Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Luderer

Februar 2006

Klausur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (Algebra)

- **Arbeitszeit: 90 Minuten**
- Füllen Sie diese Seite sorgfältig aus. Legen Sie am Ende die sortierten Lösungsblätter in diese Mappe.
- Schreiben Sie jede Aufgabe auf ein separates Blatt; mehrere Blätter pro Aufgabe sind möglich.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut leserlich** Ihren Namen sowie die Aufgabennummer.
- Der Lösungsweg muss stets erkennbar sein.

Vorname Name	Platz-Nr.

Ich habe außer dieser Mappe [   ] Blätter abgegeben.

Bitte bewerten Sie die folgenden angekreuzten Aufgaben (bei Wahlmöglichkeit jeweils nur eine):

1A	oder	**1B**
	2	
	3	
4A	oder	**4B**
5A	oder	**5B**
6A	oder	**6B**
Zusatz A	oder	**Zusatz B**

1 A. (Lineares Gleichungssystem – Gauß'scher Algorithmus)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & = & \frac{5}{2} \end{array}$$

b) Geben Sie eine spezielle Lösung des obigen LGS an.

c) Geben Sie eine spezielle Lösung des zugehörigen homogenen LGS an.

d) Zeigen Sie, dass der Vektor $(-4, 0, -3, 3)^\top$ keine Lösung des obigen LGS ist.

6+1+1+2 P.

$\boxed{\textbf{oder}}$

1 B. (Inverse Matrix)

a) Berechnen Sie – sofern existent – die Inverse zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

b) Welchen Rang besitzt die Matrix A?

c) Geben Sie zwei linear unabhängige Spalten an und begründen Sie Ihre Wahl.

d) Ist der Vektor $(6, 2, -7)^\top$ eine Linearkombination der beiden Vektoren $(2, 2, 3)^\top$ und $(-4, -2, 2)^\top$? **4+2+2+2 P.**

....

2 (Lineare Optimierung)

Weisen Sie nach, dass der Zielfunktionswert der folgenden linearen Optimierungsaufgabe unbeschränkt wachsen kann, indem Sie **eine geeignete** der folgenden Methoden verwenden:

- Simplexmethode
- Modellierung
- Angabe einer Richtung (mit Nachweis der benötigten Eigenschaften)
- Dualitätssätze
- grafische Lösung mit Angabe einer Richtung

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \to & \max \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

8 P.

3 (Matrizenmultiplikation – Leontiefmodell)

In einem Betrieb werden die Produkte E_1, E_2 und E_3 hergestellt, wozu die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 (in gewissen Mengeneinheiten) wie in der linken Tabelle beschrieben benötigt werden. Außerdem verbraucht der Betrieb einen Teil seiner Produktion selbst (siehe rechte Tabelle):

	R_1	R_2	R_3
je Einheit E_1	2	3	5
je Einheit E_2	2	2	0
je Einheit E_3	3	4	2

	E_1	E_2	E_3
je Einheit E_1	1/2	0	1/2
je Einheit E_2	1/4	0	1/2
je Einheit E_3	1/4	1/2	0

Die zu befriedigende Nachfrage an E_1, E_2 und E_3 betrage 30, 75 bzw. 45 Mengeneinheiten.

a) Wie viele Produkte E_1, E_2 und E_3 müssen (inklusive Eigenverbrauch) tatsächlich produziert werden, um die angegebene Nachfrage befriedigen zu können?

b) Welche Mengen an Rohstoffen R_1, R_2 sowie R_3 werden dafür benötigt? **6+2 P.**

. . . .

4 A. (Finanzmathematik – Renditeberechnung)

> „Im vergangenen Jahr hatte ich bei ihr einen halben Hunderter geborgt, und jetzt zahle ich ihr jeden Monat einen Rubel.“
>
> *A. Tschechow: ≪Mein Leben – Die Erzählung eines Provinzbewohners≫*

Nehmen Sie unterjährig lineare Verzinsung an und berechnen Sie den Effektivzins dieser Finanzierungsvereinbarung unter der Annahme, dass

a) keine Tilgung erfolgt,

b) die Schuld in 5 Jahren getilgt wird. (Geforderte Genauigkeit in b): ganze Prozent). **4+4 P.**

oder

4 B. (Finanzmathematik – Renditeberechnung)

Ein Versandhaus bietet ein portables Computersystem zum Preis von 279,99 € an. Alternativ wird ein Ratenzahlungsangebot offeriert. Dabei müssen 12 Raten à 24,90 € monatlich nachschüssig gezahlt werden. Das Versandhaus gibt die Effektivverzinsung mit 12,88 % an.

