

## Klausur Mathematik im Investment Banking

Arbeitszeit: 90 Minuten

1. Eine Anleihe im Nominalwert 100 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren und 2 Monaten und halbjährlichen Kuponzahlungen in Höhe von je 2,75 habe einen Kurs (Clean Price) von 102 (Rückzahlung 100). Berechnen Sie die ISMA-Rendite der Anleihe. *6 Pkt.*
  
2. a) Geben Sie eine Formel an, die den Kurs  $P = P(i)$  einer Anleihe mit ganzzahliger Restlaufzeit in Abhängigkeit von der Rendite beschreibt und bilden Sie die 1. Ableitung dieser Funktion.  
b) Eine Anleihe besitze zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Basis Point Value von  $-0,007$  (bezogen auf einen Nominalwert von 100). Interpretieren Sie diesen Begriff. *4+2 Pkt.*
  
3. a) Was ist ein Swap? Welche Arten von Swaps sind Ihnen bekannt? Was ist eine Swap Rate? Welche Bestandteile gehören zu einer Swap-Vereinbarung?  
b) Gegeben seien die Swap Rates  $r_k$  für die Laufzeiten  $k = 1, \dots, N$ . Wie kann man daraus (allgemein) die Spot Rates  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , berechnen? Konkret: Gegeben seien die Swap Rates  $r_1 = 2,00\%$ ,  $r_2 = 2,50\%$ ; gesucht sind  $s_1, s_2$ .  
c) Gegeben sei die Zerozinskurve (Spot Rates)  $s_1 = 2,25\%$ ,  $s_2 = 2,45\%$ ,  $s_3 = 2,95\%$ . Berechnen Sie hieraus die Festsatzseite (Swap Rate) eines Kuponswaps mittels Barwertvergleich oder Formel. *4+4+4 P.*  
**Zusatz:** Man beweise die in c) verwendete Formel. *4 ZP*
  
4. a) Wie groß ist die Duration eines Zerobonds (Begründung!)?  
b) Zeigen Sie für ein Portfolio aus zwei Anleihen, dass die Duration des Portfolios gleich der barwertgewichteten Summe der Durationen der beiden Anleihen ist.  
c) Für einen beliebigen Cashflow weise man nach: Der Zeitwert des Cashflows in  $t = D$  ist bei beliebiger Marktzinsrate  $i$  niemals kleiner als der Zeitwert für die Marktzinsrate  $i_0$ , wobei die Duration  $D$  in  $t = 0$  bei gegebener Marktzinsrate  $i_0$  berechnet wurde. (**Rechnung nicht erforderlich, verbale Beschreibung genügt!**) Wie nennt man diese Eigenschaft? *2+5+4 P.*

5. Eine Aktie besitze in  $t = 0$  den Preis 100. Für  $t = 1$  seien die Schätzungen des Aktienpreises im Cox/Ross/Rubinstein-Einperioden-Binomialmodell  $P_u = 200$  bzw.  $P_d = 50$ . Welcher Call-Preis ergibt sich für einen Strike von 150 bei  $i = 0,10$ ? Wie ändert er sich, wenn der Strike höher gesetzt wird (Begründung!) Hinweis: Aus dem CRR-Modell ergibt sich die Formel

$$P_{Call} = \frac{\Delta \cdot [(1+i)P_0 - P_d]}{(1+i)(P_u - P_d)},$$

wobei  $\Delta$  der innere Wert ist.

4 P.

6. a) Die Black-Scholes-Formel zur Berechnung des Preises einer Call-Option lautet:

$$P_{Call} = P_{Aktie} \cdot \Phi(d_1) - S \cdot e^{-iT} \cdot \Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \ln \frac{P_{Aktie}}{S} + T \cdot \left( i + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right], \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Berechnen Sie den Call-Preis für die folgenden Parameter:  $P_{Aktie} = 100$ ;  $i = 0,10$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $T = 1$ ;  $S = 120$ . Beschreiben und begründen Sie ferner, wie sich der Call-Preis ändert, wenn sich der Aktienpreis erhöht bzw. wenn der Strike Price niedriger angesetzt wird.

- b) Was versteht man unter der Größe Delta? Man berechne Delta für die Parameter aus c) und interpretiere Delta. Was versteht man unter Delta-Hedging?

5+5 P.

**Zusatzaufgabe:** Was versteht man unter Delta-Gamma-Hedging?

4 ZP

7. a) Die WM AG hat für 2002 bis 2005 jeweils am 30.6. des Folgejahres folgende Dividenden pro Aktie gezahlt (in Euro): 0,37; 0,40; 0,44; 0,50. Der Aktienkurs per 1.7.2006 (also ex Dividende) betrug 19,43 Euro, der Jahresschlusskurs von 2002 war 14,99 Euro. Berechnen Sie die Jahresrendite, die sich ergibt, wenn man Dividenden und Kursgewinne berücksichtigt. Welche Rendite ergibt sich, wenn man nur die Dividenden berücksichtigt? Zur Vereinfachung der Rechnung sollen alle vier Dividendenzahlungen **als am 30.6.2006 zugeflossen** gelten.

