1 Klassische Finanzmathematik

1.1 Einfache Verzinsung

Aufzinsen (auf K_t)	$K_t = K_0(1 + i * t)$	t = Zeitpunkt; kann auch gebrochene Zahl sein
Abzinsen (auf K_0) (= Diskontieren)	$K_0 = \frac{K_t}{1 + i * t}$	
Endwert – monatliche vorschüssige Rente – nach 1 Jahr	$E = r(12 + 6{,}5i)$	r = mtl. Rentenzahlung i = Zinssatz p.a. (Absolutzahl)
Endwert – monatliche nachschüssige Rente – nach 1 Jahr	$E = r(12 + 5{,}5i)$	r = mtl. Rentenzahlung i = Zinssatz p.a. (Absolutzahl)

1.2 Zinseszinsrechnung

Endwert	$K_n = K_0(1+i)^n$ $K_n = K_0 * q^n$	$i = \frac{p}{100}$ $\quad q = 1 + i$ i = interrest = Zinsrate (Absolutzahl) n = (ganze) Perioden
Barwert	$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{q^n} = K_n * v^n$	v = 1 / q (Abzinsungsfaktor)
Endwert bei gemischter, taggenauer Verzinsung	$K_E = K_A(1 + i * t_1)(1+i)^{n-2}(1 + i * t_2)$	t_1 / t_2 = gebrochene Per. am LFZ Anfang/ Ende n = ganze Perioden K_A = Anfangskapital
EW bei relativer unterjähriger Verzinsung $\frac{i}{m}$	$K_E^{(m)} = K_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$	m = Anzahl der unterjährigen Perioden (Subperioden)
Endwert bei Augenblicksverzinsung	$K_E = K_0 * e^i$	wenn m → ∞

Effektivverzinsung (= Jahresrendite) bei unterjähriger Verzinsung	$i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$	$i_{eff} > i$
Umrechnung unterjähriger Zins ↔ Jahreszins (äquivalente unterjährige Zinsrate i_m zu $i_{p.a.}$; mit Zinseszinseffekt)	$i_{p.a.} = (1 + i_m)^m - 1$ $i_m = \sqrt[m]{1 + i_{p.a.}} - 1$	$i_m << i$ i_m - Zinssatz bezogen auf Subperiode $i_{p.a.}$ - Jahreszinssatz m - Subperioden
Zinsintensität i^* (= kontinuierliche Verzinsung)	$i^* = \ln(1+i)$ $i = e^{i^*} - 1$	$i^* < i$ i - Periodenverzinsung i^* - kontinuierliche Verzinsung
Effektivverzinsung (p.a.) bei folg. unterjährigen Verzinsungen (1) unterjähriger Verzinsg. (2) Augenblicksverzinsung	$(1) \rightarrow i_{eff} = \frac{K_E - K_0}{K_0}$ $(2) \rightarrow i_{eff} = e^i - 1$	(1) → $1 < m < \infty$ (2) → $m = \infty$ m - Subperioden
Durchschnittsrendite	(1.) $K_n = F \times K_0 = K_0 \times q^n$ (2.) $F = q^n$ (3.) $q = \sqrt[n]{F}$	F = (Wachstums-) Faktor

1.3 Rentenrechnung

Endwert – nachschüssige Rente	$E_n^{nach} = r * \frac{q^n - 1}{q - 1}$	r - Rentenzahlungen i - Marktzinssatz (Absolutzahl) mit $q = 1 + i$ n - Perioden
Endwert – vorschüssige Rente	$E_n^{vor} = r * q * \frac{q^n - 1}{q - 1}$	
Barwert (allg.)	$B = \frac{E}{q^n}$	
Barwert – nachschüssige Rente	$B_n^{nach} = r * \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$	

