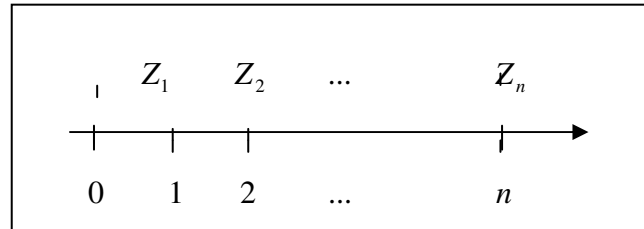


1. Lineare Approximation von Barwert- und Renditeänderungen

Gegeben sei ein allgemeiner Zahlungsstrom der Art



- Beschreiben Sie die Funktion  $P = f(i)$ , die den Barwert des Zahlungsstroms in Abhängigkeit vom Marktzinssatz  $i$  darstellt und berechnen Sie davon die 1. Ableitung. (4 Pkt.)
- Der Marktzinssatz  $i^*$  ändere sich um die (variable) Größe  $\Delta i$ . Wie ändert sich (näherungsweise)  $P^* = f(i^*)$ ? (2 Pkt.)
- Was versteht man unter der Kennzahl Theta eines Zerobonds? Leiten Sie diese Größe aus mathematischen Überlegungen her? Was ändert sich, wenn man anstelle eines Zerobonds einen beliebigen Zahlungsstrom (s.Abb.) betrachtet? (7 Pkt.)
- Wie ändert sich der Wert eines Zerobonds (Laufzeit 8 Jahre, Preis 69,52, Rückzahlung 100, Marktzinssatz 4,65%), wenn sich der Marktzinssatz absolut um 0,05% verringert und sich die Restlaufzeit um 2 Tage verkürzt? (7 Pkt.)

2. (No-Arbitrage-) Portfolios

- Beweisen Sie, dass die Duration eines Portfolios aus zwei Zerobonds unterschiedlicher Laufzeit (bei flacher Zinskurve) gleich der barwertgewichteten Summe aus den Einzeldurationen ist. (6 Pkt.)
- Ein Portfolio aus zwei Titeln mit den Durationen  $D_1$  und  $D_2$  soll eine vorgegebene Duration  $T$  ( $D_2 < T < D_1$ ) besitzen. Mit welchen Gewichten müssen die beiden Titel im Portfolio enthalten sein? (4 Pkt.)
- Wie kann man die Duration eines Portfolios berechnen, wenn der Portfoliowert null beträgt? (2 Pkt.)
- Wie kann man die Rendite eines (beliebigen) Portfolios näherungsweise ermitteln, wenn die Durationen der Einzeltitel bekannt sind? (2 Pkt.)
- Beschreiben Sie die Konstruktion eines (No-) Arbitrage-Portfolios und begründen Sie dessen Sinnfälligkeit in *einer* der folgenden Situationen:
  - Ermittlung des fairen Werts eines Bundfutures *oder*
  - Begründung der Put-Call-Parität einer Aktienoption *oder*
  - Berechnung des fairen Preises eines Aktiencalls im Einperiodenmodell von Cox-Ross-Rubinstein. (6 Pkt.)

### 3. Immunisierung und Duration

- a) Was versteht man unter Immunisierung („immun sein“) in Bezug auf ein Finanzprodukt? (2 Pkt.)
- b) Wie kann man nachweisen, dass ein Zahlungsstrom zum Zeitpunkt  $t = Dur$  immun gegenüber Marktzinsschwankungen ist? Formulieren Sie eine entsprechende Extremwertaufgabe und geben Sie Hinweise zu deren Lösung. (6 Pkt.)
- c) Angenommen, ein Portfolio mit Wert null bestehe aus der Festsatzseite (als *receiver*) und der variablen Seite (als *payer*) eines Swaps mit Laufzeit  $n = 10$  und halbjährlichen variablen Zinszahlungen. Verändert sich die Risikokennzahl *Duration* beider Seiten auf gleiche Weise, wenn sich der Marktzinssatz ändert? (4 Pkt.)
- d) Ist ein Zerobond immun gegen Zinsveränderungen, wenn er über die volle Laufzeit gehalten wird? (Begründung!) (3 Pkt.)
- e) Die Duration einer Anleihe mit gebrochener Laufzeit lässt sich folgendermaßen berechnen:
- $$Dur = \frac{1+i}{i} - a - \frac{np + (q-in)R}{p(q^n - 1) + iR}$$
- ( $n$  – ganzzahlige Laufzeit;  $a$  – gebrochener Teil;  $q = 1+i$ ;  $i$  – Marktrendite,  $p$  – Kupon,  $R$  – Rückzahlung,  $P$  – Preis). Weisen Sie nach, dass *Dur* auch für  $n \rightarrow \infty$  endlich bleibt und geben Sie eine obere Schranke für die Duration an. (5 Pkt.)

