

1A. (Kurvendiskussion)

Es werde die Funktion $f(x) = e^{-2x+3} + ax$ betrachtet, wobei a eine beliebige reelle (unbekannte, aber feste) Zahl sei (Parameter).

- a) Für welche Werte von a besitzt f ein (lokales) Minimum?
- b) Wie lautet das Minimum von f bei $a = 2$?
- c) Es gelte $a < 0$. In welchen Bereichen ist f monoton wachsend oder fallend?
- d) Ist die Funktion für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ konvex oder konkav?

5+2+2+1 P.

Zusatz: Man zeige, dass für $x \rightarrow \infty$ die Gerade $g(x) = ax$ Asymptote von f ist.

2 ZP

oder

1B. (Kurvendiskussion)

Führen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(7 + x - x^2)$ eine Kurvendiskussion durch (Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Skizze).

10 P.

Zusatz: Man zeige, dass für $x \rightarrow \infty$ die Gerade $g(x) = ax$ Asymptote der Funktion $f(x) = e^{-2x+3} + ax$ ist.

2 ZP

.....

2. (Eigenschaften einer Funktion)

Die Funktion $y = f(t) = \frac{100}{1 + 19e^{-2t}}$ dient als spezielle *logistische* Funktion zur Beschreibung von Sättigungsprozessen (z. B. Ausstattungsgrad der Arbeitszimmer mit modernen Computern in Prozent).

- a) Wie viel Prozent der Zimmer waren zur Zeit $t = 0$ mit modernen Computern ausgestattet?
- b) Weisen Sie das streng monotone Wachstum von f nach.
- c) Approximieren Sie die Funktion f im Punkt $\bar{t} = 2$ linear (durch ihre Tangente).

2+3+3 P.

.....

3. (Homogenität)

Es werde die Funktion $p(x, y) = \sqrt{xy}$ (für $x \geq 0, y \geq 0$) betrachtet.

- a) Weisen Sie nach, dass die Funktion p homogen ist. Von welchem Grad?
- b) Geben Sie die Gleichung der Niveaulinie von p zum Niveau $c = 2$ an und skizzieren Sie die Niveaulinie.
- c) Zeigen Sie, dass der Punkt $(2,2)$ auf dieser Linie liegt.

2+3+1 P.

4A. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2} \cdot y^2 - 3y$, wobei a ein (unbekannter) Parameter ist, von dem nur bekannt sei, dass $a < -1$ gilt.

- a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f .
- b) Wählen Sie unter diesen mittels hinreichender Optimalitätskriterien diejenigen aus, in denen f ein lokales Extremum besitzt.

6+4 P.

oder

4B. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Eine Unternehmung hat die Lieferung dreier Produkte zu einem bestimmten Termin in den Mengen 10, 20 und 30 Mengeneinheiten (ME) vereinbart. Davon nach unten oder oben abweichende Ausbringungsmengen x_1, x_2 bzw. x_3 ME verursachen Kosten (Lagerkosten, Zinsen usw.), die proportional zum Quadrat der Abweichung von den Vereinbarungen wachsen. Ferner betragen die Herstellungskosten je ME der drei Produkte 5, 10 bzw. 3 Geldeinheiten. Der Geschäftsführer will daher folgende Gesamtkostenfunktion minimieren:

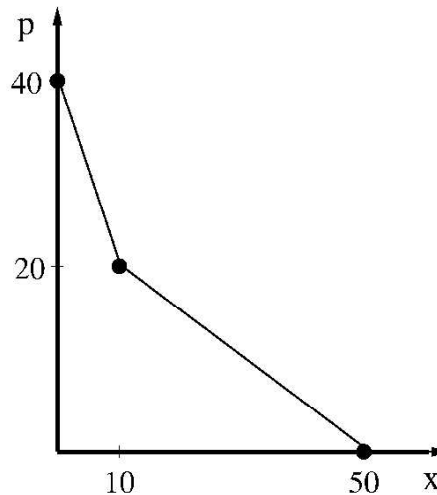
$$K = 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + (10 - x_1)^2 + 5(20 - x_2)^2 + 2(30 - x_3)^2.$$

- a) Bei welchen Werten von $x_i, i = 1, 2, 3$, werden minimale Gesamtkosten erreicht? (Der Nachweis des Vorliegens eines Minimums kann auch durch verbale Begründung erfolgen.)
- b) Aus technologischen Gründen müssen die Ausbringungsmengen ganzzahlig sein. Wie sind die in a) berechneten Werte zu ändern und warum?

