laufzeiten, so sind sie identisch sowohl mit den Forward Rates als auch mit den Zerozinssätzen, d. h. es liegt eine flache Zinskurve vor.

Nachweis (für 2 Perioden; für n Perioden gelten dieselben Überlegungen mittels Induktion):

Falls $p_1 = p_2 \stackrel{\text{df}}{=} p$, so gilt: $i_1 = \frac{p}{100}$;

$$\begin{aligned} i_2 &= \left(\frac{100 + p}{100 - p \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left[\frac{100 + p}{100 + p - p} \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \left[\frac{(100 + p)^2}{100^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= \frac{100 + p}{100} - 1 = \frac{p}{100} = \text{const.} \end{aligned}$$

d) Geg.: $i_4 = 4,0571$, $i_5 = 5,3290$; 2 Monate entsprechen 60 Tagen bzw. $\frac{1}{6}$ Jahr; mit j bezeichnen wir die Spot Rate für 4 Jahre und 2 Monate

(1) Interpolation der Zerosätze: $j = 4,0571 + \frac{1}{6}(5,3290 - 4,0571) = 4,2691\%$

(2) Interpolation der Diskontfaktoren ($d_4 = 0,85293$, $d_5 = 0,77137$):

$$d_j = 0,85293 + \frac{1}{6}(0,77137 - 0,85293) = 0,839337 \stackrel{!}{=} \frac{1}{(1 + j)^4(1 + \frac{j}{6})}$$

Mittels eines numerischen Verfahrens erhält man $j = 4,290\%$. (Achtung: Hier ist der berechnete Zerosatz **nicht kleiner** als der in (1) ermittelte.)

(3) Forward-based-Interpolation:

Aus dem Ansatz

$$1,040571^4 \cdot \left(1 + \frac{j}{360} \right)^{360} = 1,05329^5$$

erhält man

$$i = 360 \left[\left(\frac{1,05329^5}{1,040571^4} \right)^{\frac{1}{360}} - 1 \right] = 10,044 \%$$

(Achtung: Rechnungen sind numerisch sehr empfindlich!)

Aus dem Ansatz

$$1,040571^4 \cdot \left(1 + \frac{0,10044}{360} \right)^{60} = 1,19222 \stackrel{!}{=} (1+j)^4 \left(1 + \frac{j}{6} \right)$$

ermittelt man $j = 4,307 \%$.

Übung 6: FRA und Swaps

1. (**Forward Rate Agreement**) Der 6-Monats-LIBOR liege bei 9%, der 1-Jahres-LIBOR bei 8%; gerechnet werde mit den Usancen $\text{act}/360$, d.h., ein halbes Jahr entspricht $182/360$. Es soll ein Kredit über 100 Mio durch Kreditaufnahme über ein halbes Jahr und Kauf eines 6x12-FRA realisiert werden (nach einem halben Jahr Weiterfinanzierung).

a) Der 6-Monats-LIBOR liege nach 6 Monaten bei 5,7%. Welcher Ausgleichsbetrag ist vom Käufer an den Verkäufer des FRA (oder umgekehrt?) zu zahlen? Welche Gesamtzahlungen hat der Kreditnehmer und Käufer des FRA am Jahresende zu leisten?

b) Man weise im allgemeinen Fall nach, dass die Gesamtzahlungen unabhängig von dem (zum Zeitpunkt 0) unbekanntem 6-Monats-LIBOR nach 6 Monaten sind.

2. (**Anwendung eines FRA**) Ein Zinsmanager nimmt an, dass die Zinsen im kurzen Laufzeitbereich in Zukunft fallen werden. Es liegt ein Anlagebedarf von 100 Mio in einem halben Jahr vor. Er verkauft einen entsprechenden FRA. (LIBOR-Sätze und Usancen wie in 1.)

a) Der 6-Monats-LIBOR liege in 6 Monaten bei 6%. Um wie viel konnte der Zinsmanager das Anlageergebnis dank des Verkaufs des FRA steigern?

b) Der 6-Monats-LIBOR liege in 6 Monaten bei 7%. Wie stark wurde das Anlageergebnis durch die (falsche) Entscheidung des Zinsmanagers geschmälert? Was hätte er stattdessen tun sollen?

3. (**„Pricing“ eines Swaps**) Gegeben sei die nachstehende Zinsstrukturkurve durch Angabe von Spot Rates (die aus den Festzinssätzen von Swaps berechnet wurde).

Fälligkeit (Jahre)	Spot Rates	Forward Rates	Diskontfaktoren
0,5	3,3000		
1,0	3,4000		
1,5	3,5100		
2,0	3,6200		
2,5	3,8800		
3,0	4,1400		
3,5	4,4200		
4,0	4,7000		
4,5	4,9200		
5,0	5,1400		
5,5	5,3200		
6,0	5,5000		

Gesucht ist der jährlich zu zahlende Festsatz eines Swaps p (Par Rate), der eine Gesamtlaufzeit von 6 Jahren besitzt. (Der Festsatz soll z. B. gegen 6-Monats-Libor getauscht werden, für den in der Rechnung die Forward Rates eingesetzt werden.)

Lösungen zu Übung 6:

1. a) Forward-Zinssatz i_f (für Zeitraum 6×12):

$$K \left(1 + 0,09 \cdot \frac{182}{360} \right) \left(1 + i_f \cdot \frac{182}{360} \right) = K \left(1 + 0,08 \cdot \frac{364}{360} \right) \implies i_f = 6,6953\% \approx 6,70\%$$

Ausgleichsbetrag: $A = \frac{N \cdot (i_{lib} - i_f) \cdot t}{1 + i_{lib} \cdot t}$ Da auch Zinszahlung nach einem halben Jahr mit abzusichern ist, gilt

$$N = 100 \text{ Mio} \cdot \left(1 + 0,09 \cdot \frac{182}{360} \right) = 104.550.000,$$

d.h.

$$A = \frac{104,55 \text{ Mio} \cdot (0,057 - 0,067) \cdot \frac{182}{360}}{1 + 0,057 \cdot \frac{182}{360}} = -513.753,67$$

Wegen $i_{lib} < i_f$ (also $A < 0$) ist der Ausgleichsbetrag von 513.754 an den Verkäufer zu zahlen, woraus ein Finanzierungsbedarf für das 2. Halbjahr von $B = 104,55 + 0,513754 = 105,06375$ Mio entsteht.

Gesamtbelastung am Jahresende:

$$G = 105,06375 \cdot \left(1 + 0,057 \cdot \frac{182}{360} \right) = 108,09134 \text{ Mio}$$

(entspricht – bis auf Rundungsfehler durch ungenaues i_f und 182 Tage für ein halbes Jahr – dem Betrag $100 \cdot (1 + 0,08 \cdot \frac{364}{360}) = 108,0889$ Mio).

b) Es seien i_1 der Zinssatz für die Vorlaufperiode s und i_2 der Zinssatz für die Gesamtperiode $s + t$ (Vorlaufperiode s plus Absicherungszeitraum t).

Für $i_{lib} = i_f$ ist der Ausgleichsbetrag Null, und es ergibt sich eine Gesamtzahlung in Höhe von $K(1 + i_1 \cdot s)(1 + i_f \cdot t) = K(1 + i_2(s + t))$.

Für $i_{lib} \neq i_f$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left[K \left((1 + i_1 s) - \frac{K(1 + i_1 s) \cdot (i_{lib} - i_f) \cdot t}{1 + i_{lib} t} \right) \right] \cdot (1 + i_{lib} t) \\ &= K(1 + i_1 s)(1 + i_{lib} t) - K(1 + i_1 s)(i_{lib} - i_f)t \\ &= K(1 + i_1 s) [1 + i_{lib} t - i_{lib} t + i_f t] \\ &= K(1 + i_1 s)(1 + i_f t) = K(1 + i_2(s + t)) \end{aligned}$$

Gilt hierbei $i_{lib} > i_f$, so erhält der Käufer des FRA einen Ausgleich und hat demzufolge im 2. Halbjahr weniger zu finanzieren, im umgekehrten Fall muss der Käufer selbst einen Ausgleich zahlen und entsprechend mehr finanzieren.

2. a) $i_f = 6,70\%$ (siehe oben), $i_{lib} = 6\%$

$$A = \frac{100 \text{ Mio} (0,06 - 0,067) \cdot \frac{182}{360}}{1 + 0,06 \cdot \frac{182}{360}} = -343.470,29$$

Wegen $A < 0$ erhält der Verkäufer des FRA (also unser Zinsmanager) den Betrag $|A| = 343.470$ GE. Dieser bringt ihm (zu den „normalen“ Zinsen) $343.470 \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{182}{360}\right) = 100 \text{ Mio} \cdot (0,067 - 0,06) \cdot \frac{182}{360} = 353889$ GE an zusätzlichen Zinsen.

$$\text{b) } A = \frac{100 \text{ Mio} \cdot (0,07 - 0,067) \cdot \frac{182}{360}}{1 + 0,07 \cdot \frac{182}{360}} = 146.483$$

Diesen Betrag hat der Zinsmanager an den Käufer des FRA zu zahlen, weshalb er 151667 GE weniger Zinsen (bezogen auf das Jahresende) erhält. Er hätte den FRA kaufen müssen.