Barwert – vorschüssige Rente	$B_n^{vor} = r * \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$
Barwert – ewige Rente - nachschüssig -	$B_\infty^{nach} = \frac{r}{q-1} = \frac{r}{i}$
Barwert – ewige Rente - vorschüssig -	$B_\infty^{vor} = \frac{r * q}{q-1} = \frac{r * q}{i}$

2 Gegenwartswerte (= Barwert = Present Value = Kurs = Price)

2.1 Gegenwartswerte und Opportunitätskosten

DCF method (discounted cash flow)	$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{q^k}$	Investition durchführen wenn B > 0
IRR method (Internal Rate of Return) (interner Zinsfuss)	$\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{q^k} = !\,0$ $q = 1 + i$	➔ Investition durchführen, wenn i > (Marktverzinsung + Risikoprämie) (= Opportunitäts kosten)
Gegenwartswerte von konstanten Annuitäten	$B = \frac{Z}{q-1} = \frac{Z}{i}$	Ann.: nur Zinszahlung; keine Rückzahlung Z = Zinszahlung
Gegenwartswerte von Annuitäten mit Dynamisierungsfaktor	$B_n = \frac{Z}{q} \times \frac{\left(\frac{s}{q}\right)^n - 1}{\frac{s}{q} - 1}$	s = 1 + g Dynamisierungsfaktor q = 1 + i
Gegenwartswerte von Annuitäten mit Dynamisierungsfaktor - unendliche Reihe -	$B_\infty = \frac{Z}{i-g}$	➔ nur für i > g sinnvoll ➔ bei i < g nur sinnvoll für endliche Reihe ➔ Z = Zahlung (Annuität; Zinsen bzw. Rente) ➔ B bei nachschüssigem Z

2.2 Gegenwartswerte von Anleihen (Bewertung von Anleihen)

allgemein: „Kursformel Anleihe“: - <u>ganzjährige</u> RestLFZ - alternative Schreibweise:	$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z}{q^k} + \frac{N}{q^n}$ $B = \frac{1}{q^n}\left(p * \frac{q^n - 1}{q-1} + T\right)$ $B = Z * \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} + \frac{T}{q^n}$	N - Nominalbetrag der Anleihe Z - (period.) Zahlungen n - Perioden T - Rückzahlung (meist zu 100) p - Kupon (Nominalzins der Anleihe in %; z.B. p = 8 [%]) q - enthält Marktzins : $q = 1 + \frac{p_{eff}}{100}$ p_{eff} - <u>Marktzins</u> (nicht Kupon !)

„Kursformel Anleihe": - <u>gebrochene</u> RestLFZ -	$B = q^a \left(p * \frac{q^n - 1}{iq^n} + \frac{T}{q^n} \right)$	a - gebrochene Periode (gem. Usance)
Barwert bei unterjährigen Zinszahlungen	$B = \frac{K}{m} * \frac{q_m^{n*m} - 1}{i_m * q_m^{n*m}} + \frac{T}{q_m^{n*m}}$	i_m - äquivalente unterjährige Zinsrate $q_m = i_m + 1$ m - Subperioden K - Kupon pro (Haupt-)Periode n - (Haupt-)Perioden

2.3 Gegenwartswerte von Aktien (Bewertung von Aktien)

... unendlich viele Perioden	$P_0 = \frac{D_1}{q} + \frac{D_2}{q^2} + \ldots + \frac{D_n}{q^n} + \ldots$ bei $D_1 = D_2 = \ldots = D_n$: BW unendl. Reihe: $P_0 = \frac{D}{i}$	P_i=Kurse zu Zeitpunkten i q enthält Kalkulationszinssatz D_i= Dividenden zu Zeitpunkten i (D, P sind geschätzt da zukünftig)
... 1 Periode	$P_0 = \frac{P_1 + D_1}{q}$	
... mit Wachstumsfaktor	$P_0 = \frac{D_1}{i - g}$	g = Wachstumsrate (Absolutzahl); $g \in (0,1)$ s = 1 + g (= Wachstumsfaktor)