7+3 P.

5A. (Preis-Absatz-Funktion) Gegeben sei eine (geknickte) Preis-Absatz-Funktion $p = f(x)$ (siehe Abb.).

- a) Geben Sie die mathematische Darstellung für $f(x)$ an. (Achtung: Die Funktion ist abschnittsweise definiert!)
- b) Geben sie die mathematische Darstellung der Erlösfunktion $E = g(x)$ an (Erlös = Umsatz).
- c) Die Gesamtkostenfunktion des Monopolisten sei $K(x) = 100 + 4x$. Man ermittle die Gewinnzone des Monopolisten.

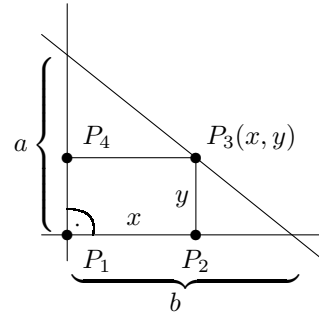


3+2+5 P.

oder

5B. (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

Ein dreieckiges Grundstück soll mit einem Gebäude von maximaler rechteckiger Grundfläche bebaut werden. Das Grundstück ist an einer rechtwinkligen Wegkreuzung gelegen (s. Abb.); die Seitenlängen a und b des Dreiecks sind gegeben.



- a) Für welche Seitenlängen x und y ergibt sich eine maximale Grundfläche? (Hinweis: Bestimmen Sie eine Gleichung, der die Koordinaten des Punktes P_3 genügen müssen, indem Sie ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in P_1 einführen und beachten, dass P_3 auf der schrägen Geraden liegt.)
- b) Wie groß ist die maximale Gebäudegrundfläche, wenn die Seitenlängen des Grundstücks $a = 16$ m und $b = 24$ m betragen?

8+2 P.

6A. (MKQ)

Der Bücherbestand einer Universitätsbibliothek (in Tausend Bestandseinheiten) entwickelte sich wie folgt:

2001	2002	2003	2004	2005
200	260	310	360	400

- a) Stellen Sie die statistischen Daten grafisch dar.
- b) Mit welchem Bestand ist – bei etwa gleicher Erwerbungspolitik – für das Jahr 2008 zu rechnen? Verwenden Sie für Ihre Rechnung **einen beliebigen** der nachfolgenden beiden Ansätze

(1) $l(t) = a_1 + a_2t$, (2) $h(t) = a + \frac{b}{t+3}$.

- c) Erörtern Sie Vor- und Nachteile der Ansätze (1) und (2) und schätzen Sie die Verlässlichkeit der Prognose ein.

2+6+2 P.

oder

6B. (MKQ)

Bei der Untersuchung eines mikroelektronischen Bauteils tritt folgendes Problem auf: Für einige wenige (aber bei weitem nicht für alle!) Werte zweier Einflussgrößen x und y kann (im Ergebnis sehr teurer Versuche) eine Ausgangsgröße z gemessen werden. In der nebenstehenden Tabelle sind die Ergebnisse von vier verschiedenen Messungen angegeben.

Um eine den Inputs $\bar{x} = 0,5$ und $\bar{y} = 0,5$ entsprechende Schätzung \bar{z} des Wertes z zu erhalten, soll der unbekannte funktionelle Zusammenhang $z = f(x, y)$ durch die lineare Funktion zweier Veränderlicher $g(x, y) = a + bx + cy$ angenähert werden.

i	x_i	y_i	z_i
1	1	1	6
2	1	0	3
3	0	1	4
4	0	0	2

a) Wie sind die Parameter a, b, c zu wählen, damit diese Näherung möglichst gute Eigenschaften (im Sinne eines Minimums der Summe der Quadrate der Abweichungen von den Messwerten) besitzt?

b) Welcher Wert $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ ergibt sich bei einer solchen Wahl der Parameter? **8+2 P.**

.....