3. Grundlage soll der Tausch eines jährlich zu zahlenden (und zu berechnenden Festzinsatzes) sein, der gegen den 6-Mon.-LIBOR (hier: geschätzt durch die aus der Zinskurve berechneten halbjährlichen Forward-Rates) getauscht wird.

a) Berechnung der Forward Rates (als Jahreszinsrate = Halbjahresrate $\cdot 2$):

$$0 \rightarrow \frac{1}{2}: i_{f1} = 2 \cdot \frac{0,033}{2} = 3,3\%$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow 1: \text{Ansatz: } \left(1 + 0,033 \cdot \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{i_{f2}}{2}\right) = 1,034 \implies i_{f2} = 2 \cdot \left(\frac{1,034}{1,0165} - 1\right) = 3,4432\%$$

$$1 \rightarrow 1\frac{1}{2}: \text{Ansatz: } 1,034 \cdot \left(1 + \frac{i_{f3}}{2}\right) = 1,0351^{1,5} \implies i_{f3} = 2 \cdot \left(\frac{1,0351^{1,5}}{1,034} - 1\right) = 3,6962\%$$

$$1\frac{1}{2} \rightarrow 2: \text{Ansatz: } 1,0351^{1,5} \cdot \left(1 + \frac{i_{f4}}{2}\right) = 1,0362^2 \implies i_{f4} = 2 \cdot \left(\frac{1,0362^2}{1,0351^{1,5}} - 1\right) = 3,9125\%$$

b) Berechnung der Diskontsätze: $d_s = \frac{1}{(1+i_s)^s}$, $s \in \mathbf{R}$, wobei i_s die Zerosätze sind; Ausnahme: $d_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{2} \cdot i_1}$ (Geldmarktusancen; vgl. Biermann)

$$d_1 = \frac{1}{1,0165} = 0,98377, \quad d_2 = \frac{1}{1,034} = 0,96712, \quad d_3 = \frac{1}{1,0351^{1,5}} = 0,94957, \quad \dots$$

Fälligkeit (Jahre)	Spot Rates	Forward Rates	Diskontfaktoren	Zahlungen
0,5	3,3000	3,3000	0,98377	1,6500
1	3,4000	3,4432	0,96712	1,7716
1,5	3,5100	3,6962	0,94957	1,8481
2	3,6200	3,9125	0,93135	1,9562
2,5	3,8800	4,8673	0,90922	2,4336
3	4,1400	5,3775	0,88542	2,6887
3,5	4,4200	6,0251	0,85952	3,0125
4	4,7000	6,5731	0,83217	3,2865
4,5	4,9200	6,5882	0,80563	3,2941
5	5,1400	7,0178	0,77832	3,5089
5,5	5,3200	7,0140	0,75195	3,5070
6	5,5000	7,3648	0,72525	3,6824

c) Im Weiteren sollen d_s die Diskontfaktoren mit halbjährlicher Zählung sein und d_k die mit

ganzjähriger Zählung. Dann gilt für den gesuchten Kupon p :

$$p \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{1}{(1+i_k)^k} = \sum_{s=1}^{12} 100 \cdot \frac{i_{fs}}{2} \cdot d_s, \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{\sum_{s=1}^{12} 100 \cdot \frac{i_{fs}}{2} \cdot d_s}{\sum_{k=1}^6 d_k}.$$

Daraus ergibt sich $p = \frac{1,6500 \cdot 0,98377 + 1,7716 \cdot 0,96712 + \dots}{0,96712 + 0,93135 + \dots} = 5,3666$. Das ist der jährlich zu zahlende Festzinssatz gegenüber dem halbjährlich zu zahlenden LIBOR.

Einfachere Formel: $p = \frac{1-d_6}{\sum_{k=1}^m d_k} \cdot 100 = \frac{27,475}{5,11963} = 5,3666$.

Begründung (hier der Einfachheit halber nur ganzjährige Zahlungen betrachtet):

$$i_{fk} = \frac{(1+i_k)^k}{(1+i_{k-1})^{k-1}} - 1 = \frac{d_{k-1}}{d_k} - 1 = \frac{d_{k-1} - d_k}{d_k},$$

d. h. $i_{fk} \cdot d_k = d_{k-1} - d_k$. Folglich gilt

$$\sum_{k=1}^m i_{fk} d_k = \sum_{k=1}^m (d_{k-1} - d_k) = d_0 - d_1 + d_1 - d_2 + \dots - d_m = d_0 - d_m = 1 - d_m.$$

Übung 7: Risikokennzahlen

1. Gegeben sei eine Anleihe mit $p = 6$, $n = 6$, $R = 100$ (bei Nominalwert 100), $i_e = 5,49\%$, $P = 102,5485$.

- Man berechne die zu den (geänderten) Effektivzinssätzen $5,50\%$, $5,48\%$ und $6,49\%$ gehörigen Kurse.
- Man berechne den Basis Point Value (BPV) und interpretiere diesen.
- Man berechne den BPV mittels Sekantenverfahren und vergleiche mit dem Ergebnis aus Aufgabe b).
- Man weise nach, dass der BPV eines Portfolios gleich der Summe der BPV der einzelnen Wertpapiere ist.
- Man berechne die Modified Duration und interpretiere diese.
- Ist die Modified Duration eines Portfolios gleich der Summe der Modified Durations der Einzeltitel?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Modified Duration und Elastizität?

2. Gegeben sei eine Anleihe mit $p = 6$, $n = 6$, $R = 100$, $i = 5,49\%$, $P = 102,5485$ (vgl. Aufgabe 1).

- Wie lautet die Duration der Anleihe? Geben Sie verschiedene Berechnungsmöglichkeiten an.
- Wie lautet ihre Konvexität?
- Was ergibt sich bei Nutzung der Näherungsformel für die Konvexität?
- Geben Sie eine Abschätzung für die Kursänderung unter Nutzung der Konvexität an, wenn sich der Zinssatz von $5,49\%$ auf $5,59\%$ erhöht.
- Wie groß ist Theta (Interpretation!)?
- Man schätze die Kursänderung bei einer Renditeänderung um 2 Basispunkte und einer Restlaufzeitverkürzung um 1 Woche mittels des Delta-Plus-Ansatzes ab.

3. Berechnen Sie die Kennzahlen Duration, Modified Duration, Basis Point Value, Konvexität und Theta für eine Ewige Rente (nachsüssig). Tragen Sie den Barwert der Ewigen Rente in Abhängigkeit von der Rendite in einem Koordinatensystem ab. Zahlenbeispiel: Jährliche Zahlung in Höhe von DM 3,00 bei einer (Markt-) Rendite von $6,00\%$.

Lösungen zur 7. Übung:

1. a) $P = \frac{1}{q^6} \left(p \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} + 100 \right)$ Wir erhalten:

i	q	P
5,49 %	1,0549	102,5485
5,50 %	1,0550	102,4978
5,48 %	1,0548	102,5993
6,49 %	1,0649	97,6272

$$\text{b) BPV} = -\frac{1}{q} \sum_{k=1}^6 \frac{k \cdot Z_k}{q^k} \cdot \frac{1}{10000} = -\frac{1}{1,0549} \left[\frac{6}{q} + \frac{2 \cdot 6}{q^2} + \frac{3 \cdot 6}{q^3} + \frac{4 \cdot 6}{q^4} + \frac{5 \cdot 6}{q^5} + \frac{6 \cdot 106}{q^6} \right] \cdot$$

$\frac{1}{10000}$
 $= -0,050779$ (bezogen auf 100 GE) Veränderung der Rendite um +0,01 % bewirkt Verringerung des Kurses um 0,0508 (auf 102,5485-0,0508=102,4977; vgl. oben). Bei $N = 10$ Mio entspricht das einer (Bar-) Wertminderung um $0,0508 \cdot \frac{10000000}{100} = 5080$ GE.

$$\text{c) } \frac{102,5993 - 102,4978}{2} = \frac{0,1015}{2} = 0,05075$$

Für kleine Δi stimmen Tangente und Sekante recht gut überein, deshalb ist die hier berechnete Näherung sehr genau und der Wert stimmt gut überein mit dem in a) berechneten.

d) Das Portfolio bestehe aus $N = 2$ Einzeltiteln, d. h. $Z_k = Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)}$. In der Berechnungsvorschrift für den BPV ist jeder Summand in der Summand damit selbst die Summe zweier Summanden:

$$BPV_{Portf.} = \sum Z_k \cdot f_k = \sum (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)}) \cdot f_k = \sum Z_k^{(1)} \cdot f_k + \sum Z_k^{(2)} \cdot f_k = BPV_1 + BPV_2,$$

wobei gilt $f_k = -\frac{1}{10000q} \cdot \frac{k}{q^k}$.

