Wiederholungsklausur Analysis Februar 2002

Aufgabe 1

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (genau ein Kreuz pro Frage):

	a	b	c
Eine Funktion ist eine Abbildung, die a) eindeutig, b) eineindeutig, c) umkehrbar ist.			
Eine konvexe Funktion a) hat die Eigenschaft, dass jede lokale Minimumstelle auch globale Minimumstelle ist, b) ist monoton wachsend, c) ist stets differenzierbar.			
Die Niveaulinien von Funktionen mehrerer Veränderlicher a) sind stets als Kreise oder Ellipsen darstellbar, b) sind Mengen von Punkten mit gleichem Funktionswert, c) lassen sich nicht durch eine Formel beschreiben.			
Ist eine Funktion homogen vom Grade Eins, so a) führt eine proportionale Veränderung der Variablen zu derselben proportionalen Veränderung des Funktionswertes, b) ist der Funktionswert immer gleich Eins, c) ergibt die Summation aller Variablen stets Eins.			
Einen Punkt $\bar{x}$ mit der Eigenschaft $f'(\bar{x}) = 0$ nennt man a) einen stationären Punkt, b) eine Nullstelle, c) einen Wendepunkt der Funktion f.			
Ein Lagrangescher Multiplikator λ in einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen a) ist ein Maßstab für die Knappheit einer Variablen x, b) gibt an, wie sich der Funktionswert von f in etwa ändert, wenn sich die rechte Seite in der zu λ gehörigen Nebenbedingung etwas ändert, c) ergibt mit dem Lösungsvektor multipliziert die Veränderung in der Zielfunktion.			

6 P.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^4 - 2xy + y^2 \,.$$

12 P.

Aufgabe 3

Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + 3\mathrm{e}^{-x}}$$

keine Extremstelle besitzt. **5 P.**

Aufgabe 4
Die Studentin A. möchte mit Hilfe einer Spezialdiät abnehmen. Erste Erfolge lassen sich aus der folgenden Tabelle ablesen:

Zeitpunkt	Januar	Februar	März	April	Mai
Gewicht (in kg)	74	69	65	62	60

a) Mit welchem Gewicht kann die Studentin im November rechnen, wenn man als Prognoseverfahren die Methode der kleinsten Quadratsummen mit linearem Ansatz verwendet? Werten Sie das Ergebnis kritisch.

b) Leiten Sie die notwendigen Minimumbedingungen (Normalgleichungssystem) in der MKQ für die Ansatzfunktion $f(t) = a + \frac{b}{t}$ her. **6+4 P.**

Zusatz. Berechnen Sie den Prognosewert für das November-Gewicht mit Hilfe des in b) beschriebenen Ansatzes (Januar: $t = 1$).
Ist dieser Ansatz besser als der lineare zur Prognose geeignet? (Begründung!) **6+2 P.**

....

Aufgabe 5. A

Der Student B. wendet von seinen monatlich verfügbaren finanziellen Mitteln in Höhe von x (gemessen in Euro) den anteiligen Betrag von

$$v = f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{x}}, \qquad a, b > 0 \quad \text{(Parameter)}$$

für Pizza auf (ebenfalls gemessen in Euro).

a) Welchem Grenzwert strebt der Pizza-Verbrauch für $x \to \infty$ zu? (Begründung!)

b) Berechnen Sie die (im Allgemeinen von den Parametern a und b abhängige) Elastizität des Pizza-Verbrauchs in Abhängigkeit von den finanziellen Mitteln von B. und interpretieren Sie diese Größe.

c) Es gelte $a = 150$ sowie $b = 300$. Wie groß ist der Pizza-Verbrauch bei $x = 600$? Wie wird sich der monatliche Pizza-Verbrauch ändern, wenn sich B.'s finanzielle Mittel um $p\,\%$ erhöhen? Was ergibt sich speziell für $p = 10$? **2+4+4 P.**

oder

Aufgabe 5. B
Gegeben sei die Funktion $f(t) = a + bt + c \sin \frac{t-9}{12}\pi$ mit den Parametern (feste, aber unbekannte Zahlen) $a, b, c > 0$.