ZUSATZ A

Man berechne die uneigentlichen Integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ und $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} dx$. **4 P.**

oder

Zusatz B

Vegetarische Lebensweise ist ansteckend! Je höher die Zahl der Mensabesucher, die sich für Gericht 4 „Vegetarisches Allerlei“ entscheiden, umso mehr Studierende und Mitarbeiter schließen sich dieser Auswahl an. Es bezeichne $y(t)$ die Anzahl der Mensabesucher, die sich zum Zeitpunkt t für das vegetarische Gericht entschieden haben, und $y'(t)$ beschreibe deren Veränderung (Zuwachs). Zum Zeitpunkt $t = 0$ hatten sich bereits 25 Personen für Gericht 4 entschieden. Mit welcher Personenzahl ist bei $t = 2$ zu rechnen, wenn der Proportionalitätsfaktor zwischen Zuwachs und Anzahl an „Vegetariern“ 0,55 beträgt? Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf und lösen Sie diese. **5 P.**

Lösungen zur Klausur Analysis 8/06

1A.

$$f(x) = e^{-2x+3} + ax; \quad f'(x) = -2e^{-2x+3} + a; \quad f''(x) = 4e^{-2x+3}$$

a) $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \implies 2e^{-2x+3} = a \implies -2x + 3 = \ln \frac{a}{2} \implies x_E = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}$

Diese Lösung ist nur für $a > 0$ definiert. Wegen $f''(x) = 4e^{-2x+3} > 0 \forall x$ liegt bei $a > 0$ in x_E ein lokales Minimum vor.

b) Für $a = 2$ ergibt sich aus Teil a) sofort $x_E = \frac{3}{2}$.

c) Ist $a < 0$, so sieht man aus $f'(x) = -2e^{-2x+3} + a < 0$, dass die Funktion f monoton fallend über der gesamten Zahlengeraden ist.

d) Wegen $f''(x) = 4e^{-2x+3} > 0$ für beliebiges x handelt es sich bei f (unabhängig vom Parameter a) um eine konvexe Funktion.

Zusatz: Zu zeigen ist: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Wegen $f(x) - g(x) = e^{-2x+3}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x+3} = 0$ ist dies erfüllt, d. h., die Funktion $g(x) = ax$ ist Asymptote der Funktion $f(x)$.

1B.

Es gilt $f(x) = \ln(7 + x - x^2)$, $f'(x) = \frac{1-2x}{-x^2+x+7}$, $f''(x) = \frac{-2x^2+2x-15}{(-x^2+x+7)^2}$.

Definitionsbereich: Die Funktion ist zwischen den Nullstellen der Funktion $g(x) = 7 + x - x^2$ definiert (da dort $g(x) > 0$ gilt), folglich gilt die Beziehung $D(f) = \{x \mid \frac{1}{2}(1 - \sqrt{29}) < x < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{29})\}$; dies ist das Intervall $(-2, 193; 3, 193)$.

Nullstellen: Die Gleichung $\ln(7 + x - x^2) = 0 \iff 7 + x - x^2 = 1$ führt auf $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{25})$, d. h. $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

Extrema: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ liefert den stationären Punkt $x_E = \frac{1}{2}$. Wegen der Beziehung $f''(x_E) = \frac{-14,5}{7,25^2} < 0$ ist dies eine lokale (und sogar globale, s. Abb.) Maximumstelle mit $f(x_E) = \ln 7,25 \approx 1,981$.