$$\text{e) ModDur} = -\frac{BPV}{P} \cdot 10000 = \frac{0,050779}{102,5485} \cdot 10000 = 4,9517 \text{ (Prozent)}$$

(Da die Modified Duration in Prozent angegeben wird, lautet der Umrechnungsfaktor zum PBV 10000.) Also: Die prozentuale Kursveränderung bei Änderung der Rendite um 1 % (das ist viel!) beträgt näherungsweise 4,9517 (%). Daraus ergibt sich ein geänderter Kurs von $102,5485 \cdot (1 - 0,049517) = 97,4706$. Zum Vergleich der exakte Wert (s. o. in Tabelle): $P = 97,6272$. Übrigens: Auch die direkte Berechnung über die Definition führt (natürlich!) auf dasselbe Ergebnis:

$$\text{ModDur} = \frac{1}{1+i} \sum \frac{kZ_k}{(1+i)^k} \cdot \frac{1}{P} \text{ (in \%)}; \text{ Hier: ModDur} = -\frac{1}{qP} \left[\frac{6}{q} + \frac{12}{q^2} + \frac{18}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{30}{q^5} + \frac{636}{q^6} \right] = -4,9517$$

f) Nein, nicht die Summe, sondern die barwertgewichtete Summe der Modified Durations (MD) der Einzeltitel. Nachweis für $N = 2$ ($w_j = P_j/P$ - Gewichtungsfaktoren):

$$MD_P = \sum \frac{k \cdot (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)})}{P \cdot q^{k+1}} = \sum \frac{k \cdot Z_k^{(1)}}{P_1 \cdot q^{k+1}} \cdot \frac{P_1}{P} + \sum \frac{k \cdot Z_k^{(2)}}{P_2 \cdot q^{k+1}} \cdot \frac{P_2}{P} = MD_1 \cdot w_1 + MD_2 \cdot w_2,$$

g) MD entspricht Zinserhöhung um absolut 1 %, Elastizität um relativ 1 %; $MD = -\frac{\varepsilon}{i}$

$$\text{2. a) Duration} = \sum_{k=1}^n \frac{kZ_k}{P(1+i)^k} = \frac{1}{102,5485} \left[\frac{6}{q} + \frac{12}{q^2} + \frac{18}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{30}{q^5} + \frac{636}{q^6} + \right] = 5,22356$$

oder

$$\text{Dur} = \text{ModDur} [\text{in \%}] \cdot (1+i) = 4,9517 \cdot 1,0549 = 5,22355 \text{ (Änderung des Vorzeichens)}$$

oder

$$\text{(geschlossene Formel für Bond)} \quad \text{Dur} = \frac{1+i}{i} - \frac{np + (q-in)R}{p(q^n - 1) + iR} = \dots = 5,22357$$

$$\begin{aligned} \text{b) Konv} &= \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k} \\ &= \frac{1}{102,5485} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left[\frac{12}{q} + \frac{36}{q^2} + \frac{72}{q^3} + \frac{120}{q^4} + \frac{180}{q^5} + \frac{4452}{q^6} + \dots \right] = 31,2869 \quad (\text{hier gilt } q = 1,0549) \end{aligned}$$

$$\text{c) } P = \frac{1}{q^n} \left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100 \right)$$

q	P
1,0549	102,54853
1,0559	102,04234
1,0539	103,05793

$$\text{Konv} \approx 10^6 \cdot \frac{102,04234 + 103,05793 - 2 \cdot 102,54853}{102,54853} = 31,3218$$

(bei Rechnung mit 4 Nachkommastellen: 31,2047; numerisch sehr empfindlich)

$$\begin{aligned} \text{d) } \Delta P &= P(i^* + \Delta i) - P(i^*) = BPV \cdot \Delta i + \frac{P}{2} \cdot \text{Konv} \cdot (\Delta i)^2 \\ &= -0,050779 \cdot 10 + \frac{102,54853}{2} \cdot 31,3218 \cdot 0,001^2 = -0,50779 + 0,001604 = -0,506186 \end{aligned}$$

Also: $P(i = 5,59\%) \approx 102,54853 - 0,506186 = 102,04234$; zum Vergleich: exakter Wert (siehe oben in Tabelle): $P = 102,04234$.

Bemerkung: Durch die Konvexität, die die Krümmung berücksichtigt, wird die Approximation durch die Tangente (nach oben) verbessert.

$$\text{e) } \Theta = \frac{P}{360} \cdot \ln(1+i) = \frac{102,54853}{360} \cdot \ln 1,0549 = 0,015224$$

Also: Pro Tag nimmt der Kurswert der Anleihe (bezogen auf Nominalwert 100) um 0,015 Geldeinheiten zu (bei jetziger Rendite und jetzigem Zeitpunkt/Restlaufzeit).

(Für ein Jahr (dies ist sehr langer Zeitraum, weshalb die Approximation relativ ungenau wird) wären dies 5,4806 GE, so dass sich ein neuer Kurswert von $102,5485 + 5,4806 = 108,0291$ ergibt. Berechnet man zum Vergleich den Kurswert der Anleihe bei Restlaufzeit $n = 5$ und $i = 5,49\%$, der 102,178 beträgt, und zählt den Kupon von 6 dazu, ergibt sich 108,178.)

$$\begin{aligned} \text{f) } \Delta i &= 0,0002 = 2 \text{ BP}, \quad \Delta T = -\frac{7}{360} \\ \Delta P &\approx BPV \cdot \Delta i + \frac{P}{2} \cdot \text{Konv} \cdot (\Delta i)^2 - \Theta \cdot 360 \cdot \Delta T \\ &= -0,050779 \cdot 2 + \frac{102,54853}{2} \cdot 31,2869 \cdot (0,0002)^2 - 0,015224 \cdot 360 \cdot \left(-\frac{7}{360} \right) \\ &= -0,101558 + 0,000064 + 0,106568 = 0,005074 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Berechnen Kurs für $i = 5,51\%$ und Restlaufzeit 5 Jahre und 553 Tage: $P =$

$q^{7/360} \frac{1}{q^6} \left[p \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} + 100 \right] = 102,55389$; die Differenz zum augenblicklichen Kurs beträgt dann 0,00536.

3. a) Barwert der ewigen Rente: $P = P(i) = \frac{p}{i} = \frac{3}{0,06} = 50$; $P'(i) = \frac{-p}{i^2}$

b) Basis Point Value: $BPV = \frac{-p}{i^2} \cdot \frac{1}{10000} = -0,08333$

Steigt die Rendite um 1 BP an, so verringert sich der Barwert der ewigen Rente um 0,0833 GE.

c) $\text{ModDur} = \frac{p}{i^2} \cdot \frac{1}{P} \% = \frac{p}{i^2} \cdot \frac{i}{p} \% = \frac{1}{i} \% = 16,667\%$

Steigt die Rendite absolut um 1% an, so sinkt (Achtung: bei der Definition von ModDur wurde das Vorzeichen geändert!) der Barwert der ewigen Rente um 16,667%, d.h. von 50 auf $50(1 - 0,16667) = 41,6667$. Zum Vergleich: $P = \frac{3}{0,07} = 42,857$ (Achtung: Bei absoluter Änderung der Rendite um 1%, was sehr viel ist, ist die Approximation naturgemäß schlecht.)

d) $\text{Dur} = \frac{p}{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{q^k} = \frac{p}{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{q^k} = i \sum_{k=1}^{\infty} kv^k$, wobei $v = 1/q$.

Es gilt die Formel $\sum_{k=1}^n kv^k = v \frac{1 - (n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}$. Letzterer Ausdruck strebt für $n \rightarrow \infty$

gegen $\frac{v}{(1-v)^2} = \frac{q}{i^2}$. Damit ergibt sich für die Duration der ewigen Rente: $\text{Dur} = \frac{1+i}{i}$

(siehe auch frühere Herleitung), also $\text{Dur} = \frac{1,06}{0,06} = 17,67$ (Jahre). (Je höher die Rendite, desto kleiner die Duration.)

e) $P''(i) = \frac{2p}{i^3} \implies \text{Konv} = \frac{1}{P} P''(i) = \frac{i}{p} \cdot \frac{2p}{i^3} = \frac{2}{i^2} = 555,55$

Bemerkung: Die Konvexität hängt sehr stark vom aktuellen Renditeniveau ab (siehe Grafik). (Zum Vergleich: Für $i = 0,12$ ergibt sich $\text{Konv} = 138,89$)

f) $\Theta = \ln(1+i) \frac{P}{360} = \frac{p}{360i} \ln(1+i) = \frac{3}{360 \cdot 0,06} \ln 1,06 = 0,008093$.