Weisen Sie nach, dass der angegebene Effektivzinssatz korrekt nach der Preisangabenverordnung berechnet wurde. **8 P.**

5 A. (Investitionsrechnung) Ein Biotech-Unternehmen erwägt eine Investition, die innerhalb der nächsten drei Jahre folgende Einnahmen und Ausgaben verspricht (in Mio. Euro):

Zeitpunkt	Ausgaben	Einnahmen
12/2005	36	0
12/2006	6	12
12/2007	8	22
12/2008	10	32

a) Begründen Sie, dass bei einem sehr kleinen Kalkulationszinssatz die Investition lohnend ist.

b) Weisen Sie nach, dass die Investition nur **einen** internen Zinsfuß besitzt (Tipp: Satz von Descartes).

c) Berechnen Sie den internen Zinsfuß (Genauigkeit: 1 Nachkommastelle) mit Hilfe des Newtonverfahrens. **3+3+4 P.**

oder

5 B. (Finanzmathematik – Kursrechnung)

Mit der Formel $C = \frac{1}{q^n}\left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + 100\right)$ lässt sich der Kurs einer Anleihe (mit Restlaufzeit n und Kupon p) berechnen. Es gelte $n = 10$, $p = 6$.

a) Für $q = 1,07$ berechne man C (Genauigkeit: 2 Nachkommastellen).

b) Für $C = 98$ berechne man q (Genauigkeit: 4 Nachkommastellen) mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens (**Lösung mittels eines programmierbaren Taschenrechners bringt keine Punkte!**).

c) Was versteht man unter den Begriffen *unter pari* und *über pari*? **2+6+2 P.**

....

6 A. (Zahlenfolgen und Zahlenreihen)

Gegeben sei die Zahlenfolge $a_1 = 2$, $a_2 = 10$, $a_3 = 50$, $a_4 = 250$, $a_5 = 1250$, ...

a) Man gebe das allgemeine Glied a_n der Zahlenfolge an.

b) Um welchen Typ einer Zahlenfolge handelt es sich?

c) Von welcher Zahl n ab sind die Glieder der Zahlenfolge größer als 1 Million?

d) Von welcher Zahl n ab ist die Summe der ersten n Glieder größer als 1 Milliarde? (In Aufgabe d) gilt Probieren **nicht** als Lösungsweg!) **2+2+3+3 P.**

oder

6 B. (Lösungsmenge einer Betragsungleichung)

a) Man finde alle Lösungen der Ungleichung

$$|2x - 1| \leq x + 3. \qquad (*)$$

b) Man zeige, dass $x = 5$ keine Lösung der Ungleichung $(*)$ ist.

c) Man stelle die Funktionen $f(x) = |2x - 1|$ und $g(x) = x + 3$ in einem Koordinatensystem grafisch dar und bestätige das in a) erzielte Ergebnis. **5+1+4 P.**

Zusatz A

Ein Einkaufsmarkt verspricht seinen Kunden, auf jeden Einkauf die Mehrwertsteuer zu erstatten. Wie viel Rabatt gewährt der Einkaufsmarkt seinen Kunden?

4 ZP

oder

Zusatz B

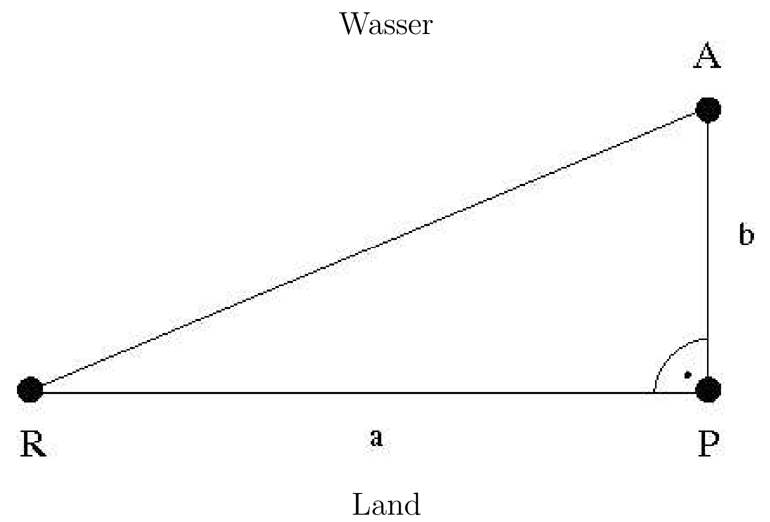
Ein Rettungsschwimmer steht unmittelbar am Ufer von Malibu (Punkt R) und sieht im Wasser die zu rettende Pamela A. (Punkt A). Die Entfernung von Punkt R zu Punkt P am Ufer beträgt a, die Entfernung von A zu P beträgt b. Der Rettungsschwimmer kann doppelt so schnell laufen wie schwimmen.

