TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Wirtschaftsmathematik

Klausur Finanzmathematik 2/2008

1. Anika A. will ihr Geld für ein Jahr anlegen und kann sich zwischen zwei Geldanlageformen entscheiden:
a) einmalige jährliche Verzinsung mit 6 %;
b) zwölfmalige monatliche Verzinsung mit je 0,49 %.
Wofür soll sie sich entscheiden? **3 Pkt.**

2. Björn B. zahlt 20 Jahre lang vorschüssig in einen Sparplan jährlich 2000 € ein (Verzinsung 6 % p.a.) und will anschließend über 10 Jahre hinweg jeweils zu Jahresbeginn eine Rente der Höhe R erhalten (Verzinsung in der Auszahlphase: 4 % p.a.). Am Ende der Auszahlphase soll das Kapital vollständig verbraucht sein. Wie hoch ist R? **8 Pkt.**

3. Cecilie C. muss nach einem Hauskauf dem Verkäufer 20 Jahre lang den Betrag S (jeweils zu Jahresbeginn) zahlen (Kalkulationszinssatz 6 % p.a.).
a) Sie schlägt dem Verkäufer vor, einen einmaligen Betrag sofort zu zahlen. Wie viel hat sie zu zahlen?
b) Sie möchte die Gesamtsumme aller 20 Raten auf einmal bezahlen. Wann? **2+4 Pkt.**

4. Dagobert D. soll ein Darlehen von 100 000 € (Verzinsung 7 % p.a.) mittels Annuitätentilgung innerhalb von 15 Jahren tilgen.

a) Wie hoch ist die Restschuld nach 7 Jahren?
b) In welchem Jahr ist erstmals der Tilgungsbetrag höher als der zu zahlende Zinsbetrag? **2+5 Pkt.**

5. Eine Ladenkette für Elektronikerzeugnisse verspricht den Kunden: „Wir erstatten Ihnen die Mehrwertsteuer – alles ist 19 % billiger!“ Stimmt das? **4 Pkt.**

6. Ein Möbelanbieter wirbt mit folgendem Angebot: „Kaufen Sie Ihre Polstergarnitur jetzt – und zahlen Sie bequem in vier Jahresraten (jeweils zum Jahresende) bei 0 % Verzinsung.“
Welchen Rabatt räumt das Unternehmen den Kunden ein, wenn der aktuelle Marktzinssatz 6 % beträgt? **6 Pkt.**

...

7. Erika E. schließt einen Sparplan mit folgenden Konditionen ab: monatliche Einzahlungen jeweils zu Monatsbeginn von anfangs 100 €, Verzinsung 5 % p.a., Laufzeit 10 Jahre, jährliche Erhöhung der Raten um 3 %.

Über welche Summe kann Erika am Ende des 10. Jahres verfügen? **6 Pkt.**

....

8 A. Aus der Kursrechnung ist folgende Formel bekannt:

$$C = \frac{1}{q^n} \cdot \left[p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100 \right] .$$

Hierbei sind n die Laufzeit, p der Kupon (Nominalzinssatz), C der Kurs, $q = 1 + i$, wobei i die Rendite des Wertpapiers ist.

Friedolin F. kaufte das Wertpapier zu einem Kurs von 106. Welche Rendite erzielt er mit diesem Papier bei $n = 10$ und $p = 6$ (Genauigkeit der Rendite: eine Nachkommastelle)? **(Rechnung „von Hand"!)** **6 Pkt.**

oder

8 B.

a) Geben Sie den Endwert an, der sich bei Zahlung eines im Intervall [0,2] zahlbaren kontinuierlichen Zahlungsstroms der Höhe $r(t) = 5$ ergibt, wobei stetige Verzinsung mit der Zinsintensität i unterstellt wird.

b) Was ergibt sich speziell für $i = 0,05$? **5+1 Pkt.**

....

Zusatz. Ein Schuhgeschäft wirbt mit folgendem Angebot: „Beim Kauf von zwei Paar Schuhen erhalten Sie das billigere Paar für 50 %; beim Kauf von drei Paar Schuhen gibt es das billigste Paar umsonst." Wie viel kann Frau S. Näppchen-Jäger maximal sparen? **3 ZP.**

....

Nur für Wirtschaftsmathematiker:

Es ist gesetzlich erlaubt, von degressiver zu linearer Abschreibung überzugehen. Wann ist dafür der optimale Zeitpunkt? (Begründen und berechnen!)

Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Sachverhalt an. **6 Pkt.**

Lösungen zur Klausur Finanzmathematik 2/2008

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) $K_1 = K_0(1+0,06) = 1,06K_0$; b) $K_1 = K_0(1+0,0049)^{12} = 1,0604K_0$
Variante b) ist besser.