a) Entwickeln Sie die Funktion f im Punkt $\bar{t} = 9$ in eine Taylorreihe (bis zum quadratischen Glied). Hinweis: Das Ergebnis werde mit $q(t)$ bezeichnet; es wird von den Parametern a, b, c abhängig sein.

b) Berechnen Sie für $a = 100$, $b = 10$, $c = 1$ im Punkt $t = 10$ den Funktionswert von f sowie den Funktionswert der Taylorapproximation q.

c) Skizzieren Sie die Funktion für die in b) angegebenen Parameterwerte (keine Kurvendiskussion!). **5+2+3 P.**

Aufgabe 6. A

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x \cdot \mathrm{e}^y - x^2 + 2xy$.

a) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f in einem beliebigen Punkt (x,y) sowie im Punkt $(2,0)$.

b) Wie lautet das vollständige Differential im Punkt (2,0)?

c) Geben Sie mit Hilfe des vollständigen Differentials näherungsweise den Funktionswert im Punkt $(2+\Delta x, \Delta y)$ an.

d) Wie lautet die Hesse-Matrix von f in einem beliebigen Punkt (x,y)?

3+2+2+2 P.

oder

Aufgabe 6. B

Es werde die Funktion $p(x,y) = \sqrt{xy}$ (für $x \geq 0, y \geq 0$) betrachtet.

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion p linear homogen ist.

b) Geben Sie die Gleichung der Niveaulinie von p zum Niveau $c = 2$ an und skizzieren Sie die Niveaulinie.

c) Zeigen Sie, dass der Punkt (2,2) auf dieser Linie liegt.

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Niveaulinie von p im Punkt (2,2) an.

3+3+1+3 P.

Lösungen Klausur Analysis:

Aufgabe 1.

	a	b	c
Eine Funktion ist eine Abbildung, die eindeutig ist.	$\times$		
Eine konvexe Funktion hat die Eigenschaft, dass jede lokale Minimumstelle auch eine globale Minimumstelle ist.	$\times$		
Die Niveaulinien von Funktionen mehrerer Veränderlicher sind Mengen von Punkten mit gleichem Funktionswert.		$\times$	
Ist eine Funktion homogen vom Grade Eins, so führt eine proportional Veränderung der Variablen zu derselben proportionalen Veränderung des Funktionswertes.	$\times$		
Einen Punkt $\bar{x}$ mit der Eigenschaft $f'(\bar{x}) = 0$ nennt man einen stationären Punkt der Funktion f.	$\times$		
Ein Lagrangescher Multiplikator λ in einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen gibt an, wie sich der Funktionswert von f in etwa ändert, wenn sich die rechte Seite in der zu λ gehörigen Nebenbedingung etwas ändert.		$\times$	

Aufgabe 2. $f_x = 4x^3 - 2y, \quad f_y = -2x + 2y, \quad H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Aus $f_y(x, y) = 0$ folgt $x = y$, woraus sich zusammen mit $f_x(x, y) = 0$ die drei stationären Punkte $(0, 0)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ ergeben.

Mit $\mathcal{A} = \det H_f = 24x^2 - 4$ ergibt sich folgendes:

1. stationärer Punkt $(0, 0)$: $\mathcal{A} = -4 < 0 \implies$ kein Extremum (Sattelpunkt)

2. stationärer Punkt $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$: $\mathcal{A} = 12 - 4 = 8 > 0 \implies$ Extremum liegt vor. Wegen $f_{xx} = 12x^2 > 0$ handelt es sich um ein lokales Minimum.

3. stationärer Punkt $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$: $\mathcal{A} = 12 - 4 = 8 > 0 \implies$ Extremum liegt vor. Wegen $f_{xx} = 12x^2 > 0$ handelt es sich um ein lokales Minimum.