Abbildung:

Übung 8: Kennzahlen konkreter Produkte; Portfoliorendite

1. (Risikokennzahlen eines Floaters) Berechnen Sie die Kennzahlen Basispointvalue, Modified Duration, Duration, Konvexität und Theta für einen Floater mit einer Restlaufzeit von 6 Jahren und einer halbjährlichen Zinsanpassung an den 6-Monats-LIBOR. Der den ersten Kupon festlegende LIBOR sei bei 3,50 % gefixt.

2. (Risikokennzahlen eines Forward-Bonds) Betrachten Sie den folgenden Forward-Bond: Startvaluta in 2 Jahren, Endfälligkeit in 5 Jahren, Nominalwert 100, Forward-Preis 90, Rückzahlung 100, Kupon 6,00 %. Die Zinskurve sei flach mit einer Rendite von 6,50 %.

a) Stellen Sie den Cash Flow des Forward-Bonds dar und berechnen Sie den zu jeder Einzelzahlung sowie zum gesamten Forward-Bond gehörenden Barwert.

b) Entwickeln Sie eine geschlossene Formel für den Barwert, betrachten Sie diesen als Funktion von der Rendite und bilden Sie die erste Ableitung.

c) Berechnen Sie die Kennzahlen Duration, Modified Duration, BPV, Konvexität und Theta.

3. (Optimales Bond-Portfolio) Gegeben seien folgende Bonds:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Nominal	100 000	100 000	246 169,7
Laufzeit	10	2	5
Kupon	6,00	3,00	1,02
Tilgung	100	100	100
Rendite	6,00%	3,00%	5,40%
Preis	100 000	100 000	200 000
BPV	-0,0736	-0,0191	-0,092729
ModDur	-7,36%	-1,91%	-4,64%
Dur	7,80	1,97	4,89
Konv	69,74	5,55	26,20
Theta	16,186	8,211	29,218

a) Überprüfen Sie die Angaben zur Rendite (bei gegebenem Preis) sowie zu den Kennzahlen.

b) Stellen Sie aus den obigen Wertpapieren ein Portfolio zusammen, welches bei einem Anlagehorizont von 5 Jahren ein optimales Chancen-Risiko-Profil besitzt.

4. (Portfoliorendite) Gegeben sei das folgende Portfolio:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Nominal	100	100	100
Laufzeit	10	5	2
Kupon	10%	5%	2%
Rendite	7,13%	3,88%	3,05%
Preis	120	105	98
Duration	7,96	4,20	1,88

a) Überprüfen Sie die Angaben zur Rendite (bei gegebenem Preis) sowie zu den Kennzahlen.

b) Berechnen Sie die Durchschnittsrendite des Portfolios, indem Sie mit dem Nominalwert, der Laufzeit, dem Barwert bzw. der Duration gewichten.

c) Berechnen Sie die exakte Rendite des Portfolios.

d) Berechnen Sie die Portfolioduration.

Lösungen zur 8. Übung

1. Ein Floater entspricht einem 6-Monats-Festgeld (bis auf evtl. Bonitätsrisiken des Emittenten), weshalb der Preis jetzt bzw. in $6k$, $k \in \mathbf{N}$, Monaten jeweils $P = 100$ beträgt. Zur Zeit gilt $i = i_{lib} = 3,50\%$.

Bemerkung: Alle Kennzahlen sind unabhängig von der Restlaufzeit; der einzig relevante Zeitraum ist ein halbes Jahr.

$$\text{a) Duration: Dur} = \sum \frac{kZ_k}{Pq^k} = k \frac{100(1+i \cdot k)}{100 \cdot (1+i)^k} \approx k \cdot \frac{100(1+ik)}{100(1+ik)} = k = \frac{\text{Tage}}{\text{Basis}} = \frac{1}{2}$$

(bzw. Zerobond mit $n = \frac{1}{2}$).

$$\text{b) ModDur} = \frac{i}{1+i} \cdot \text{Dur} (\%) = \frac{1}{1,035} \cdot \frac{1}{2} (\%) = 0,4831 \%$$

$$\text{c) BPV} = -\frac{\text{ModDur} \cdot P}{10000} = -\frac{0,4831 \cdot 100}{10000} = -0,00483$$

$$\text{d) Konv} = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1,035^2} \cdot \frac{0,5 \cdot 1,5 \cdot (1+0,035 \cdot \frac{1}{2})}{1,035^{1/2}} = 0,7002$$

$$\text{(bzw. Konv} \approx \frac{0,5 \cdot 1,5}{1,035^2} = 0,7001 \text{ bei einfacher Abzinsung)}$$

Berechnung der Konvexität mittels Näherungsformel (bei unterstellter einfacher Verzinsung):

$$P = \frac{100 \cdot (1 + i \cdot \frac{1}{2})}{1 + i \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\implies P(3,5) = 100, P(3,6) = 99,950884, P(3,4) = 100,04916$$

$$\implies \text{Konv} = \frac{P(3,6) + P(3,4) - 2 \cdot P(3,5)}{P(3,5)} \cdot 10^6 = 0,48$$

Berechnung der Konvexität mittels Näherungsformel (bei unterstellter geometrischer Verzinsung):

$$P = \frac{100 \cdot (1 + i \cdot \frac{1}{2})}{(1+i)^{1/2}}$$

$$\implies P(3,5) = 100,01484, P(3,6) = 99,966498, P(3,4) = 100,06314$$

$$\implies \text{Konv} = \frac{P(3,6) + P(3,4) - 2 \cdot P(3,5)}{P(3,5)} \cdot 10^6 = -0,42$$

Bemerkung: Die Berechnung der Konvexität auf diese Weise ist numerisch sehr empfindlich.

$$\text{e) } \Theta = \ln(1+i) \cdot \frac{P}{360} = 0,009556$$

2. Mit $q = 1,065$ ergeben sich die folgenden Diskontfaktoren und Barwerte:

Zeit	Cashflow	Diskontfaktor	Barwert
0	-	1,0000	0
1	-	0,9390	0
2	-90,00	0,8817	-79,3493
3	6,00	0,8278	4,9671
4	6,00	0,7773	4,6639
5	106,00	0,7299	77,3674
Summe:			7,6491

Der Barwert des Forward-Bonds wird also als Differenz des Barwertes der Einnahmen und des Barwertes der Ausgaben berechnet.

b) Der Zeitraum bis zum Beginn wird mit s , die Laufzeit selbst mit n , der (heute fixierte und nach dem Zeitraum s zahlbare Preis mit P , die Rückzahlung (Tilgung) mit R , der Kupon mit p und der Barwert mit BW bezeichnet. Dann gilt:

$$BW(i) = \frac{1}{(1+i)^s} \left[-P + \frac{p}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{R}{q^n} \right] = \frac{1}{(1+i)^s} \left[-P + \sum_{k=1}^n \frac{p}{(1+i)^k} + \frac{R}{(1+i)^n} \right]$$

$$BW'(i) = \frac{sP}{(1+i)^{s+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{p}{(1+i)^{k+s}} + \frac{R}{(1+i)^{n+s}}$$

$$= \frac{-s}{1+i} BW + \frac{1}{(1+i)^s} \left[\sum_{k=1}^n \frac{-kp}{(1+i)^{k+1}} - \frac{nR}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

c) Duration der Einnahmen: $D_E = \frac{1}{BW_E} \cdot \left(\frac{3 \cdot 6}{q^3} + \frac{4 \cdot 6}{q^4} + \frac{5 \cdot 106}{q^5} \right) = \frac{420,39378}{86,9984} = 4,8322$

Duration der Ausgaben: $D_A = \frac{P \cdot s}{BW_A \cdot q^s} = \frac{P \cdot s}{q^s \cdot q^s} = s = 2 \implies \text{Dur} = D_E - D_A = 2,8322$

oder auch: (auf Einnahmenseite) Duration als barwertgewichtete Summe der einzelnen Einnahmen, d. h. $w_j = \frac{BW_j}{BW}$, $w_1 = \frac{4,9671}{86,9984} = 0,0571$ usw.

$$\implies D_E = \sum_{j=1}^3 w_j D_j = w_1 \cdot 3 + w_2 \cdot 4 + w_3 \cdot 5 = \frac{BW_1 \cdot 3 + BW_2 \cdot 4 + BW_3 \cdot 5}{BW_1 + BW_2 + BW_3} = 4,8322$$

d) Konvexität eines Zerobonds: $K = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \frac{n(n+1)Z_n}{q^n} = \frac{n(n+1)}{q^2}$