3 Ermittlung der Effektivverzinsung / Rendite

3.1 Grundbegriffe

Laufende Verzinsung (current yield, interest yield, income yield, flat yield)	$i_c = \frac{\text{Kupon}}{\text{Kurs}} = \frac{\text{Nom. verzinsung}}{\text{Kapitaleinsatz}}$	i_c ist <u>Näherung</u> für Rendite
Einfache Verzinsung (simple yield to maturity)	$i_{sim} = \frac{\text{Kupon} + \frac{R - P}{n}}{P}$	i_{sim} ist <u>Näherung</u> für Rendite R = Rückzahlung P = Kurs n = Restlaufzeit

Rendite (Effektivverzinsung) (q → i)	(1) $P = f(q) = \frac{1}{q^n}\left(p * \frac{q^n - 1}{q-1} + T\right)$ P - Kurs (Preis), T - Tilg. (2) $f(q) = !0$ p - Kupon (1) Lösung über numerisches NV möglich Newton.: Iteration von k = 0, 1, ... : $q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f'(q_k)}$ q_0= Startwert
Umrechnung EffZi-Rate zwischen Basis 365 und 360	$i_{365} = \frac{365}{360} * i_{360}$

3.2 EffZi von Geldmarktpapieren (Diskontpapieren)

Effektivzinsrate ... von WP mit einmaliger Zinszahlung bei Fälligkeit (eher selten)	$i_e = \frac{R - P + p * \frac{1}{360} * (T - T_1)}{\left(P + p * \frac{T_1}{360}\right) * \frac{T - T_1}{360}}$	P - price p - Stückzinsen (T - T_1) = Haltedauer T_1 - Bezugszeitpunkt des WP T - Zinstermin
Effektivzinsrate ... von WP ohne Zinszahlung (Diskontpapiere: Handelswechsel, Commercial Papers, Treasury Bills)	$i = \frac{R - P}{P * t}$ $P = \frac{R}{1 + i * t}$	R - Rückzahlung P - Price (Kurs) t - gebrochene Periode $t \in (0,1)$ gem. Usance: 30/360 od. act/360

3.3 EffZi von Anleihen bei glatter Restlaufzeit

... bei jährlicher Zinsverrechnung (fiktive Zinszahlung)	$i_e = \sqrt[n]{\frac{R}{P}} - 1$	n - ganze Perioden (LFZ) R - Rückzahlung P - Price
... bei halbjährlicher Zinsverrechnung (fiktive Zinszahlung)	$P = \frac{R}{\left(1 + \frac{i_e}{2}\right)^{2n}}$ $i_{e_{p.a.}} = 2\left(\sqrt[2n]{\frac{R}{P}} - 1\right)$	i_e/m = relat. unterjährige Zinsrate

... allgemein bei unterjähriger Zinsverrechnung (fiktiv)	$i_{e_{p.a.}} = m\left(\sqrt[m*n]{\frac{R}{P}} - 1\right)$	m - Subperioden der fiktiven Zinsverrechnung n - ganze Perioden (der LFZ)
... bei kontinuierlicher Zinsverrechnung	$i_{eff} = i^* = \frac{\ln\left(\frac{R}{P}\right)}{n}$	vgl. Zinsintensität