- b) Ein Anleger, der am 1.7.2001 die in a) beschriebene Aktie gekauft hat, hatte alternativ die Möglichkeit, in eine festverzinsliche langfristige Anleihe mit 4,72% Rendite zu investieren. Man ermittle den Preis der Aktie per 1.7.2001 mit dem Dividendendiskontierungs-Modell unter der Annahme einer konstanten Dividende von 0,37 Euro, wenn der Anleger im Vergleich zur Anleihe eine zusätzliche Risikoprämie von 3,25% erwartet.

5+3 P.

## Lösungen Mathematik im Investment Banking (8/2006)

**1.** ISMA-Rendite; neue Periode: Halbjahr

Geg.:  $N = 100, P = 102, R = 102, n = 10, \tau = \frac{1}{3}, p = 2,75, \tau = \frac{1}{3}$

$$\text{Ansatz: } P + S = \frac{1}{q^{n+\tau}} \left( \frac{p}{m} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + R \right)$$

Bemerkung: Die Größe  $p = 2,75$  (halbjährlicher Kupon) entspricht im vorliegenden Fall der allgemeinen Größe  $\frac{p}{m}$ .

$$\text{Hier: } S = 100 \cdot (1 - \tau) \cdot \frac{p}{100} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2,75 = 1,83$$

$$103,83 = \frac{1}{q^{10,3333}} \left( 2,75 \cdot \frac{q^{11} - 1}{q - 1} + 100 \right)$$

Aus einem beliebigen numerischen Verfahren (z. B. lineare Interpolation oder Newton-Methode) erhält man folgende Werte:

$q$	re. S.
1,026	103,16
1,0252	103,89
1,0253	103,80

Somit gilt  $i_2 = 0,0253$  und  $i_{\text{eff}} = (1 + 0,0253)^2 - 1 = 0,05124 = 5,124\%$ .

**2.** a)  $P = P(i) = \frac{1}{q^n} \left( p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + R \right) = \sum_{k=1}^n \frac{p}{(1+i)^k} + \frac{R}{q^n}, \quad q = 1 + i$

$$\begin{aligned} P'(i) &= \sum_{k=1}^n \frac{-kp}{(1+i)^{k+1}} - \frac{nR}{q^{n+1}} \\ &= \frac{-n}{q^{n+1}} \left( p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + R \right) + \frac{1}{q^n} \cdot p \cdot \frac{(q-1)nq^{n-1} - (q^n - 1)}{(q-1)^2} \end{aligned}$$

b) Erhöht sich die Marktrendite um 1 BP = 0,01%, so verringert sich der Barwert der Anleihe (bei Nominalwert 100) um -0,007 (absolute Änderung).

**3.** a) Tausch von (meist festen gegen variable) Zinszahlungen. Bestandteile sind: Nominalbetrag, Laufzeit, Referenzzinssatz, Forward Rate (=Preis). Es gibt Kuponswaps, Basiswaps, Währungsswaps u. a.

Swap Rate = Festzinssatz (Kupon) einer zu 100% notierenden Anleihe mit gegebener Laufzeit.

b)  $s_1 = r_1, \quad s_k = \sqrt[k]{\frac{1+r_k}{1 - r_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j}} - 1, \quad d_j = \frac{1}{(1+s_j)^j}$

Speziell:  $s_2 = \sqrt{\frac{1+r_2}{1-\frac{r_2}{1+s_1}}} - 1 = \sqrt{\frac{1,025}{1-\frac{0,025}{1,02}}} - 1 = 0,02509 = 2,51\%$ .

**Oder:** Verwendung des Ansatzes

$$s_1 = r_1, \quad 1 = \frac{r_2}{1+s_1} + \frac{1+r_2}{(1+s_2)^2}$$

und Umformung nach  $s_2$ .

c) Kuponswap:  $r = \frac{1-d_m}{\sum_{k=1}^m d_k}$ . Im konkreten Fall gilt  $m = 3$ ,  $d_1 = 0,977995$ ,

$d_2 = 0,957437$ ,  $d_3 = 0,916476$ , woraus folgt:  $r = \frac{1-0,916476}{2,851908} = 0,029287 = 2,93\%$ .

Andere Herangehensweise: Barwertvergleich aller Zahlungen auf der Festsatzseite und der Zahlungen auf der variablen Seite, wobei als variable Zinssätze die (heute risikolos abzusichernden) Forward Rates eingesetzt werden.