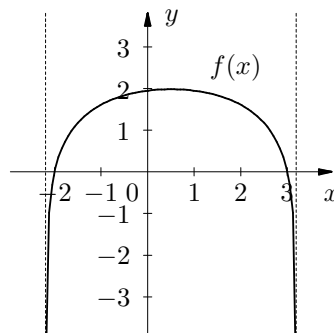
Wendepunkte: $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \iff -2x^2 + 2x - 15 = 0 \iff x^2 - x + 7,5 = 0$. Da letztere Gleichung keine reelle Lösung hat, besitzt f keine Wendepunkte.

Grenzverhalten:

$$\lim_{x \rightarrow -2,193} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3,193} f(x) = -\infty$$

Symmetrie: Die Funktion ist symmetrisch zur Vertikalen $x = \frac{1}{2}$.



2. a) Wegen $f(0) = 5$ sind 5% der Zimmer zur Zeit $t = 0$ modern ausgestattet.

b) Das strenge monotone Wachstum von f folgt aus $f'(t) = \frac{3800e^{-2t}}{(1 + 19e^{-2t})^2} > 0$.

c) Es gilt: $f(2) = \frac{100}{1 + 19e^{-4}} = 74,18$, $f'(2) = \frac{3800 \cdot e^{-4}}{(1 + 19e^{-4})^2} = 38,30$

Tangente: $l(t) = f(2) + f'(2) \cdot (t - 2) = 74,18 + 38,30(t - 2) = 38,30t - 2,42$

3. $p(x; y) = \sqrt{xy}$

a) $p(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda x \cdot \lambda y} = \lambda \sqrt{xy} = \lambda \cdot p(x, y)$

Die Funktion ist homogen vom Grad 1 (linear homogen).

b) $p(x, y) = \sqrt{xy} = 2 \implies y = \frac{4}{x}$

c) $\sqrt{2 \cdot 2} = 2$

4A. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= xy - x, & f_y(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 + ay - 3, \\ f_{xx}(x, y) &= y - 1, & f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = x, & f_{yy}(x, y) &= a. \end{aligned}$$

a) Aus $f_x = 0$ folgt die Beziehung $x(y - 1) = 0$, die mit Hilfe einer Fallunterscheidung weiter untersucht werden kann.

Fall 1: $x = 0$: Aus $f_y = 0$ ergibt sich dann $ay = 3$ bzw. $y = \frac{3}{a}$ (wegen $a < -1$ gilt $a \neq 0$). Wir erhielten den stationären Punkt $x_{s_1} = (0, \frac{3}{a})$.

Fall 2: $y = 1$: Aus $f_y = 0$ folgt $x^2 = 2(3 - a)$. Da auf Grund der Voraussetzung $a < -1$ die Ungleichung $3 - a > 0$ gilt, ergeben sich noch zwei weitere stationäre Punkte: $x_{s_2} = (\sqrt{2(3 - a)}, 1)$, $x_{s_3} = (-\sqrt{2(3 - a)}, 1)$.

b) Zunächst ist $\mathcal{A} = \det H_f = a(y - 1) - x^2$. Der erste stationäre Punkt x_{s_1} erweist sich wegen $\mathcal{A}|_{x_{s_1}} = a(\frac{3}{a} - 1) = 3 - a > 0$ als Extremalstelle und liefert infolge von $f_{xx}(x_{s_1}) = \frac{3}{a} - 1 < 0$ ein lokales Maximum. Die anderen beiden stationären Punkte stellen wegen $\mathcal{A}|_{x_{s_2}} = \mathcal{A}|_{x_{s_3}} = 0 - 2(3 - a) < 0$ keine Extremalstellen dar.

4B. a) Die notwendigen Minimumbedingungen $K_{x_1} = 5 - 2(10 - x_1) = 0$, $K_{x_2} = 10 - 10(20 - x_2) = 0$ sowie $K_{x_3} = 3 - 4(30 - x_3) = 0$ liefern $x_1 = 7, 5$, $x_2 = 19$ und $x_3 = 29, 25$. Ein Minimum liegt vor, da die drei Teilkostenfunktionen (die jeweils nur von x_1 , x_2 bzw. x_3 abhängen) quadratisch sind. Es lässt sich auch leicht die positive Definitheit der Hesse-Matrix nachweisen.

b) Die Variable x_2 ist bereits ganzzahlig. Bei x_1 ist es gleichgültig, ob man auf 7 ab- oder auf 8 aufrundet, während ein Vergleich der Funktionswerte $K_3(29) = 89$ und $K_3(30) = 90$ zeigt, dass es günstiger ist, die Variable x_3 abzurunden.