a) Wie soll er sich verhalten, wenn er so schnell wie möglich bei Pamela A. sein will?

b) Wie würde sich ein Rettungshund verhalten?

c) Wie würde die Lösung aussehen, wenn der Rettungsschwimmer zwar sehr, sehr schnell laufen, aber nicht allzu schnell schwimmen kann?

d) Wie würde die Lösung aussehen, wenn der Rettungsschwimmer genau so schnell schwimmen wie laufen kann?



7+1+1+1 ZP

Lösungen zur Klausur Algebra 2/06

1 A

a)

x_1	x_2	x_3	x_4	$r.S.$
2	2	−1	3	4
−2	4	3	4	−1
2	−1	−2	−1/2	5/2
1	1	−1/2	3/2	2
0	6	2	7	3
0	−3	−1	−7/2	−3/2
1	0	−5/6	1/3	3/2
0	1	1/3	7/6	1/2
0	0	0	0	0

Allgemeine Lösung:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

b) z.B.: $(3/2, 1/2, 0, 0)^\top$

c) z.B.: $(0, 0, 0, 0)^\top$ oder $(5/6, -1/3, 1, 0)$

d) Der gegebene Vektor erfüllt nur die erste Gleichung.

1 B a)

2	−4	6	1	0	0
2	−2	2	0	1	0
3	2	−7	0	0	1
1	−2	3	1/2	0	0
0	2	−4	−1	1	0
0	8	−16	−3/2	0	1
1	0	−1	−1/2	1	0
0	1	−2	−1/2	1/2	0
0	0	0	5/2	−4	1

Die gegebene Matrix ist nicht invertierbar.

b) rang $(A) = 2$; Begründung: Wegen det $A = 0$ gilt rang $(A) < 3$. Ferner hat die entstandene Einheitsmatrix die Ordnung 2.

c) Beispielsweise die ersten beiden Spalten, da bei diesen Spalten eine Einheitsmatrix der Ordnung 2 entstand.

d) Ja, denn sonst wäre A invertierbar.

Andere Begründung: $1\cdot$ (1. Spalte) $+2\cdot$ (2. Spalte) $+1\cdot$ (3. Spalte) $= \mathbf{0}$ bzw. 3. Spalte $= -1\cdot$ (1. Spalte) $-2\cdot$ (2. Spalte)

$\boxed{\mathbf{2}}$ Modellierung ist offenbar keine geeignete Lösungsmethode.

1.) Angabe einer Richtung:

Der Strahl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$, ist eine zulässige Richtung, in der der Zielfunktionswert wächst. Durch Einsetzen in Nebenbedingungen und Zielfunktion lassen sich die Eigenschaften nachweisen:
ZF: $3 + 2t \to \infty$ für $t \to \infty$; NB: $1 - 2t \leq 2$, $1 + \frac{1}{2}t \geq 1 \quad \forall t \geq 0$
NNB: offensichtlich erfüllt

2.) Simplexmethode

Nach Überführung in Normalform und anschließender Formulierung einer Phase-I-Aufgabe ergibt sich folgendes Tableau:

BV	c_B	x_1	x_2	u_1	u_2	v	x_B	Θ
		0	0	0	0	-1		
u_1	0	-2	1	1	0	0	2	2
v	-1	$1/2$	$\boxed{1}$	0	-1	1	1	1
Δ		$-1/2$	-1	0	1	0	-1	
u_1	0	$-5/2$	0	1	1	-1	1	
x_2	0	$1/2$	1	0	-1	1	1	
Δ		0	0	0	0	1	0	
Phase II								
		2	3	0	0	–		
u_1	0	$-5/2$	0	1	$\boxed{1}$	–	1	1
x_2	3	$1/2$	1	0	-1	–	1	–
Δ		$-1/2$	0	0	-3	–	3	–
u_2	0	$-5/2$	0	1	1	–	1	
x_2	3	-2	1	1	0	–	2	
Δ		-8	0	3	0	–	6	

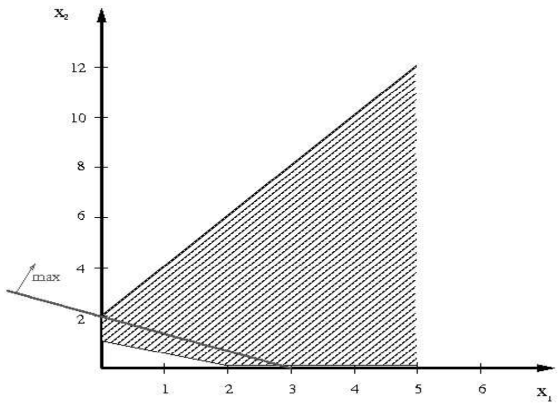
Spalte x_1 liefert die gewünschte Aussage: Die OA hat einen unbeschränkt wachsenden ZF-Wert.