3.4 EffZi von Anleihen bei gebrochener Restlaufzeit

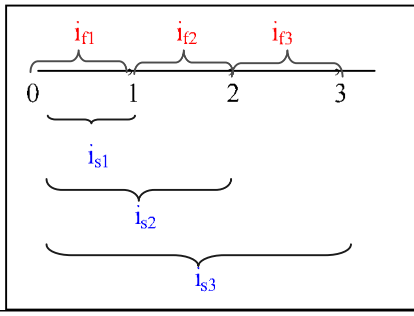
AIBD (ISMA) method - gebrochene LFZ - - ganzzahlige LFZ -	$P + S = \frac{1}{q^f}\frac{1}{q^n}\left(\frac{p}{m}\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + T\right)$ $P = \frac{1}{q^n}\left(T + \frac{p}{m}\frac{q^n-1}{q-1}\right)$	P - Price (Kurs) S - Stückzinsen (Richtung : 1→ 0 !) n - Anzahl (ganzer) Perioden bei m Perioden p.a. : n*m f - gebrochene Periode (Richtung : 1 → 0 !) m - Anz. der Kupons p.a. p - Kupon der Periode $i_e = (1+i_m)^m - 1$
… Sonderfall : RLFZ < 1, d.h. n = 0	$P + S = (R + \frac{p}{m}) * \frac{1}{q^f}$	
SIA method	$i_e = \frac{R + \frac{C}{m} - (P+S)}{P+S}$	$i_e = m * i_m$ C - Ganzjahreskupon
US Treasury method	$P + S = \frac{1}{1+i*f}\left(\frac{p}{m} * \frac{q^{n+1}-1}{(q-1)q^n} + \frac{R}{q^n}\right)$	Umrechnung i_m (aus q) auf Jahreszins: $i_e = m * i_m$
Moosmüller	wie US Treasury, anders: Umrechnung i_m (aus q) auf Jahreszins: $i_e = (1+i_m)^m - 1$	

Stückzinsen	$S = t * \frac{p}{100} * N$	t - Zeitspanne zwischen letzter Kuponzahlung und Erwerbszeitpunkt beachte Usance: t = 30/360, t = act/360, t = act/act N - Nominalbetrag p - Kupon

3.5 Die Zinsstrukturkurve

3.5.1 Spot Rates und Forward Rates

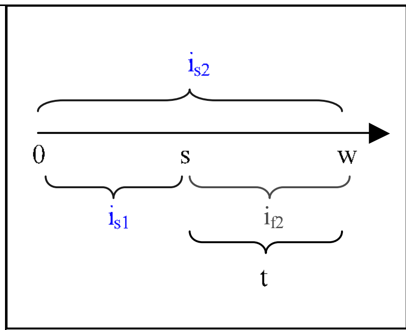
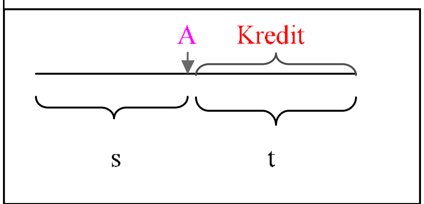
Anleihenbewertung (Barwert, Preis) bei unterschiedlichen Spot Rates	$P = \frac{p}{1+i_1} + \frac{p}{(1+i_2)^2} + \ldots + \frac{p+R}{(1+i_n)^n}$	→ Methode beachtet die Zinsstrukturkurve ges.: P ; geg.: p, i_j i_j = <u>Spot Rates</u> (= Zinsrate von heute bis j, angeg. in p.a.) p = Kupon der zu bewertenden Anleihe
Spot Rate (fristigkeitsabhängige Rendite)	$i_j = \left(\frac{K+T}{PV - \sum_{t=1}^{j-1} \frac{K_t}{(1+i_t)^t}} \right)^{\frac{1}{j}} - 1$	→ Iteratives Verfahren : die Spot Rates für die verschiedenen Perioden 1 bis j können nur schritt-weise ermittelt werden i_1 → i_2 → ... → i_j PV - Present Value (Barwert)
Rendite einer Anleihe (Effektivverzinsung)	$P = \frac{p}{q} + \frac{p}{q^2} + \ldots + \frac{100+p}{q^n}$	ges.: q (bzw. i) → Lösung über num. NV (s.a. 3.1.[3])
Zerozinssatz (par (yield) rate)	$i_t = \left(\frac{100 + p_t}{100 - p_t \sum_{k=1}^{t-1} d_k} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$	→ künstlich konstruierter Zerobond → iteratives Verfahren $d_k = \frac{1}{(1+i_k)^k}$ p_t - Swap-Satz (Kupon) (der LFZ t) Summe d_k - Summe der Diskontfak-toren über alle Perioden k von 1 bis t-1
Diskontfaktoren	$d_t = \frac{1}{(1+i_t)^t}$	i_t - Spot Rate t - kann ganzzahlig oder gebrochen sein