Die Gesamtkonvexität des Forward-Bonds kann als Differenz der Konvexitäten der Einnahmenseite und der Ausgabenseite berechnet werden, wobei die Einnahmen-Konvexität (im Sinne eines Portfolios von Zerobonds) als Summe der barwertgewichteten Einzelkonvexitäten bestimmt werden kann (vgl. Duration):

$$K_E = \frac{1}{BW_E \cdot q^2} [3 \cdot 4 \cdot BW_1 + 4 \cdot 5 \cdot BW_2 + 5 \cdot 6 \cdot BW_3] = \frac{2473,9052}{98,67576} = 25,07105$$

$$K_2 = \frac{1}{BW_A \cdot q^2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 79,3493 = \frac{2 \cdot 3}{q^2} = 5,29000$$

$$\text{Konv} = K_1 - K_2 = 25,07105 - 5,29000 = 19,78109$$

Zum Vergleich: Wir betrachten das Gesamtportfolio aus Einnahmen und Ausgaben (mit dem Barwert 7,6491) und führen eine Barwertgewichtung durch:

$$\text{Konv} = \frac{1}{7,6491 \cdot 1,065^2} [2 \cdot 3 \cdot (-79,3493) + 3 \cdot 4 \cdot 4,9671 + 4 \cdot 5 \cdot 4,6639 + 5 \cdot 6 \cdot 77,3674] = \frac{1}{8,6758} \cdot 476,0958 = 230,2738 \text{ (völlig anderes Ergebnis)}$$

e) $\Theta = \frac{P}{360} \ln(1+i) = \frac{7,6491}{360} \ln 1,065 = 0,0013384$

3. Es bestehen zwei grundsätzliche Möglichkeiten, den Anlagehorizont von 5 Jahren zu realisieren.

1. Möglichkeit: Kauf des 5-jährigen Bonds (*Bullet-Portfolio*, weil Tilgung in einer Summe zu einem Zeitpunkt erfolgt)

2. Möglichkeit: Mischung von Bond 1 und Bond 2 zu gleichen Teilen (*Barbell-Portfolio* [Barbell=Hantelstange], weil die Tilgungen auf zwei von dem Anlagehorizont gleich weit entfernte Zeitpunkte verlagert werden)

	Bullet	Barbell
Nominal	246.169,7	200.000
Rendite	5,40 %	5,40 %
Preis	200.000	200.000
BPV	-92,729	-92,736
ModDur	-4,64 %	-4,64 %
Dur	4,89	4,89
Konv	26,20	37,65
Theta	29,218	24,397

Auf Grund der Renditen kann keine Entscheidung getroffen werden, die Risiken mittels BPV, ModDur und Duration sind ebenfalls gleich. Aber die Konvexität ist beim Barbell-Portfolio deutlich größer als beim Bullet-Portfolio, weshalb sich das Barbell-Portfolio durch ein besseres Chancen-Risiko-Profil auszeichnet.

4. b) Mit den Angaben aus der Tabelle erhalten wir bei unterschiedlicher Gewichtung:

$$\text{Nominalwert: } i_P = \frac{1}{300}(100 \cdot 7,13\% + 100 \cdot 3,88\% + 100 \cdot 3,05\%) = \frac{1406}{300}\% = 4,69\%$$

$$\text{Laufzeit: } i_P = \frac{1}{17}(10 \cdot 7,13\% + 5 \cdot 3,88\% + 2 \cdot 3,05\%) = \frac{96,8}{17}\% = 5,69\%$$

$$\text{Barwert: } i_P = \frac{1}{323}(120 \cdot 7,13\% + 105 \cdot 3,88\% + 98 \cdot 3,05\%) = \frac{1561,9}{323}\% = 4,84\%$$

$$\text{Duration: } i_P = \frac{1}{14,04}(7,96 \cdot 7,13\% + 4,20 \cdot 3,88\% + 1,88 \cdot 3,05\%) = \frac{78,7848}{14,04}\% = 5,61\%$$

durationsgewichtete Rendite nach Bühlmann/Berliner:

$$i_P = \frac{\sum P_s D_s i_s}{\sum P_s D_s} = \frac{120 \cdot 7,96 \cdot 7,13\% + 105 \cdot 4,20 \cdot 3,88\% + 98 \cdot 1,88 \cdot 3,05\%}{120 \cdot 7,96 + 105 \cdot 4,20 + 98 \cdot 1,88} = 5,75\%$$

Im Allgemeinen kommt die durationsgewichtete Rendite der tatsächlichen Portfoliorendite am nächsten (wegen der mittleren Bindungsdauer).

c) Die exakte Rendite $i = 5,65\%$ des Portfolios ergibt sich aus dem Ansatz

$$323 = \frac{1}{q^{10}} \left(10 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} + 100 \right) + \frac{1}{q^5} \left(5 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} + 100 \right) + \frac{1}{q^2} \left(2 \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} + 100 \right)$$

Die rechte Seite lautet 323,06889 für $i = 5,65\%$ und beträgt 322,91529 für $i = 5,66\%$.

d) Duration des Portfolios:

$$D_P = \sum w_s \cdot D_s = \sum \frac{P_s}{P_P} = \frac{120}{323} \cdot 7,96 + \frac{105}{323} \cdot 4,20 + \frac{98}{323} \cdot 1,88 = 4,89$$

Übung 9: Kennzahlen konkreter Produkte; Optionsbewertung

1. (Risikokennzahlen eines FRA) Man bestimme die Risikokennzahlen Basis Point Value und Theta eines 6×9 -FRA, wenn die Spot Rates $i_6 = 0,033$ und $i_9 = 0,0335$ gegeben sind.

2. (Risikokennzahlen eines IRS) Für einen IRS mit einer Gesamtlaufzeit von 4 Jahren und einem Festsatz von 5,00 % gegen 6-Monats-LIBOR sollen die Parameter BPV, Duration und Theta berechnet werden, wobei der Anfangs-LIBOR-Satz bei 3,50 % liege. Hinweis: Ein Bond mit Laufzeit 4 Jahre, Rückzahlung 100, Kupon 5,00 % besitze (bei geg. Zinsstrukturkurve, s. Üb. 6) folgende Kenngrößen: Preis 101,2975, BPV $-0,0361$, Dur 3,725, Theta 0,01275.

3. (Risikokennzahlen eines Futures) Ein Future möge eine relativ lange Laufzeit, z. B. 1,3 Jahre, besitzen. Wie kann man die Risikokennzahlen des Futures ermitteln?

4. (Optionsbewertung nach Cox/Ross/Rubinstein) Es werde ein europäischer Aktiencall betrachtet mit Aktienkurs $K_0 = 140$, Strikepreis $X = 160$, Schätzungen $K_{1a} = 110$, $K_{1b} = 210$ für $T = 1$ und einem risikolosen Zinssatz von 10 %. Man zeige, dass bei einem vom korrekten Optionspreis $P_C = 20$ abweichenden Preis (z. B. 10) ein risikoloser Gewinn erzielt werden kann.

5. (Optionsbewertung nach Cox/Ross/Rubinstein) Betrachtet werde ein Aktiencall in folgender Situation: Laufzeit 1 Jahr, $K_0 = 220$, alle halben Jahre verdoppele oder halbiere sich der Aktienkurs, der risikolose Zinssatz betrage pro Halbjahr 10 %, pro Jahr also 21 %, der Strikepreis liege bei $X = 165$.

a) Man berechne den Wert des Calls in $t = 1$ (innerer Wert), $t = 0,5$ und $t = 0$ (Preis des Calls).

b) Man gebe den Hedge-Ratio an und interpretiere diesen (Betrachtung für $t = 1, t = 0,5$).

c) Gegeben sei eine Volatilität von $\sigma = 0,98$ (bezogen auf ein Jahr). Unter Verwendung der Formeln $u = e^{\sigma\sqrt{h}} - 1$, $d = e^{-\sigma\sqrt{h}} - 1$ berechne man die Größen upside change (downside change) für ein halbes Jahr.

Lösungen zur 9. Übung:

1. Forward Rate 6 → 9: $i_f = \left(\frac{1 + 0,0335 \cdot \frac{3}{4}}{1 + 0,033 \cdot \frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot 4 = 0,03394$ (kann man als „Preis“ ansehen bzw. Preis = 0, wenn Partner mit derselben Größe rechnet)
 Betrachten Portfolio aus Geldanlage über 6 Monate und Geldaufnahme über 9 Monate (was dem FRA entspricht) und bestimmen die Risikokennzahlen des FRA aus denen des Portfolios (unter Berücksichtigung des Vorzeichens):

Laufzeit	BPV	Theta
0,5	-0,005	$\frac{100}{360} \ln 1,033 = 0,00902$
0,75	0,007	$-\frac{100}{360} \ln 1,0335 = -0,00915$
FRA	0,002	-0,00013

Diskussion zur Interpretation!

