1. (Kurze Fragen – kurze Antworten)

Beantworten Sie **kurz** und in eigenen Worten:

a) Aus welchen Bestandteilen besteht eine lineare Optimierungsaufgabe?

b) Was versteht man unter dem Kapitalwert einer Investition?

c) Woran erkennt man bei der Zwei-Phasen-Methode, dass eine lineare Optimierungsaufgabe keine Lösung besitzt?

d) Was besagt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung? **2+2+1+3 P.**

. . . .

2. (Grafische Lösung einer LOA)

a) Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe grafisch:

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & \to & \max \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Ändert sich die Lösung, wenn dieselbe Zielfunktion zu minimieren ist? **10 P.**

ZUSATZ. Wie lautet der maximale Zielfunktionswert und die optimale Lösung bei Maximierung der Zielfunktion, wenn zusätzlich zu den obigen Nebenbedingungen noch die Gleichung $2x_1 + x_2 = 2$ gelten soll? **zus. 4 P.**

. . . .

3. (Rechnerische Lösung einer LOA)

Finden Sie mit Hilfe der Simplexmethode **(von Hand!)** eine Lösung der folgenden LOA (es müssen nicht alle Lösungen angegeben werden). Formen Sie vorher die LOA in die (G)-Form um.

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & \to & \max \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Wie ist zu verfahren, wenn die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist? **8+2 P.**

4. (Zinseszinsrechnung)

a) Eine 1993 gekaufte Antiquität wurde im Jahre 2003 zum dreifachen Preis verkauft. Welche (jährliche) Rendite erzielte der Kunsthändler?

b) Wie lange hätte er bei einem Wertzuwachs von 6 % p. a. warten müssen, um die Antiquität zum dreifachen Preis verkaufen zu können?

c) Gerhard legt 10 000 € für drei Jahre an, seine Frau Doris hingegen die Summe S. Während Gerhards Kapital einmal jährlich zu 6 % verzinst wird, erhält Doris monatlich 0,5 % gutgeschrieben.Wie hoch muss S sein, damit beide nach drei Jahren dieselbe Summe auf ihrem Konto haben? **2+2+4 P.**

. . . .

5A. (Finanzmathematik – Renditeberechnung)

a) Ein Technikmarkt verspricht seinen Kunden, zur Belebung der Konjunktur auf jeden Einkauf die Mehrwertsteuer zu erstatten. Welchen Rabatt wird der Technikmarkt seinen Kunden gewähren? **5 P.**

oder

5B. (Finanzmathematik – Renditeberechnung)

Ein Versandhaus bietet eine Spiegelreflexkamera zum Preis von 279,99 € an. Alternativ wird ein Ratenzahlungsangebot offeriert. Dabei müssen 12 Raten à 24,90 € monatlich nachschüssig gezahlt werden. Das Versandhaus gibt die Effektivverzinsung mit 12, 88 % p. a. an. Weisen Sie nach, dass der angegebene Effektivzinssatz korrekt nach der Preisangabenverordnung berechnet wurde. **5 P.**

. . . .

6. (Integration)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ im Intervall [0,1] **(keine Kurvendiskussion!)**.

b) Geben Sie eine Schätzung für das Integral $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis (grobe Abschätzung genügt).

c) Berechnen Sie das Integral I näherungsweise durch Anwendung der Trapezregel, indem Sie das Intervall [0,1] in fünf Teile gleicher Länge zerlegen (Genauigkeit: 4 Nachkommastellen). **2+3+3 P.**

. . . .

ZUSATZAUFGABE

Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x) = \mathrm{e}^x$ im Punkt $(2, f(2))$? **3 ZP.**

Lösungen zur Klausur Mathematik II Februar 2009

1.

a) Eine LOA besteht aus einer (linearen) Zielfunktion, linearen Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen.

b) Barwert aller Nettoeinnahmen.

c) Befinden sich in der optimalen Lösung der 1. Phase noch künstliche Variable mit positivem Wert in der Basis (und gilt folglich $z^* < 0$), so besitzt die ursprüngliche Optimierungsaufgabe keine zulässige Lösung.

d) Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung besagt: Ist eine Stammfunktion F des Integranden f bekannt, so gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

2. a)

Der Zielfunktionswert wächst bei Maximierung unbeschränkt an.

b) Bei Minimierung lautet der optimale Zielfunktionswert $z^* = 1$. Die gesamte Strecke zwischen den Punkten $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimal.