Forward-Based-Interpolation	$i_f = 360\left[\left(\frac{\left(1+i_k\right)^k}{\left(1+i_{k-1}\right)^{k-1}}\right)^{\frac{1}{360}} - 1\right]$	
Spot Rates und Forward Rates		

3.5.2 Spot Rates als Bewertungskriterium

4 Finanzinnovationen

4.1 Forward Rate Agreement (FRA)

Forward-Zinssatz … gebrochene Perioden (lineare Verzinsung; meist bei n < 1) … ganze Perioden (geometrische Verzinsung; meist bei n > 1) … ganze Perioden (allgemein)	$i_f = \left(\frac{1+i_{s2}(s+t)}{1+i_{s1} * s} - 1\right) * \frac{1}{t}$ $i_{f2} = \frac{(1+i_{s2})^2}{(1+i_{s1})^1} - 1$ $i_{f(n)} = \frac{(1+i_{s(n)})^n}{(1+i_{s(n-1)})^{n-1}} - 1$	 i_s - Spot Rate (der Periode 1 bzw. 2) i_f - Forward Zinssatz (gesucht) s - Vorlaufperiode (gebrochene Per.) t - Kreditperiode (gebrochene Per.) w - ganze Periode
Ausgleichszahlung	$A = \frac{N * t * (i_{libor} - i_f)}{1 + i_{libor} * t}$	t - gebrochene Periode (gemäß Usance) N - Kredit-/ Anlagebetrag 

4.2 Zinsswaps (Interest Rate Swaps (IRS))

Pricing eines Swaps (Festsatz eines Swaps p (Par Rate))	$p * \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} d_{2*k} =! \sum_{s=1}^{n} 100 * \frac{i_{fs}}{2} * d_s$	auflösen nach p (Swap-Satz)

4.3 Futures

5 Risikokennzahlen

5.1 Definition und Eigenschaften wichtiger Risikokennzahlen

5.1.1 Basis Point Value (BPV)

BPV ($\approx \Delta$ P) (Tangentenverfahren)	$\Delta P \approx BPV = \frac{dP}{di} * \Delta i$ $BPV = \frac{-1}{1+i} \sum_{k=1}^{n} \frac{k * Z_k}{(1+i)^k} * \frac{1}{10000}$	1 BP = 0,01% = 1/10.000 Z_k - Cash Flow's (Zahlungsstrom) k = 1, ..., n (Perioden)
BPV bei unterjährigen (gebrochenen) Laufzeiten	$BPV = \frac{-1}{1+i} * \frac{k * T(1+ik)}{(1+i)^k} * \frac{1}{10.000}$	$k \in (0,1)$
<u>ΔP</u> mittels BPV	$\Delta P \approx BPV$	
BPV ($\approx \Delta$ P) (Sekantenverfahren)	$BPV \approx \frac{P_2 - P_1}{2}$	
BPV eines Portfolios	$BPV_{Portfolio} = \sum BPV_{Einzeltitel}$	

5.1.2 Modified Duration

Modified Duration alternative Form :	$\frac{\Delta P}{P} \approx ModDur = \frac{dP}{di} * \frac{100BP}{P}$ $MD[\%] = \frac{-1}{1+i} \sum_{k=1}^{n} \frac{k * Z_k}{P * (1+i)^k} * \frac{1}{100}$ $MD[\%] = \frac{1}{q} * \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} \frac{k * Z_k}{q^k}$	→ ModDur in [%] P - Kurs k - Zählvariable der PeriodenLFZ