$\boxed{\textbf{2.}}$ $E_{20} = 2000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{20}-1}{0,06} = 77985,44$

Endwert der Sparphase ist gleich Barwert der Auszahlungsphase:

$$E_{20} = B_{10} = R \cdot \frac{1,04^9 - 1}{1,04^{10} \cdot 0,04}$$

$$\implies \quad R = 77985,44 \cdot \frac{1,04^9 \cdot 0,04}{1,04^{10}-1} = 9245,10$$

Björn erhält jährlich 9245,10 €.

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) $B = S \cdot \frac{1,06^{20}-1}{1,06^{19} \cdot 0,06} = 12,158 \cdot S$

b) $G = 20 \cdot S$; $\quad B = \frac{G}{1,06^t}$

$$\implies \quad 12,158S = \frac{20S}{1,06^t} \quad \implies \quad 1,06^t = \frac{20}{12,158} = 1,645$$

$$\implies \quad t = \frac{\ln 1,645}{\ln 1,06} = 8,54$$

Nach etwa $8\frac{1}{2}$ Jahren ist die Gesamtsumme von $20S$ zu zahlen.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Annuität: $A = S_0 \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1} = 100000 \cdot \frac{1,07^{15} \cdot 0,07}{1,07^{15}-1} = 10979,46$

a) $S_7 = S_0 \cdot q^7 - A \cdot \frac{q^7-1}{q-1} = 100000 \cdot 1,07^7 - 10979,46 \cdot \frac{1,07^7-1}{0,07} = 65561,70$ [€]

b) $T_k = T_1 \cdot q^{k-1}$, $Z_k = A - T_1 \cdot q^{k-1}$

Aus dem Ansatz $Z_k = T_k$ ergibt sich:

$$A = 2T_1 \cdot q^{k-1} \quad \implies \quad q^{k-1} = \frac{A}{2T_1} = \frac{10979,46}{2 \cdot 3979,46} = 1,379516$$

$$\implies \quad k-1 = \frac{\ln 1,379516}{\ln 1,07} = 4,75 \quad \implies \quad k = 5,75$$

Im 6. Jahr ist der Tilgungsbetrag erstmals höher als der Zinsbetrag.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Nein, das ist nicht richtig. Aus dem Ansatz $\frac{1}{1,19} = 1 - a$ ergibt sich $a = 0,15966 \approx 16\,\%$. Der Rabatt beträgt lediglich 16 %.

$\boxed{\textbf{6.}}$ a – Rabatt, S – Kaufsumme; Ansatz (Barwertvergleich):

$$(1-a)S = \frac{S}{4} \cdot \frac{q^4 - 1}{q^4 \cdot (q-1)}$$

Daraus ergibt sich: $a = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1,06^4 - 1}{1.06^4 \cdot 0,06} = 0,1337 = 13,37\,\%$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Endwertformel der dynamischen Rente: $E = R \cdot \frac{q^n - b^n}{q - b}$

Jahresersatzrate: $R = 100(12 + 6,5 \cdot 0,05) = 1232,50$

Dies ergibt: $E = 1232,50 \cdot 14,24895 = 17561,83$ (€)

$\boxed{\textbf{8 A.}}$ Die Lösung der Gleichung $106 = \frac{1}{q^{10}}\left(6 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} + 100\right)$ muss mittels eines numerischen Näherungsverfahrens ermittelt werden, z. B. wie folgt:

q	rechte Seite
1,04	116,22
1,05	107,72
1,06	100
1,052	106,1
1,053	105,33

Man kann erkennen, dass die Rendite 5,2 % beträgt.

$\boxed{\textbf{8 B.}}$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 r(t)\mathrm{e}^{(2-t)i}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 5\mathrm{e}^{(2-t)i}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\tfrac{5}{i}\mathrm{e}^{(2-t)i}\right]_0^2 = \tfrac{5}{i}\left[\mathrm{e}^{2i} - 1\right] = 10,517 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Zusatz.}}$ Die maximale Einsparung liegt bei 33 %, wenn man drei Paar gleich teurer Schuhe kauft.

$\boxed{\textbf{Für Wirtschaftsmathematiker}}$ Wähle k so, dass $w_k^{\text{degr.}} \le w_k^{\text{lin}}$.

$$A\left(1 - \frac{s}{100}\right)^{k-1} \cdot \frac{s}{100} \overset{!}{=} \frac{R_k}{n-k+1} = \frac{A\left(1 - \frac{s}{100}\right)^{k-1}}{n-k+1}$$

$$\frac{s}{100} = \frac{1}{n-k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad k = n + 1 - \frac{s}{100}$$

Ist k ganzzahlig, so gehe in Periode k zu linearer Abschreibung über, ist k gebrochen, so runde ab. Bis $\lfloor k \rfloor$ ist degressiv abzuschreiben, danach linear.