Andere Betrachtungsweise: Wenn $\Delta i = 1$ BP, so erhält man (wenn sich **alle** Zinssätze um 1 BP ändern), einen Ausgleichsbetrag von $A = \frac{N \cdot (i_{lib} - i_f) \cdot t}{1 + i_{lib} \cdot t}$, wobei für $t = 0$ per Konstruktion gilt: $i_{lib} = i_f$. Damit gilt $\Delta A = \frac{100 \cdot 1BP \cdot 0,25}{1 + 0,03394 + 0,0001} = \frac{0,0025}{1,034} = 0,0024$.

2. Wir betrachten den IRS als Portfolio aus Festzinsseite (+) und Floater (-). Die Parameter der Festzinsseite sind bereits gegeben, die des Floaters wurden in Übung 8 berechnet. Damit ergibt sich:

	Preis	BPV	Duration	Theta
feste Seite	101,2975	-0,0361	3,725	0,01275
variable Seite	100	-0,0048	0,5	0,00956
IRS	1,2975	-0,0313	3,225	0,00319

Diskussion: 1. Warum ist der Preis des IRS nicht Null? Vermutlich, weil der Festzinssatz nicht äquivalent zur Zinsstrukturkurve ist.

2. Die einzelnen Parameter wurden hier nur einfach subtrahiert und nicht – wie eigentlich in einem Portfolio – barwertgewichtet addiert. Warum? Ist das berechtigt?

3. Da die CtD-Anleihe (oder auch jede andere lieferbare Anleihe) in den Futurekontrakt geliefert werden kann, muss Gleichgewicht zwischen dem Terminkurs der anleihe (inkl. Stückzinsen) und dem Rechnungsbetrag bei Lieferung bestehen, so dass gelten muss:

$$\text{theoretischer Futurekurs} = \text{Terminkurs der Anleihe (ctd)} : \text{Preisfaktor (ctd)}$$

Damit können die Kennzahlen der CtD- Anleihe (dividiert durch Preisfaktor) als Kennzahlen des Futures verwendet werden.

4. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem (L – geborgtes Geld, x – verkaufte Calls, y – gekaufte Aktien):

$$\begin{array}{rclcl} L + 10x - 140y & = & 0 & \text{mit der} & \\ -1,1L & + & 110y & = & G \\ -1,1L - 50x + 210y & = & G & \text{Koeffizienten-} & \\ & & & \text{matrix} & \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -140 \\ -1,1 & 0 & 110 \\ -1,1 & -50 & 210 \end{pmatrix}$$

Schreibt man dieses System als $A \cdot \begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \\ G \end{pmatrix}$ mit G als dem für $t = 1$ erzielten

Gewinn des Portfolios und berechnet die inverse Matrix A^{-1} , so gilt für die Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ G \\ G \end{pmatrix}. \text{ Aus } A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{4900}{1100} & -1 \\ -0,1 & -\frac{56}{1100} & -0,04 \\ -0,05 & -\frac{39}{1100} & -0,01 \end{pmatrix} \text{ folgt } \begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,454545 \\ -0,090909 \\ -0,0454545 \end{pmatrix} G.$$

Für $G = 22$ erhält man beispielsweise $L = -120$, $x = -2$, $y = -1$. Interpretation: Lege 120 GE zum risikolosen Zinssatz an (was auf 132 in $t = 1$ führt), kaufe 2 Calls, verkaufe 1 Aktie (Leerverkauf). Andere Interpretation: Ein gekaufter Call bringt beim Preis von $P_c = 10$ einen Gewinn von 10 GE (denn der faire Preis beträgt ja $P_c = 20$). Bei 2 gekauften Calls bringt das nach einem Jahr $2 \cdot (1 + 0,1) \cdot 10 = 22$ GE Gewinn.

Übrigens: Verwendet man den fairen Preis $P_c = 20$, so hat das obige LGS für $G \neq 0$ keine Lösung, sondern führt auf einen Widerspruch (was auch so sein muss, denn sonst könnte man eine Arbitragegewinn erzielen).

5. a) Es gilt: upside change $u = 100$, downside change $d = -50$, woraus sich eine „Wahrscheinlichkeit“ für das Erreichen des jeweils höheren Aktienwertes von $p = \frac{i - d}{u - d} = \frac{10 - (-50)}{100 - (-50)} = 0,4$ ergibt. Nach 2 Perioden, also $t = 1$ sind drei Zustände möglich (Δ – innerer Wert des Calls):

$K_2 = 55$ mit $\Delta = 0$ (Call wertlos); $K_2 = 220$ mit $\Delta = 55$; $K_2 = 880$ mit $\Delta = 715$.

Nach 1 Periode sind zwei Zustände möglich:

(1) $K_1 = 110$ mit $P_1 = (0,4 \cdot 55 + 0,6 \cdot 0) : 1,1 = 20$

(2) $K_1 = 440$ mit $P_1 = (0,4 \cdot 715 + 0,6 \cdot 55) : 1,1 = 290$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet der Aktienkurs $K_0 = 220$, und der zugehörige Preis des Calls beträgt $P_c = 0,4 \cdot 290 + 0,6 \cdot 20) : 1,1 = 116,36$.

b) Hedge-Ratio $\Delta = \frac{P_2^o - P_2^u}{K_2^o - K_2^u} = \frac{715 - 0}{880 - 55} = 0,867$ bzw. $\Delta = \frac{P_1^o - P_1^u}{K_1^o - K_1^u} = \frac{290 - 20}{440 - 110} = 0,818$

(Basis 1 Jahr bzw. $\frac{1}{2}$ Jahr). Interpretation: Ändert sich der Aktienkurs um 1 GE, so ändert sich der Optionspreis um (näherungsweise) 0,8 GE.

c) $u = e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0,98\sqrt{0,5}} = 1,9996$, $d = e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{-0,98\sqrt{0,5}} = 0,50009$

6. siehe Übung 10

Übung 10: Optionsbewertung nach Black/Scholes

Gegeben sei die bekannte Optionspreisformel nach Black/Scholes:

$$P_c = P_{\text{Aktie}} \cdot \Phi(d_1) - S \cdot e^{-it} \cdot \Phi(d_2),$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \cdot \frac{t}{2} \right], \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it - \sigma^2 \cdot \frac{t}{2} \right]$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist (siehe Formelsammlung), P_{Aktie} - Kurs der Aktie, S - Strikepreis, i - risikoloser Zinssatz (bei kontinuierlicher Verzinsung), t - Restlaufzeit.

1. (Optionspreise)

- Man berechne den Optionspreis für $t = 1$, $P_{\text{Aktie}} = 220$, $S = 165$, $\sigma = 0,98$, $i = 21\%$.
- Für $t = 1$, $P_{\text{Aktie}} = 100$, $\sigma = 0,5$, $i_{\text{kont.}} = 10\%$ und verschiedene Basispreise S (z. B. $S = 200$, $S = 100$, $S = 80$, $S = 50$, $S = 10$) berechne man jeweils den Preis eines Calls und interpretiere diesen.

2. (The Greeks)

- Man berechne die partielle Ableitung $\Delta = \frac{\partial P_c}{\partial P_{\text{Aktie}}}$ und interpretiere diese Größe.
- Stimmt es, dass *at the money* $\Delta \approx 0,5$ gilt? Wann ist Δ exakt gleich 0,5?
- Man weise die Gültigkeit der Beziehung $P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) = S e^{-it}\varphi(d_2)$ nach.
- Man berechne die Größen Gamma, Theta sowie $\frac{\partial P_c}{\partial S}$ und interpretiere diese.

3. (Put-Call-Parität)

- Was versteht man unter der Put-Call-Parität?
- Man beschreibe, wie man mit Hilfe zweier Portfolios den Wert eines Aktienputs ermitteln kann.
- Man berechne die Put-Preise in den Situationen von Aufgabe 1 b).

Lösungen zu Übung 10

1. a) $i = 21\%$ entspricht einer kontinuierlichen Verzinsung mit $i^* = \ln 1,21 = 0,1906$. Somit gilt

$$d_1 = \frac{1}{0,98 \cdot 1} \left[\ln \frac{220}{165} + 0,1906 \cdot 1 + 0,98^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = 0,97804,$$

$$d_2 = \frac{1}{0,98 \cdot 1} \left[\ln \frac{220}{165} + 0,1906 \cdot 1 - 0,98^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = -0,00195.$$

Aus der Tabelle der Normalverteilung (S. 130) entnehmen wir (unter Verwendung der linearen Interpolation) $\Phi(d_1) = 0,83597$, $\Phi(d_2) = 1 - \Phi(0,00195) = 1 - 0,50078 = 0,49922$, ?????? woraus sich

$$P_c = 220 \cdot 0,83597 - 165 \cdot e^{-0,1906} \cdot 0,49922 = 115,84$$

ergibt (vgl. Aufgabe 5 in Übung 9: dort betrug $P_c = 116,36$).

b) Mit $P_{\text{Aktie}} = 100$, $t = 1$, $\sigma = 0,5$, $i = 0,1$ ergibt sich:

$$d_1 = \frac{1}{0,5 \cdot 1} \left[\ln \frac{100}{S} + 0,1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5^2 \right] = 2 \cdot \left[\ln \frac{100}{S} + 0,225 \right],$$

$$d_2 = \frac{1}{0,5 \cdot 1} \left[\ln \frac{100}{S} + 0,1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,5^2 \right] = 2 \cdot \left[\ln \frac{100}{S} - 0,125 \right].$$

Für die verschiedenen Basispreise erhalten wir folgende Ergebnisse:

S	d_1	d_2	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_2)$	P_c
200	-0,936	-1,436	0,175	0,076	10,62
100	0,450	-0,050	0,674	0,480	23,96
80	0,896	0,196	0,815	0,578	39,65
50	1,836	1,336	0,967	0,909	55,57
10	5,055	4,355	1,000	1,000	90,95

Abgesehen davon, dass nicht für jeden Basispreis S tatsächlich Optionen auf dem Markt sind, ergibt sich folgendes Bild:

Je höher der Basispreis, desto kleiner der Wert des Calls, desto geringer aber auch die Chance darauf, dass der Aktienkurs über dem Basispreis liegen wird. Umgekehrt: Je kleiner der Basispreis, desto teurer der Call, da die Chance auf Ausübung der Option sehr groß.