<u>$\Delta P/P$</u> mittels MD	$\frac{\Delta P}{P} \approx MD[\%] * \Delta i$	
Zinselastizität	$\varepsilon = P'(i) * \frac{i}{P}$ $\Delta P = -\varepsilon * \Delta i$	Δi in %
Umrechnung BPV ⇔ MD[%]	$MD[\%] = -\frac{BPV}{P} * 10.000$ $BPV = \frac{-MD[\%] * P}{10.000}$	MD (=ModDur) in [%] P - Ausgangskurs (vor Reaktion auf Zinsänderung)
MD eines PF	$MD_{PF} = \sum_{j=1}^{n} w_j MD_j$	$w_j = \frac{P_j}{P}$ = Gewichtsfaktoren MD_j - ModDur der Einzeltitel
MD und Elastizität	$MD[\%] = \varepsilon * \frac{\Delta i}{P}$	

5.1.3 Duration

1. Interpretation : <u>Elastizität, Sensibilität</u>		
Duration und Elastizität	$Dur = -P'(i) * \frac{1+i}{P}$ $= \varepsilon * \frac{1+i}{i}$	ε - Elastizität
<u>ΔP</u> mittels Duration	$\Delta P \approx \frac{-P * D * \Delta i}{1+i}$	i - urspr. Marktzins Δi - Zinsänderung D - Duration P - urspr. Kurs

<table>
<tr><td colspan="3">2. Interpretation : Zeitaspekt I (<u>Immunitätszeitpunkt</u>)</td></tr>
<tr><td>Duration:</td><td>$$\text{Dur} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k * \frac{Z_k}{(1+i)^k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}}$$</td><td>Dur in [Jahren] (genauer: Zinsperioden)
$k = 1, \ldots, n$ (Zahlungszeitpunkte)
n - Perioden (Restlaufzeit)
i - Marktzinssatz</td></tr>
<tr><td>alternative Form:</td><td>$$\text{Dur} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k * Z_k}{P * (1+i)^k}$$</td><td>$q = i + 1$
Z - Zahlungsrückflüsse im Zeitpunkt t</td></tr>
<tr><td>geschlossene Formeln:
- für <u>ganze</u> Perioden -</td><td>$$\text{Dur} = \frac{1+i}{i} - \frac{np + T(q - ni)}{p(q^n - 1) + Ti}$$</td><td>P - Kurs (Barwert)
p - Kupon</td></tr>
<tr><td>- für <u>gebrochene</u> Per.-</td><td>$$\text{Dur} = \frac{1+i}{i} - a - \frac{np + (1 + i - in)T}{p[(1+i)^n - 1] + iT}$$</td><td>a - gebrochene Periode</td></tr>
<tr><td colspan="3">sonstiges...</td></tr>
<tr><td>Umrechnung
MD ↔ Dur</td><td>$$\text{Dur} = \text{MD}[\%] * (1+i)$$
$$\text{MD}[\%] = \frac{1}{1+i} * \text{Dur}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Duration eines Portfolios</td><td>$$\text{Dur}_{PF} = \sum_{j=1}^{N} w_j \text{Dur}_j$$</td><td>w_j - Anteil am Portfolio (Gewichte des Barwertes)
$$\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$$
$$w_j > 0$$</td></tr>
</table>

5.1.4 Konvexität

Konvexität (allg.) Konv eines Zerobonds Konv eines Floaters Konv einer ewigen Rente	$\text{Konv} = \frac{P''(i)}{P}$ $= \frac{1}{P(1+i)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k}$ $\text{Konv} = \frac{n(n+1)}{q^2}$ $\text{Konv} = \frac{1}{P(1+i)^2} * \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k}$ $\text{Konv} = \frac{2}{i^2}$	k - bei unterjähriger Anleihe (z.B. Floater) : $k \in (0,1)$ Z - Nominalbetrag Floater + Zinsen für Zeitraum k
... Näherungsformel	$\text{Konv} \approx 10^6 * \frac{P(i^* + 10BP) + P(i^* - 10BP) - 2P(i^*)}{P(i^*)}$	
<u>ΔP</u> mittels Konvexität	$\Delta P = P(i^* + BP) - P(i^*)$ $\approx BPV * BP + \frac{P}{2} * \text{Konv} * (\Delta i)^2$	P - urspr. Kurs BP - Basispunkte (Δi in BP) BPV - Basis Point Value (Δi) - Absolutzahl
Konvexität eines Portfolios	$\text{Konv}_{PF} = \sum_{j=1}^{N} w_j \text{Konv}_j$	