### 4. Zinsstrukturkurve und Swaps

- a) Unter der Annahme einer flachen Zinsstrukturkurve mit Zinssatz  $i$  berechne man die Festsatzseite eines Swaps mit Laufzeit  $n = 2$ , Nominalwert des Kapitals  $N = 100$  und jährlichen Zinszahlungen (sowohl fest als auch variabel). *Hinweis:* Ermitteln Sie zunächst die Forward Rates  $f_{0,1}$  und  $f_{1,2}$ . (4 Pkt.)
- b) Gegeben sei die folgende Zinsstrukturkurve:
- | Laufzeit | Zerosatz |
|----------|----------|
| 1 Jahr   | 2,50     |
| 2 Jahre  | 3,05     |
| 3 Jahre  | 3,75     |
| 4 Jahre  | 4,10     |
- Berechnen Sie die zum Zeitraum 3 Jahre x 4 Jahre gehörige Forward Rate sowie die Spot Rate für 3 Jahre und 7 Monate. (5 Pkt.)
- c) Was versteht man unter einem Swapsatz? (2 Pkt.)
- d) Man berechne unter Zugrundelegung der in b) gegebenen Zinsstrukturkurve den Barwert sowie die Duration einer Anleihe mit Nominalwert 100, jährlichem Kupon von 6 und einer Restlaufzeit von 3 Jahren. Interpretieren Sie das Ergebnis. (6 Pkt.)
- e) Wie kann man die Risikokennzahlen der variablen Seite eines Zinsswaps ermitteln, wenn die Zinszahlungen aus dem (variablen) EURIBOR zuzüglich eines (festen) Spreads bestehen? (3 Pkt.)

# Lösungen zur Klausur „Mathematik im Investment Banking“ 7/2008

## 1. Lineare Approximation von Barwert- und Renditeänderungen

$$a) P = f(i) = \sum_{k=1}^n \frac{Z_k}{(1+i)^k}, \quad f'(i) = \sum_{k=1}^n \frac{-kZ_k}{(1+i)^k} = \frac{-1}{1+i} \sum_{k=1}^n \frac{kZ_k}{(1+i)^k}$$

$$b) \Delta P^* \approx dP^* = f'(i^*) \cdot \Delta i$$

$$c) \frac{\partial f}{\partial T} = 100 \cdot (-1) \cdot (1+i)^{-T} \cdot \ln(1+i) = -P \cdot \ln(1+i)$$

$$\text{Mit } \Delta T = -\frac{1}{360} \text{ gilt } dP = \frac{\partial f}{\partial T} \cdot \Delta T = -P \cdot \ln(1+i) \cdot \left(\frac{-1}{360}\right) = \frac{P}{360} \ln(1+i)$$

Beliebiger Zahlungsstrom = Summe von Zerobonds. Man kann folglich jedes  $k$  als  $T$  ansehen, so dass für jeden Summanden und folglich auch insgesamt dieselbe Formel gilt.

$$d) P = f(i, T) = \frac{100}{(1+i)^T} = 100 \cdot (1+i)^{-T}, \quad dP = \frac{\partial f}{\partial i}(i^*, T^*) \cdot \Delta i + \frac{\partial f}{\partial T}(i^*, T^*) \cdot \Delta T$$

$$\frac{\partial f}{\partial i} = \frac{-100T}{(1+i)^{T+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial i}(i^*, T^*) = \frac{-100 \cdot 8}{1,0465^9} = -531,42$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -P \cdot \ln(1+i) \text{ (siehe c)}, \quad \frac{\partial f}{\partial T}(i^*, T^*) = -69,53 \cdot \ln 1,0465 = -3,16$$

$$dP = -531,42 \cdot (-0,0005) - 3,16 \cdot \frac{-2}{360} = 0,2657 + 0,01756 = 0,28$$

Der Preis erhöht sich um 0,28 GE.

*Bemerkung:* Eine noch genauere Approximation ergibt sich bei Verwendung des Delta-Plus-Ansatzes, der allerdings rechenaufwändiger ist.

## 2. (No-Arbitrage-) Portfolios

Annahme: Der erste Zerobond hat eine Laufzeit von  $m$  und der zweite eine Laufzeit von  $n$ .

$$\text{a) } P = \frac{100}{(1+i)^m} + \frac{100}{(1+i)^n}, \quad D_1 = m, \quad D_2 = n, \quad w_1 = \frac{100}{P \cdot (1+i)^m}, \quad w_2 = \frac{100}{P \cdot (1+i)^n}$$

(man überprüft leicht, dass  $w_1 + w_2 = 1$  gilt)

$$\text{Direktes Berechnen der Portfolioduration: } D_{port} = \frac{1}{P} \left[ \frac{100m}{(1+i)^m} + \frac{100n}{(1+i)^n} \right]$$

Berechnung mittels barwertgewichteter Summe der Einzeldurationen (siehe oben) liefert denselben Ausdruck.

b) Es soll die Beziehung  $D_{port} = w_1 D_1 + w_2 D_2 = T$  gelten. Aus der Gleichung  $w_1 + w_2 = 1$  kann man  $w_2$  eliminieren, so dass man  $w_1 D_1 + (1 - w_1) D_2 = T$  erhält, woraus man

$$w_1 = \frac{T - D_2}{D_1 - D_2} \text{ berechnet.}$$

c) Berechne die Durationsen beider Seiten und addiere sie (unter Beachtung der Vorzeichen).

$$\text{d) Zum Beispiel mit der durationsgewichteten Portfoliorendite: } i_{port} \approx \frac{\sum_{s=1}^N D_s P_s i_s}{\sum_{s=1}^N D_s P_s}$$

e) *Bundfuture*: Kaufe eine Anleihe  $A$ , verkaufe  $F_A$  Stück Bundfuture, nimm einen Kredit in einer solchen Höhe auf, dass der Gesamtwert des Portfolios null ist.