Bei $S = 10$ ist die Chance auf Optionsausübung praktisch 100%, aber es gibt auch kaum etwas zu verdienen. Angenommen, der heutige Aktienkurs von $P_{\text{Aktie}} = 100$ entwickle sich entsprechend dem risikolosen Zinssatz auf $K_1 = K_0 \cdot e^{it} = 110,52$, dann ist für $t = 1$ der innere Wert des Calls 100,52, was abgezinst auf $t = 0$ auf 90,95 führt; dies ist gleich dem Preis des Calls.

2. Hilfsbeziehungen, die im weiteren benötigt werden:

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{t}, \quad d_1 + d_2 = \frac{2}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} &= \frac{1}{2}(d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it = \ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + \ln e^{it} = \ln \left(\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} \cdot e^{it} \right) \\ &\implies e^{\frac{d_1^2 - d_2^2}{2}} = \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} \cdot e^{it} \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der Normalverteilung:

$$\varphi(d) = \Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta &= \frac{\partial P_c}{\partial P_{\text{Aktie}}} = \Phi(d_1) + P_{\text{Aktie}} \cdot \varphi(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S} - S \cdot e^{-it} \cdot \varphi(d_2) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S} \\ &= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{t} \cdot P_{\text{Aktie}} \cdot \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right] \\ &= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{t} \cdot P_{\text{Aktie}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left[P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} e^{\frac{d_1^2 - d_2^2}{2}} \right] = \Phi(d_1), \end{aligned}$$

denn die eckige Klammer kann weiter umgeformt werden zu: $P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} \cdot e^{it} \cdot \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = 0$.

b) Ja, in der Nähe des Basispreises gilt $\Delta \approx 0,5$ (vgl. Tabelle in 1 b). Delta ist genau dann gleich 0,5, wenn $d_1 = 0$ ist. dies ist dann der Fall, wenn $\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \frac{\sigma^2 t}{2} = 0$ gilt. Im Fall von Aufgabe 1 b) bedeutet das: $\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = -0,225 \implies \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = e^{-0,225} = 0,799 \implies S = 1,252 P_{\text{Aktie}} = 125,2$.

Bemerkung: Sind σ , i und t relativ klein, so ist $d_1 = 0$, wenn $\ln P_{\text{Aktie}}/S \approx 0$, d. h. $P_{\text{Aktie}} \approx S$.

c) $P_{\text{Aktie}} \varphi(d_1) = S e^{-it} \varphi(d_2)$ bedeutet $P_{\text{Aktie}} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = S e^{-it} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$, was wiederum äquivalent zu $\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} e^{it} = e^{\frac{d_1^2 - d_2^2}{2}}$ ist, eine Beziehung, die oben bereits nachgewiesen wurde.

$$\text{d) } \Gamma = \frac{\partial^2}{\partial P_{\text{Aktie}}^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial P_{\text{Aktie}}} = \varphi(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\varphi(d_1)}{P_{\text{Aktie}} \sigma\sqrt{t}}$$

Erhöht sich der Kurs um ΔP_{Aktie} , so ändert sich Δ (näherungsweise) um $\Delta \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}$.

Hedge-Strategie: Wie viel Aktien x sind zu halten, wenn 1 Option verkauft wird, damit bei Kursänderung um ΔP_{Aktie} Einnahmen gleich Ausgaben sind?

(1): Wertänderung der Aktien: $x \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}$ (2) Wertänderung einer Option (näherungsweise; resultiert aus Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied): $\Delta \cdot \Delta P_{\text{Aktie}} + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta P_{\text{Aktie}})^2$. Gleichsetzen und kürzen mit ΔP_{Aktie} führt auf:

$$x = \Delta + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}. \quad (*)$$

Eine Möglichkeit: Schätze wahrscheinliche Änderung ΔP_{Aktie} und wähle x gemäß (*). Andere Möglichkeit: Konstruiere geeignetes Portfolio.

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{\partial P_c}{\partial t} = P_{\text{Aktie}} \cdot \varphi(d_1) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \frac{t}{2} \right) \right] + iSe^{-it}\Phi(d_2) \\
&\quad - Se^{-it}\varphi(d_2) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it - \frac{\sigma^2 t}{2} \right) \right] \\
&= iSe^{-it}\Phi(d_2) + P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i + \frac{\sigma^2}{2} - i + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \frac{t}{2} - \ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} - it + \sigma^2 \frac{t}{2} \right) \right] \\
&= iSe^{-it}\Phi(d_2) + P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \left[\frac{\sigma}{\sqrt{t}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \right] = iSe^{-it}\Phi(d_2) + \frac{P_{\text{Aktie}}\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Hinweis: Hier wurde die Beziehung $P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) = Se^{-it}\varphi(d_2)$ ausgenutzt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial S} &= P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{-P_{\text{Aktie}}}{S^2} - e^{-it}\Phi(d_2) - Se^{-it}\varphi(d_2) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{-1}{S} \\
&= -\frac{P_{\text{Aktie}}}{S}\varphi(d_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} + e^{-it}\varphi(d_2) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} - e^{-it}\Phi(d_2) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[-\frac{1}{S}P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) + e^{-it}\varphi(d_2) \right] - e^{-it}\Phi(d_2) \\
&= -e^{-it}\Phi(d_2) \quad (\text{die eckige Klammer ist Null; s. o.})
\end{aligned}$$

3. a) Die Put-Call-Parität $P_{\text{put}} + P_{\text{Aktie}} = P_{\text{call}} + S \cdot e^{-it}$ ist eine Äquivalenzbeziehung zur Bestimmung von P_{put} , die aus der Betrachtung zweier äquivalenter Portfolios resultiert.

b) (Laufzeit sei z. B. $t = 1$)

Portfolio 1: Aktie + Putoption;

Portfolio 2: Call + sichere Geldanlage derart, dass Zeitwert für $t = 1$ gleich S

Situation 1: In $t = 1$ gelte $K_1 > S$. Calloption wird ausgeübt, Putoption ist wertlos. Wert von Portfolio 1 = Wert von Portfolio 2 = K_1 .

Situation 2: In $t = 1$ gelte $K_1 < S$. Calloption wertlos, Putoption wird ausgeübt. Wert von Portfolio 1 = Wert von Portfolio 2 = S .

Aus dem Gedanken, dass der Wert beider Portfolios auch für $t = 0$ gleich sein soll, resultiert die Put-Call-Parität.

c)

S	$S \cdot e^{-it}$	P_c	P_{put}
200	180,97	10,62	91,59
100	90,48	23,96	14,44
80	72,39	39,65	12,04
50	45,24	55,57	0,81
10	9,05	90,95	0,00

Übung 11: Optionen und strukturierte Produkte

1. (Devisenoptionen) Ein Exporteur möchte eine Option zum Kauf von USD zum Kurs von 2,00 DM/\$ mit Laufzeit von einem Jahr erwerben. Der deutsche Zinssatz liegt bei 4%, der amerikanische bei 6% (kontinuierliche Verzinsung). Bei einem Kassakurs von 2,00 und einer Volatilität von 10% soll der Preis ermittelt werden.

Verwenden Sie beide der Ihnen bekannten Optionspreismodelle.

2. (Arbitrage bei Termindevisen) Man zeige, dass bei einer Abweichung des Termindevisenkurses von der Größe $E_t = E_0 \cdot e^{(i - i_a)t}$ (i, i_a – in- bzw. ausländischer Zinssatz) ein risikoloser Gewinn möglich wäre.