5.1.5 Theta

Theta (BW-Änderung in Abhängigkeit von Restlaufzeit)	$\Theta = P'(T) * \Delta T$ $\Theta = \ln(1+i) * \frac{P}{360}$	T - RestLFZ [Jahre, 30/360] P - urspr. BW
<u>ΔP</u> mittels Theta	$\Delta P = \Theta * T$	ΔP - absoluter Zuwachs an GE T - LFZ [30/360 Tage] „Zeitrisiko“

5.1.6 Delta-Plus-Ansatz

$\underline{\Delta P}$ mittels Delta-Plus-Ansatz	$\Delta P \approx BPV * \Delta i + \frac{1}{2} Konv * P * (\Delta i)^2 - \Theta * 360 * \Delta T$
…	→ Delta-Plus-Ansatz liefert beste Approximation für ΔP ΔT - RLFZ [gebrochene Periode gem. Usance] Δi - Zinsänderung in <u>[BP]</u> ΔP - absolute Kursänderung

5.1.7 Value at Risk (VaR)

6 Optionstheorie

6.1 Grundlagen

6.1.1 Grundbegriffe

6.1.2 Intuitive Prämienerklärung

6.1.3 Bewertung nach Cox / Ross / Rubinstein

Innerer Wert der Option (Wert des Call im Zeitpunkt t)	$\Delta = K - X$	X - strike (Ausübungspreis, Basis-preis) K - aktueller Aktienkurs
Erwartungswert der Optionsprämie (Call) in T=0 (Formel <u>ohne</u> Pseudo-WK)	$C_0 = \frac{\Delta}{1+i} \frac{(1+i)K_0 - K_{1d}}{K_{1u} - K_{1d}}$	K_u - Aktienkurs im Fall (up) K_d - Aktienkurs im Fall (down) K_0 - Aktienkurs in T=0
... (Formel <u>mit</u> Pseudo-WK) (Bernoulli Prinzip)	$C_0 = \frac{p * \Delta_{1u} + (1-p) * \Delta_{1d}}{1+i}$	Δ_{1u} - (innerer) Wert der Option im Zustand up des Zeitpunktes 1
Pseudowahrscheinlichkeit	für up : $p = \frac{i-d}{u-d}$ für down : (1- p)	u - upside change $\in (0,1)$ d - downside change $\in (0,1)$; <u>negatives</u> Vorzeichen ! i - Marktzins $\in (0,1)$
SD $\rightarrow$ u SD $\rightarrow$ d	$u = e^{\delta\sqrt{n}} - 1$ $d = e^{-\delta\sqrt{n}} - 1$	n - Anteil des Jahres, n $\in (0,1)$ δ - SD (bezogen auf 1 Jahr) → u, d : für unterjährigen Zeitraum n
(grober) Hedge-Ratio	$\Delta = \frac{P_t^o - P_t^u}{K_t^o - K_t^u}$	P^o, P^u - oberster bzw. unterster Optionspreis (innerer Wert) in t K^o, K^u - oberster bzw. unterster Aktienkurs in t t - beliebiger (diskreter) Zeitpunkt (t > 0)