*Put-Call-Parität*: Das Portfolio mit Gesamtwert null enthält eine verkaufte Aktie, eine verkaufte Put-Option, eine Call-Option sowie eine sicher Anlage, deren Wert am Laufzeitende gleich dem Basispreis ist.

*Einperiodenmodell nach Cox-Ross-Rubinstein*: Kaufe  $y$  Aktien, verkaufe  $x$  Aktiencalls und nimm einen Kredit in einer solchen Höhe  $L$  auf, dass der Gesamtwert des Portfolios null ist.

### 3. Immunisierung und Duration

a) Zeitwert eines Finanzprodukts zu bestimmtem Zeitpunkt ist bei beliebigen Marktziinsänderungen nicht kleiner als ein vorgegebener Wert (unempfindlich gegenüber Zinsänderungen).

b) Zeitwert:  $K_t = K_0(1+i)^t$

Berechne für  $i = i^*$  die zugehörige Duration  $D^*$ . Betrachte dann die Extremwertaufgabe

$$K_{D^*}(i) = K_0(1+i)^{D^*} \rightarrow \min_i.$$

Bilde die 1. Ableitung und zeige, dass  $i = i^*$  die notwendige Minimumbedingung erfüllt. (Noch zu zeigen: Es handelt sich wirklich um ein Minimum.)

c) Nein, die Durationen beider Seiten verändern sich im Allgemeinen auf unterschiedliche Weise, wenn sich der Marktziinssatz ändert. Begründung:

$$\text{Festsatzseite: } Dur = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{10} \frac{k \cdot p}{(1+i)^k}; \quad \text{Variable Seite: } Dur = \frac{1}{2}$$

d) Ja, da stets gilt  $Dur = n$ .

e) Wegen  $\frac{n}{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für  $q > 1$  (Exponentialfunktion strebt schneller gegen unendlich als eine

Potenzfunktion) gilt  $\frac{np + (q-in)R}{p(q^n - 1) + iR} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , so dass  $Dur \leq \frac{1+i}{i} - a$ . Wegen  $0 \leq a \leq 1$  erhält

man als obere Schranke  $Dur \leq \frac{1+i}{i}$ .

#### 4. Zinsstrukturkurve und Swaps

$$\text{a) } f_{0,1} = s_1 = i, \quad (1+i)(1+f_{1,2}) = (1+i)^2 \quad \Rightarrow \quad f_{1,2} = i$$

$$\text{Barwertvergleich: } \frac{s}{1+i} + \frac{s}{(1+i)^2} = \frac{f_{0,1}}{1+i} + \frac{f_{1,2}}{(1+i)^2} = \frac{i}{1+i} + \frac{i}{(1+i)^2} \quad s = i$$

oder Verwendung der Formel für die Swap Rate:

$$s = \frac{1-d_2}{d_1+d_2} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^2}}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2}} = \frac{(1+i)^2 - 1}{1+i+1} = \frac{i^2 + 2i}{i+2} = i$$

$$\text{b) 1. } (1+0,0375)^3 \cdot (1+f) = (1+0,0410)^4 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1,0410^4}{1,0375^3} - 1 = 0,05157 = 5,16\%$$

$$\text{2. } s_{3\frac{7}{12}} = 3,75 + \frac{7}{12} \cdot (4,10 - 3,75) = 3,95 \text{ [\%]}$$

c) Swapsatz = Festsatzseite eines Zinsswaps = Kupon einer zu 100 notierenden Anleihe mit Rückzahlung 100 bei vorgegebener Zinsstrukturkurve (wenn Swapsatz in Prozent angegeben wird)

$$\text{d) } P = \frac{6}{1,025} + \frac{6}{1,0305^2} + \frac{106}{1,0375^3} = 106,42$$

$$Dur = \frac{1}{P} \cdot \left( \frac{1 \cdot 6}{1,025} + \frac{2 \cdot 6}{1,0305^2} + \frac{3 \cdot 106}{1,0375^3} \right) = \frac{301,90}{106,42} = 2,84$$

Die Duration ist der Schwerpunkt der Barwertmassen und liegt daher stets zwischen 0 und  $n$ , meist relativ nahe zu  $n$ .

e) Teile die Zahlungen der variablen Seite auf in einen Floater und eine Rente; ermittle für beide Produkte jeweils die Risikokennzahlen und addiere diese (ggf. barwertgewichtet).