3.) Dualität Die duale Aufgabe zur gegebenen OA ist:

$$\begin{array}{rcrcr} 2y_1 & + & y_2 & \to & \min \\ -2y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & \geq & 2 \\ y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\ & & y_1 & \geq & 0 \\ & & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Aufgrund der Vorzeichenbeschränkungen kann die erste NB niemals erfüllt sein. Die Duale besitzt folglich keine zulässigen Lösungen. Da es in der primalen Aufgabe zulässige Lösungen gibt (z. B. ist $(0,1)^\top$ zulässig, wie man durch „scharfes Hinsehen“ sieht), ist der Optimalwert der Primalen $+\infty$.

4.) Grafische Lösung



$\boxed{3}$ Es seien A die linke, B die rechte Tabelle und d der Vektor des zu deckenden Bedarfs.

a) Der gesuchte Gesamtproduktionsvektor g ergibt sich als

$$g = (E - B^\top)^{-1} \cdot d = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4/3 & 2 & 4/3 \\ 8/3 & 2 & 8/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 75 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 250 \\ 350 \end{pmatrix}.$$

b) Der Vektor der benötigten Rohstoffe ergibt sich als $A^\top g = (2270, 2980, 2500)^\top$.

$\boxed{\mathbf{4\ A}}$ a) Ohne Tilgung, nur Zinszahlung:

$$Z = 1 \cdot (12 + 5,5 \cdot i) = 50i$$

Hieraus ergibt sich nach kurzer Umformung $i = 0,26966 = 26,97\,\%$.

b) Tilgung innerhalb von 5 Jahren:
Die Annuität lautet $A = 1 \cdot (12 + 5,5 \cdot i)$. Aus der Beziehung

$$S_0 = 50 = A \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = (12 + 5,5i) \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 \cdot i}$$

ergibt sich mit Hilfe eines beliebigen numerischen Näherungsverfahrens der Wert $i = 0,77 = 7,7\,\%$.

i	rechte S.
0,05	53,14
0,10	47,57
0,09	48,60
0,07	50,78
0,074	50,33
0,077	49,998

$\boxed{\textbf{4 B}}$ Zunächst kann der gegebene Effektivzinssatz auf den äquivalenten monatlichen Zins umgerechnet werden: $q_* = 1,1288^{1/12} = 1,010147$. Als Barwert (und damit Kaufpreis) des Computersystems ergibt sich

$$BW = \frac{24,9}{q_*^{12}} \cdot \frac{q_*^{12} - 1}{q_* - 1} = 279,99.$$

Das entspricht genau dem gegebenen Preis. Die angegebene Effektivverzinsung ist also korrekt nach PAngV berechnet worden.

$\boxed{\textbf{5 A}}$ a) Die Summe aller Cash Flows ist positiv (gleich 6). Bei Zinssätzen von $i \approx 0$ gilt dies auch für den Barwert.

b) Die Folge der Cash Flows enthält genau einen Vorzeichenwechsel. Daher existiert genau eine reelle Nullstelle.

c) $p_{\text{eff}} = 6,74\%$

$\boxed{\textbf{5 B}}$ a) $C = 92,9764\ldots \approx 92,98$

b) $p_{\text{eff}} = 6,2753\,\%$

c) Ein Wertpapier wird unter (über) pari genannt, wenn sein Kurs unter (bzw. über) 100 liegt.

$\boxed{\textbf{6 A}}$ a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

b) geometrische, monoton wachsende Zahlenfolge

c)
$$\begin{aligned} 2 \cdot 5^{n-1} &> 1000000 \\ 5^{n-1} &> 500000 \\ (n-1)\ln 5 &> \ln 500000 \\ n &> \frac{\ln 500000}{\ln 5} + 1 \\ n &> 9,153 \end{aligned}$$

Es gilt also: Ab dem 10. Glied sind die Glieder der Zahlenfolge größer als 1 Million. (Übrigens: Man kann auch einfach probieren.)

d) $s_n = 2 \cdot \dfrac{5^n - 1}{5 - 1} = \dfrac{1}{2}(5^n - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(5^n - 1) &> 1000000000 \\ 5^n - 1 &> 2000000000 \\ 5^n &> 2000000001 \\ n &> \frac{\ln 2000000001}{\ln 5} = 13,307 \end{aligned}$$

Es gilt also: Ab dem 14. Glied ist die Summe der ersten n Glieder größer als 1 Milliarde. Speziell: $s_{14} = 3,0518 \cdot 10^9 \approx 3$ Milliarden, $s_{13} = 6,1035 \cdot 10^8$.