5A.

$$\text{a) } p = f(x) = \begin{cases} 40 - 2x, & 0 \leq x \leq 10, \\ 25 - \frac{1}{2}x, & 10 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

$$\text{b) } E(x) = x \cdot p = x \cdot f(x) = \begin{cases} 40x - 2x^2, & 0 \leq x \leq 10, \\ 25x - \frac{1}{2}x^2, & 10 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

$$\text{c) } G(x) = E(x) - K(x) = \begin{cases} -2x^2 + 36x - 100, & 0 \leq x \leq 10, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 21x - 100, & 10 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

Skizze:

Bestimmung der Nullstellen im 1. Teil:

$$x^2 - 18x + 50 = 0 \implies x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{31}$$

$x_1 \approx 3, 4$ ($x_2 \approx 14, 5$ entfällt, da im anderen Bereich liegend)

Bestimmung der Nullstellen im 2. Teil:

$$x^2 - 42x + 1200 = 0 \implies x_{1,2} = 21 \pm \sqrt{241}$$

($x_1 \approx 5, 5$ entfällt, da im anderen Bereich liegend), $x_2 \approx 36, 5$

Der Gewinn ist im Bereich $[3, 4; 36, 5]$ nichtnegativ.

5B. a) Als Erstes ist die Gleichung der Geraden zu finden, auf der P_3 liegt (woraus die Nebenbedingung des Problems resultiert). Diese Gerade verläuft durch die Punkte $(b, 0)$ und $(0, a)$ und besitzt somit die Gleichung $y = a - \frac{a}{b}x$. Damit ergibt sich die bedingte Extremwertaufgabe

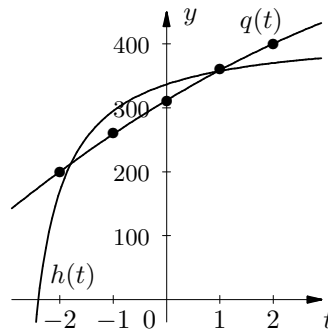
$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \cdot y && \longrightarrow \max \\ g(x, y) &= y - a + \frac{a}{b} \cdot x &= & 0, \end{aligned}$$

wobei die zu bestimmenden optimalen Größen x und y sinnvollerweise nicht-negativ sein müssen. Einsetzen der nach y aufgelösten Nebenbedingung in die Zielfunktion liefert $\tilde{f}(x) = x \cdot (a - \frac{a}{b}x) = ax - \frac{a}{b}x^2$ mit $\tilde{f}'(x) = a - \frac{2a}{b}x$. Aus der Forderung $\tilde{f}' \stackrel{!}{=} 0$ folgt $x_E = \frac{b}{2}$, $y_E = \frac{a}{2}$. Auf Grund der Beziehung $\tilde{f}''(x_E) = -\frac{2a}{b} < 0$ liegt ein Maximum vor.

b) Mit $a = 16$ m und $b = 24$ m ergibt sich $F_{\max} = 96 \text{ m}^2$.

6A.

a) In der grafischen Darstellung sind neben den statistischen Werten die aus dem quadratischen sowie dem hyperbolischen Ansatz resultierenden Trendfunktionen $q(t)$ bzw. $h(t)$ eingezeichnet. Das Jahr 2003 entspricht dem Zeitpunkt $t = 0$.



b) Wir erstellen die folgende Tabelle zur Berechnung der bei den verschiedenen Ansätzen benötigten Zahlenwerte:

	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$	$\frac{1}{t_i + 3}$	$\frac{1}{(t_i + 3)^2}$	$\frac{y_i}{t_i + 3}$
	-2	200	4	-400	1,00000	1,0000	200
	-1	260	1	-260	0,50000	0,25000	130
	0	310	0	0	0,33333	0,11111	103,3
	1	360	1	360	0,25000	0,06250	90
	2	400	4	800	0,20000	0,04000	80
Σ :	0	1530	10	500	2,28333	1,46361	603,3

Linearer Ansatz: Als Lösung des entstehenden Normalgleichungssystems erhält man $a_1 = 306$, $a_2 = 50$ sowie die Approximationsfunktion $l(t) = 306 + 50t$. Für 2008 ($t = 5$) liefert diese die Vorhersage $l(5) = 556$.