6.1.4 Bewertung nach Black / Scholes

Optionsprämie (Call)	$C_0 = K * \Phi(d_1) - X * e^{-it} * \Phi(d_2)$ $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln\frac{K}{X} + it + \sigma^2\frac{t}{2}\right)$ $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln\frac{K}{X} + it - \sigma^2\frac{t}{2}\right)$	*Φ* (d) - Verteilungsfunktion der Normalverteilung → Werte des Φ zwischen <u>0,5 bis 1</u>! $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ i - kontinuierlicher Zins (eigentlich i^* als Symbol) t - RestLFZ der Option

6.2 Abhängigkeit des Optionspreises P von verschiedenen Einflussgrößen (The Greeks)

6.2.1 Delta

Delta → Abhängigkeit P vom Aktienkurs K	$\Delta = \frac{\partial P}{\partial K} = \Phi(d_1)$	

6.2.2 Gamma

Gamma = Veränderung des Delta	$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial K^2} = \frac{\varphi(d_1)}{K\sigma\sqrt{t}}$ $\varphi(d) = \Phi'(d)$	

6.2.3 Theta

Theta	$\Theta = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{K\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{t}} + iXe^{-it}\Phi(d_2)$	

6.2.4 Lambda (Vega)

Lambda (Vega)	$\Lambda = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = K\varphi(d_1)\sqrt{t}$	

6.2.5 Omega

Omega	$\Omega = \Delta \frac{K}{P} = \Phi(d_1)\frac{K}{P}$	

6.2.6 Weitere Größen

→ Abhängigkeit P vom Strike-Preis X	$\frac{\partial P}{\partial X} = -e^{-it}\Phi(d_2)$	
→ Abhängigkeit P vom Zinssatz i	$\frac{\partial P}{\partial i} = tX\Phi(d_2)e^{-it}$	

6.2.7 Hedge Strategie

$x = \Delta + \frac{1}{2}\Gamma * \Delta K$

6.3 Put-Call-Parität

	$P_{Put} = P_{Call} + Xe^{-it} - K$	i - kontinuierlicher Zinssatz

6.4 Bewertungsprobleme bei American Style Options

6.5 Anwendungen der Optionspreistheorie

6.5.1 Aktienoptionen

6.5.2 Devisenoptionen und Optionen auf Futures

Devisenoption ... mit Kassakurs	$P_c = E_0 e^{-i_a t}\Phi(d_1) - Xe^{-it}\Phi(d_2)$ $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln\frac{E_0}{X} + (i - i_a)t + \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$	E_0 - Kassakurs einer Devise i - inländischer Zinssatz i_a - ausländischer Zinssatz X - Strike (gewünschter Ausübungskurs)
Devisenoption ... mit Terminkurs (Black-Modell)	$P_c = e^{-it}\left(E_{Ter\,min}\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)\right)$ $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln\frac{E_{Ter\,min}}{X} + \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$	
erwarteter Termin-devisenkurs kontinuierliche Verzinsung einfache Verzinsung	$E_1 = E_0 e^{(i-i_a)t}$ $E_1 = E_0(1 + (i - i_a)t)$	E_1 - Termindevisenkurs E_0 - Devisenkurs (Preis der Fremdwährung in heimischer Währung ausgedrückt) in t = 0

6.5.3 Zinsoptionen

6.5.4 Caps and Floors

Cap Bewertung	$P_{Cap} = e^{-it} Z\left[i_f\Phi(d_1) - i_{sc}\Phi(d_2)\right]$ $Z = \frac{N * \tau}{1 + i_f + \tau}$ $d_1 = \frac{1}{\sigma_f\sqrt{t}}\left(\ln\frac{i_f}{i_{sc}} + \sigma_f^2\frac{t}{2}\right)$	Z - Ausgleichsbetrag i_{sc} - Strike Cap (Cap Satz) i_f - Forward-Zinssatz i - risikoloser Zins τ - abzusichernder Zeitraum (= Zeitraum der Forward Rate) t - Optionsfrist des Caps σ_f^2, σ_f - Volatilität des Forward-Satzes