3. (Bewertung eines Caps) Es soll ein Cap über 100 000 DM mit einer Optionsfrist von einem Jahr gekauft werden. Der Capsatz liege bei 8% mit 6-Monats-Libor als Referenzsatz. Die Forward Rate für den Zeitraum $1 \rightarrow 1,5$ liege ebenfalls bei 8%, der risikolose 1-Jahres-Zinssatz bei 6% (kontinuierlich verzinst), der Forwardssatz habe eine Volatilität von $\sigma = 20\%$. Wie viel ist für den Cap zu zahlen?

4. (Collared Floater) Es soll eine Collared Floater angeboten werden (Laufzeit 20.8.2000 bis 20.8.2002). Die einzelnen Bestandteile mögen folgende Charakteristika besitzen:

	Floor	Cap	Floater	Collar	Collared Floater
Nominal	100.000.000	100.000.000	100.000.000		
Strike/Kupon	2,50 %	6,00 %	3,30 %		
BPV	-428,80	384,16	-4840,27		
Preis	16.050,26	-15.572,18	100.000.000		

Berechnen Sie die fehlenden Größen und beschreiben Sie die Funktionsweise des Collared Floaters.

5. (Callable Bond) Ein normaler, zu pari notierender Bond mit einer Laufzeit von 2 Jahren besitze einen Nominalzins von 3,62%. Ein Emittent möchte einen Callable Bond mit ebenfalls 3,62% Nominalzins begeben, der nach einem Jahr zu pari kündbar ist (was für den Investor einen Nachteil bedeutet). Wie viel ist das Kündigungs-Recht heute wert, d. h., zu welchem Preis muss der Callable Bond ausgegeben werden? (Bekannt sei der Preis einer Receiver-Swaption mit Kupon 3,62%, die in einem Jahr beginnt und eine Laufzeit von 1 Jahr hat: 38 Basispunkte, d. h. für nominal 100 DM sind 0,38 DM zu zahlen.)

Lösungen zur 11. Übung:

$$1. \quad a) \quad P_c = E_0 \cdot e^{-i_a t} \Phi(d_1) - X e^{-it} \Phi(d_2), \quad d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln \frac{E_0}{X} + (i - i_a)t + \sigma^2 \frac{t}{2} \right], \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t},$$

wobei $t = 1$, $\sigma = 0,1$, $i = 0,04$, $i_a = 0,06$ $E_0 = X = 2$

Es gilt: $d_1 = \frac{1}{0,1 \cdot 1} [\ln 1 + (-0,02)1 + 0,1^2 \cdot \frac{1}{2}] = -0,15$, $d_2 = -0,25$ und somit

$$\Phi(d_1) = 1 - \Phi(0,15) = 1 - 0,559638 = 0,440362, \quad \Phi(d_2) = 1 - \Phi(0,25) = 1 - 0,598706 = 0,401294$$

$$P_c = 2 \cdot 0,94176 \cdot 0,4404 - 2 \cdot 0,96079 \cdot 0,4013 = 0,05835.$$

Also: Pro USD müssen 5,8 Pfennige als Prämie aufgewendet werden (denn Maßeinheit von P_c ist gleich ME von E_0 gleich DM/\$).

$$b) \quad E_t = E_0 \cdot e^{(i - i_a)t} = 2 \cdot e^{-0,02 \cdot 1} = 1,9604$$

Der Terminkurs für 1 Jahr liegt heute bei 1,96 DM/\$. Dieser Wert kann (aus heutiger Sicht) als eine Schätzung für den zukünftigen Kurs aufgefasst werden, so dass es sehr wahrscheinlich ist, dass der Kurs (trotz zufälliger Schwankungen) in 1 Jahr unter 2 DM/\$ liegen wird. Deshalb ist der Call relativ billig.

Black-Modell:

$$P_c = e^{-it} [E_t \Phi(d_1) - X \Phi(d_2)], \quad d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln \frac{E_t}{X} + \sigma^2 \frac{t}{2} \right] = -0,15, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t} = -0,25$$

Wegen $E_t \cdot e^{-it} = E_0 \cdot e^{-i_a t}$ erhalten wir die gleichen Werte wie oben.

Zusatzüberlegung: Es gelte $i = i_a = 0,06$. Wird der Call teurer oder billiger?

Zunächst gilt $E_t = E_0 \cdot e^0 = 2$. Damit liegt der in 1 Jahr zu erwartende Kurs höher als oben, so dass die Chance, dass er kleiner oder gleich 2 DM/\$ ist, geringer ist und der Call teurer werden muss. Die exakte Rechnung für $i = i_a = 0,06$ ergibt folgendes:

$$d_1 = \frac{\sigma \sqrt{t}}{2} = 0,05, \quad d_2 = -\frac{\sigma \sqrt{t}}{2} = -0,05, \quad \Phi(d_1) = 0,519938, \quad \Phi(d_2) = 0,480062$$

$$P_c = 2 \cdot e^{-0,06} [0,519938 - 0,480062] = 0,0751, \text{ d.h. } 7,5 \text{ Pf./\$}, \text{ also wirklich teurer als oben.}$$

2. Wir nehmen die Werte aus 1 b): $i = 0,04$, $i_a = 0,06$, $E_0 = 2$, $E_t = 2 \cdot e^{0,04 - 0,06} \cdot 1 = 1,9604$

In Deutschland wachsen 100 DM nach einem Jahr auf 104,08 DM (stetige Verzinsung) an.

In den USA wachsen 50 \$ nach einem Jahr auf 53,09 \$ (stetige Verzinsung) an.

Fall 1: Es gelte $E_1 = 2,10$.

Wir borgen 100 DM, tauschen diese in 50 \$, diese wachsen auf 53,09 \$ an, rückgetauscht zum Kurs E_1 bringt das 119,49 DM, während wir für das geborgte Geld 104,08 DM zurückzahlen haben. Gewinn: 7,41 DM.

Fall 2: Es gelte $E_1 = 1,90$.

Wir borgen 50 \$, tauschen diese in 100 DM, diese wachsen auf 104,08 DM an, rückgetauscht zum Kurs E_1 bringt das 54,78 \$, während wir für das geborgte Geld 53,09 \$ zurückzahlen haben. Gewinn: 1,69 \$.

3. Der Preis des Caps hängt vom Nominalbetrag (zum Zeitpunkt der Optionsausübung)

ab. Dieser beträgt (bei einfachem Abzinsen): $Z = \frac{0,5 \cdot 100000}{1 + 0,08 \cdot 0,5} = 48076,92$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{t}} \left[\ln \frac{i_f}{i_{sc}} + \sigma_f^2 \cdot \frac{t}{2} \right] = 0,1, \quad d_2 = -0,1, \quad \Phi(d_1) = 0,539828, \quad \Phi(d_2) = 0,460172$$

$$P_c = e^{-it} Z [i_f \Phi(d_1) - i_{sc} \Phi(d_2)] = 288,53 \text{ DM.}$$

Bemerkung: Kontinuierliches Abzinsen wäre ebenso möglich, führt allerdings auf ein etwas modifiziertes Modell.

4.

	Floor	Cap	Floater	Collar	Collared Floater
Nominal	100.000.000	100.000.000	100.000.000	100.000.000	100.000.000
Strike/Kupon	2,50 %	6,00 %	3,30 %	2,50...6,00 %	3,30 %
BPV	-428,80	384,16	-4840,27	-44,64	-4884,91
Preis	16.050,26	-15.572,18	100.000.000	478,08	100.000.478

Der Collar kostet fast nichts, so dass auch der Collared Floater praktisch zu pari ausgegeben werden kann. Der erste Kupon liegt bei 3,30 % und während der gesamten Laufzeit wird der Kupon in einer Bandbreite von 2,50 % bis 6,00 % liegen.

5. Der Investor, der den Callable Bond kauft, kann sich gegen den Fall der Kündigung durch eine option absichern, die ihm das Recht gibt, in einen IRS einzutreten, der ihm den Kupon 3,62 % zahlt (und wo er LIBOR zahlen muss). Er muss also zur Absicherung eine *Receiver-Swaption* kaufen. Also: Mit dem Callable Bond hat der Emittent an den Investor eine Receiver-Swaption verkauft, so dass gilt:

$$\text{Callable Bond} = \text{Bond} - \text{Receiver-Swaption.}$$

Damit muss der Verkaufspreis des Bonds unter bzw. bei höchstens $100 - 0,38 = 99,62$ liegen.

Analyse möglicher Fälle:

Fall 1: Nach einem Jahr liege der Marktzins bei 4 %.

Der Emittent kündigt nicht, weil er nur 3,62 % zahlen muss; der Investor erhält 3,62 %.

Fall 2: Nach einem Jahr liege der Marktzins bei 3 %.

Der Emittent kündigt (da er sonst mehr zahlen müsste als am Markt üblich); der Investor erhält 100 GE zurück, die er zum LIBOR anlegt, diese Zinsen zahlt er in den IRS und erhält aus dem IRS den Festzinssatz von 3,62 %.