Hyperbolischer Ansatz: Aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen von $h(t) = a + \frac{b}{t+3}$ nach a und b ergibt sich das Normalgleichungssystem

$$\begin{aligned} 5a &+ b \cdot \sum \frac{1}{t_i+3} &= \sum y_i \\ a \cdot \sum \frac{1}{t_i+3} &+ b \cdot \sum \frac{1}{(t_i+3)^2} &= \sum \frac{y_i}{t_i+3} \end{aligned}$$

mit den Lösungen $a = 409,473$, $b = -226,584$, woraus man die Approximationsfunktion $h(t) = 409,473 - \frac{226,584}{t+3}$ erhält. Für 2008 ($t = 5$) liefert diese $h(5) = 381,15$, einen nicht sehr sinnvollen Wert, der kleiner als y_{2005} ist.

c) Der lineare Ansatz ist bei relativ kleinen Prognosezeiträumen meist ausreichend. Der hyperbolische Ansatz ist dann angebracht, wenn – z. B. aus räumlichen, finanziellen oder personellen Gründen – eine Sättigungsgrenze abzusehen ist. (Die Rechnungen müssen allerdings relativ genau ausgeführt werden.)

6B.

a) Mit dem Ansatz $z = g(x, y) = a + bx + cy$ (Achtung: hier ist die Ansatzfunktion von zwei Variablen abhängig!) und der zu lösenden Extremwertaufgabe $\sum_{i=1}^N (a + bx_i + cy_i - z_i)^2 \rightarrow \min$ ergibt sich aus den notwendigen Bedingungen $F_a = 0$, $F_b = 0$ und $F_c = 0$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot N &+ b \cdot \sum x_i &+ c \cdot \sum y_i &= \sum z_i \\ a \cdot \sum x_i &+ b \cdot \sum x_i^2 &+ c \cdot \sum x_i y_i &= \sum x_i z_i \\ a \cdot \sum y_i &+ b \cdot \sum x_i y_i &+ c \cdot \sum y_i^2 &= \sum y_i z_i, \end{aligned}$$

wobei im vorliegenden Fall die Summierung jeweils von 1 bis $N = 4$ erfolgt.

Setzt man die aus der nebenstehenden Tabelle erhaltenen Werte in das obige LGS ein, so ergibt sich die eindeutige Lösung $a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, woraus man die Bestapproximationsfunktion $g(x, y) = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y$ aufstellt.

	x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i z_i$	y_i^2	$y_i z_i$
	1	1	6	1	1	6	1	6
	1	0	3	1	0	3	0	0
	0	1	4	0	0	0	1	4
	0	0	2	0	0	0	0	0
\sum :	2	2	15	2	1	9	2	10

b) Der Schätzwert lautet $\bar{z} = g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

ZUSATZ A

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \infty$ (uneigentliches Integral existiert nicht);

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-2x^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{A}} \right) = 2$$

ZUSATZ B

$$\begin{aligned} y'(t) = 0,55 \cdot y(t) &\iff \frac{dy}{dt} = 0,55y \implies \frac{dy}{y} = 0,55 dt \\ \implies \ln y = 0,55t + c_1 &\implies y = c \cdot e^{0,55t} \implies y(0) = 25 = c \\ \implies y(t) = 25 \cdot e^{0,55t} &\implies y(2) = 25 \cdot e^{1,1} \approx 75 \end{aligned}$$

Etwa 75 Personen werden zum Zeitpunkt $t = 2$ Gericht 4 wählen.