ZUSATZ.

Der zulässige Bereich besteht nunmehr nur aus einer Strecke. Die optimale Lösung lautet $x^* = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ und der optimale Zielfunktionswert $z^* = \frac{7}{3}$.

3. a)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
 & & & & & - & v_1 & & & & & \to & \max \\
x_1 & + & x_2 & - & u_1 & + & v_1 & & & & & = & 1 \\
-x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_2 & & & = & 3 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & u_3 & = & 4 \\
 & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, v_1} & \geq & 0
\end{array}
$$

			x_1	x_2	u_1	v_1	u_2	u_3			
			0	0	0	-1	0	0			
Nr.	BV	c_B	1	1	0	/	0	0	x_B	θ_i	
1	v_1	-1	1	1	-1	1	0	0	1	$\boxed{1}$	$\leftarrow$
2	u_2	0	-1	1	0	0	1	0	3	/	
3	u_3	0	0	1	0	0	0	1	4	/	
4	/	/	-1	-1	1	0	0	0	-1		
			$\uparrow$								
1	x_1	0(1)	1	1	-1	/	0	0	1	/	
2	u_2	0(0)	0	2	-1	/	1	0	4	/	
3	u_3	0(0)	0	1	0	/	0	1	4	/	
4	/	/	0	0	0	/	0	0	0		
$4'$	/	/	0	0	-1	/	0	0	1		
					$\uparrow$						

Der Zielfunktionswert der LOA wächst unbeschränkt.

b) Setze $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1' \geq 0$, $x_1'' \geq 0$ und ersetze überall x_1 durch die Differenz $x_1' - x_1''$.

4.

a) $K \cdot (1+i)^{10} = 3K \implies 1+i = \sqrt[10]{3} \implies i = \sqrt[10]{3} - 1 = 0,1161 = 11,61\,\%$

b) $K \cdot 1,06^n = 3K \implies 1,06^n = 3 \implies n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1,06} = 18,85 \approx 19$ Jahre

c) $10000 \cdot 1,06^3 = S \cdot 1,005^{36} \implies S = 9952,66$ €

5A.

r	–	Rabattsatz (in Prozent)
m	–	Prozentsatz der Mehrwertsteuer ($m = 19$)
P	–	Preis des Produkts

$$\frac{P}{1+\frac{m}{100}} = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \implies \frac{r}{100} = 1 - \frac{1}{1+\frac{m}{100}} = \frac{\frac{m}{100}}{1+\frac{m}{100}}$$

$$\implies r = \frac{m}{1+\frac{m}{100}} = \frac{19}{1,19} = 15,97 \text{ (Prozent)}$$

5B. Zunächst kann der gegebene (Jahres-)Effektivzinssatz auf den äquivalenten monatlichen Zinssatz umgerechnet werden: $q^* = 1,1288^{1/12} = 1,010147$. Als Barwert (und damit Kaufpreis) des Computersystems ergibt sich

$$B = \frac{24,90}{(q^*)^{12}} \cdot \frac{(q^*)^{12} - 1}{q^* - 1} = 279,99.$$

Das entspricht genau dem genannten Preis. Die angegebene Effektivverzinsung ist also korrekt nach PAngV berechnet worden (die auch unterjährig geometrische Verzinsung verlangt).

6. a)

b) Wegen $f'(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} < 0$ ist f im Intervall [0,1] monoton fallend. Ferner gilt $f(0) = 1$ und $f(1) = \mathrm{e}^{-0,5} = 0,606$. Damit kann man das Integral durch die Beziehung

$$0,606 \leq I \leq 1$$

abschätzen.

c) $f(0) = 1,0000$, $f(0,2) = 0,9802$, $f(0,4) = 0,9231$, $f(0,6) = 0,8353$, $f(0,8) = 0,7261$, $f(1) = 0,6065$;

$$I \approx \frac{1-0}{5}\left[\sum_{i=1}^{4} f(x_i) + \frac{f(0) + f(1)}{2}\right] = 0,8536$$

Der exakte Wert lautet übrigens $I = 0,8556$.

ZUSATZ

$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f(2) = \mathrm{e}^2,$

$f'(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f'(2) = \mathrm{e}^2 =$ Anstieg

$y = f(2) + f'(2)(x-2) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2(x-2) = \mathrm{e}^2(x - 1 \approx 7,389(x-1).$