**4.** a) Wegen  $Z_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $Z_n = 100$  und  $P = \frac{100}{(1+i)^n}$  folgt  $D = n$ .

b) Es gilt:

$$D_{portf} = \frac{1}{P_{portf}} \left( \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{n_s} \frac{kZ_{sk}}{(1+i)^k} \right) = \frac{1}{P_{portf}} \left( \sum_{k=1}^{n_1} \frac{kZ_{1k}}{(1+i)^k} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{kZ_{2k}}{(1+i)^k} \right),$$

$$P_{portf} = P_1 + P_2, \quad w_1 = \frac{P_1}{P_{portf}}, \quad w_2 = \frac{P_2}{P_{portf}},$$

$$D_1 = \frac{1}{P_1} \left( \sum_{k=1}^{n_1} \frac{kZ_{1k}}{(1+i)^k} \right), \quad D_2 = \frac{1}{P_2} \left( \sum_{k=1}^{n_2} \frac{kZ_{2k}}{(1+i)^k} \right),$$

so dass sich ergibt:

$$D_{portf} = \frac{1}{P_{portf}} \cdot (P_1 D_1 + P_2 D_2) = w_1 D_1 + w_2 D_2.$$

Das war zu beweisen.

c) Zu zeigen ist:  $K_D(i) \geq K_D(i_0)$ . Man betrachte dazu die Extremwertaufgabe  $K_D(i) \rightarrow \min$ , wobei bezüglich  $i$  minimiert wird. Man stelle die notwendigen Minimumbedingungen auf. Als eine (und – wie man mithilfe des Satzes von Descartes zeigen kann – auch einzige) Minimumstelle ergibt sich  $i_0$ . Es handelt sich um die Immunisierungseigenschaft der Duration.

**5.** Innerer Wert (für obere Schätzung):  $\Delta = P_u - S = 50$  bzw. 0 (untere Schätzung)  $P_{Call} = \frac{50 \cdot (110 - 50)}{1,10 \cdot (200 - 50)} = 18,18$ . Diesen Preis hat man zu zahlen bei einem Strike von 150.

Wird der Strike höher gesetzt, so verringert sich der innere Wert, wodurch der Callpreis niedriger wird. Andere Begründung: Die Chance, dass in  $t = 1$  der Strike überschritten wird, verringert sich, daher muss sich auch der Preis des Calls verringern.

**6.** a)  $d_1 = -0,4016$  (siehe Teil b),  $d_2 = d_1 - 0,2 = -0,6016$ ,  $\Phi(-0,4106) = 0,341$ ,  $\Phi(-0,6106) = 0,271$ ,  $P_{Call} = 100 \cdot 0,341 - 120 \cdot e^{-0,1} \cdot 0,271 = 4,6747$   
Erhöht sich der Aktienpreis, so erhöht sich auch der Callpreis, da die Chancen steigen, dass der Aktienkurs in  $T$  über dem Strike liegt (exakte Begründung: siehe b)). Wurde der Strike niedriger gesetzt, erhöht sich der Callpreis (höhere Chancen).

b) Delta ist die partielle Ableitung des Callpreises nach dem Aktienpreis (Underlying):

$$\Delta = \frac{\partial P_{Call}}{\partial P_{Aktie}} = \Phi(d_1) > 0, \quad d_1 = \frac{1}{0,2} \left[ \ln \frac{100}{120} - \left( 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 \right) \right] = -0,4016,$$

$$\Phi(-0,4106) = 1 - \Phi(0,4106) = 1 - 0,659317 = 0,341.$$

Interpretation: Wenn sich der Aktienpreis um 1 erhöht, erhöht sich der Callpreis um etwa 0,341.

Der Stillhalter (Verkäufer) einer Option muss  $\Delta$  Aktien kaufen, um (zumindest in  $t = 0$ ) perfekt abgesichert zu sein. Erhöht sich der Aktienkurs („gut“), so erhöht sich auch der Callpreis („schlecht“). Im Verhältnis 1 Option zu  $\Delta$  Aktien gleicht sich dies gerade aus.

**7.** a) Berücksichtigung von Kurs und Dividenden:

$$14,99 \cdot (1+i)^3 \left(1 + \frac{i}{2}\right) = 19,43 + 1,71 = 21,14 \quad \Rightarrow \quad i = 10,28\%$$

$$\text{bzw. } 14,99 \cdot (1+i)^{3,5} = 21,14 \quad \Rightarrow \quad i = 10,32\%$$

Bei der ausschließlichen Berücksichtigung von Dividenden ergibt sich ein relativer Wertzuwachs (aus Dividenden) von  $\frac{1,71}{14,99} = 0,114076$ .

$$\text{Ansatz: } (1+r)^{3,5} = 1 + 0,114076 \quad \Rightarrow \quad r = 3,1346\%$$

$$\text{b) } P = \frac{D_1}{i} = \frac{0,37}{0,0472 + 0,0325} = \frac{0,37}{0,0797} = 4,64$$