$\boxed{\textbf{6 B}}$

a)

Fall 1: $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

$2x - 1 \leq x + 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x \leq 4} \qquad\qquad L_1 = [\frac{1}{2}, 4]$

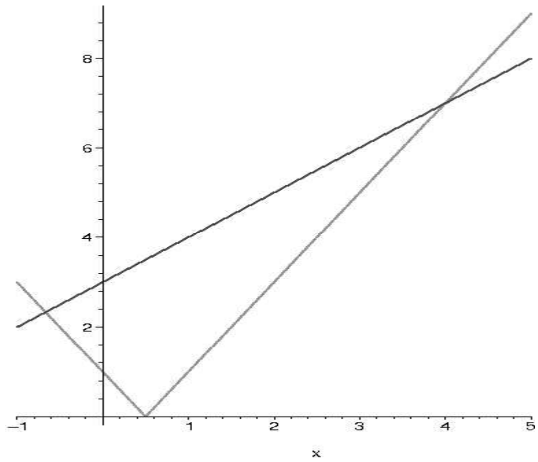
Fall 2: $\boxed{x \leq \frac{1}{2}}$

$-2x + 1 \leq x + 3 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leq 3x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x \geq -\frac{2}{3}} \qquad\qquad L_2 = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$

Gesamtlösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$

b) $|2 \cdot 5 - 1| = 9 \not\leq 8$

c)



$\boxed{\textbf{Zusatz A}}$

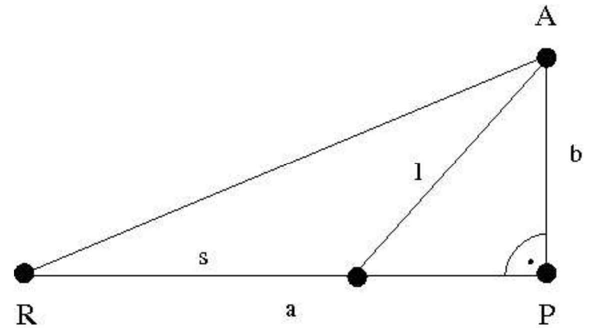
r	–	Rabattsatz (in Prozent)
m	–	Prozentsatz der Mehrwertsteuer ($m = 16$)
P	–	Preis des Produkts

$$\frac{P}{1 + \frac{m}{100}} = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{r}{100} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{m}{100}} = \frac{\frac{m}{100}}{1 + \frac{m}{100}}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{m}{1 + \frac{m}{100}} = \frac{16}{1,16} = 13,79$$

Das Unternehmen gewährt den Kunden einen Rabatt von 13,79 %.

Zusatz B



a) Geg.: $a, b; v$ Ges.: s

Zunächst gilt: Geschwindigkeit = Weg : Zeit bzw. Zeit = Weg : Geschwindigkeit.

Ferner gilt: $l = \sqrt{b^2 + (a-s)^2}$.

Schließlich muss für ein sinnvolles Modell gelten: $0 \leq s \leq a$.

Zielfunktion: $t = t_1 + t_2 = \dfrac{s}{2v} + \dfrac{l}{v} \to \min$

$$f(s) = \frac{s}{2v} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-s)^2}}{v} \to \min$$

$$f'(s) = \frac{1}{v}\left[\frac{1}{2} + \frac{-2(a-s)}{2\sqrt{b^2 + (a-s)^2}}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

Aus der Beziehung $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a-s}{\sqrt{b^2 + (a-s)^2}}$ ergibt sich nach kurzer Umformung

$$s = a - \frac{b}{\sqrt{3}}$$

(die zweite Lösung $s = a + \frac{b}{\sqrt{3}}$ entfällt wegen der Forderung $0 \leq s \leq a$). Diese Beziehung gilt nur, solange $s \geq 0$ ist. Für negative Werte ist $s = 0$ zu setzen (sofort schwimmen).

b) Ein Rettungshund verhält sich instinktiv richtig und rennt zunächst eine Strecke am Strand entlang, ehe er ins Wasser springt.

c) Am Strand bis (fast) zum Punkt P laufen, erst dann schwimmen.

d) Direkt vom Punkt R aus losschwimmen.