Aufgabe 3. $f(x) = \dfrac{1}{2 + 3\mathsf{e}^{-x}}$

$$f'(x) = \frac{(2 + 3\mathsf{e}^{-x}) \cdot 0 - 1 \cdot 3(-\mathsf{e}^{-x})}{(2 + 3\mathsf{e}^{-x})^2} = \frac{3\mathsf{e}^{-x}}{(2 + 3\mathsf{e}^{-x})^2}$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ist für kein endliches x lösbar, denn der Zähler wird wegen $\mathsf{e}^z > 0 \ \forall z$ niemals Null. Folglich gibt es auch keine Extremstelle.

Aufgabe 4. Ansatz: $f(t) = a_1 + a_2 t, \quad N = 5$

	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
	1	74	1	74
	2	69	4	138
	3	65	9	195
	4	62	16	248
	5	60	25	300
$\sum$	15	330	55	955

Normalgleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} 5a_1 & + & 15a_2 & = & 330 \\ 15a_1 & + & 55a_2 & = & 955 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = 76,5,\ a_2 = -3,5$$

Es ergibt sich die Approximationsfunktion $f(t) = 76,5 - 3,5t$ mit dem Prognosewert $f(11) = 38$, der höchst unwahrscheinlich ist, weil ein linearer Ansatz der Problemstellung nicht angepasst ist.

Alternativer Lösungsweg: Verwendung der Transformation $t_i' = t_i - 3$

	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
	-2	74	4	-148
	-1	69	1	-69
	0	65	0	0
	1	62	1	62
	2	60	4	120
$\sum$	0	330	10	-35

Normalgleichungssystem:

$$\begin{array}{rcr} 5a_1 & & = 330 \\ & 10a_2 & = -35 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = 66,\ a_2 = -3,5$$

Es ergibt sich die Approximationsfunktion $\tilde{f}(t) = 66 - 3,5t'$ mit $\tilde{f}(8) = 38$. Der lineare Ansatz ist der Problemstellung nicht angepasst, deshalb unwahrscheinlicher Prognosewert.

b) $$F(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(a + \frac{b}{t_i} - y_i\right)^2 \to \min$$

$$F_a = 2\sum_{i=1}^{N} \left(a + \frac{b}{t_i} - y_i\right) \overset{!}{=} 0$$

$$F_b = 2\sum_{i=1}^{N} \left(a + \frac{b}{t_i} - y_i\right) \cdot \frac{1}{t_i} \overset{!}{=} 0$$

Normalgleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} Na & + & b\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t_i} & = & \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t_i} & + & b\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t_i^2} & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{t_i} \end{array}$$

ZUSATZ:

	t_i	y_i	$\frac{1}{t_i}$	$\frac{1}{t_i^2}$	$\frac{y_i}{t_i}$
	1	74	1	1	74
	2	69	0,5	0,25	34,5
	3	65	0,33333	0,11111	21,6667
	4	62	0,25	0,0625	15,5
	5	60	0,2	0,04	12
$\sum$	15	330	2,28333	1,46361	157,6667

Normalgleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} 5a & + & 2,28333b & = & 330 \\ 2,28333a & + & 1,46361b & = & 157,6667 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad a = 58,44,\ b = 16,55$$

Es ergibt sich die Approximationsfunktion $f(t) = 58,44 + \dfrac{16,55}{t}$ mit dem Prognosewert $f(11) = 59,95$, der realistischer erscheint. Ja, dieser Ansatz scheint besser geeignet zu sein, da sich für $t \to \infty$ eine asymptotische Annäherung an die Größe a ergibt: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = a$.

Aufgabe 5. A $\quad v = f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{-0} = a$

b) $f'(x) = a \cdot \dfrac{b}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{x}}$,

$$\varepsilon_{v,x} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = a \cdot \frac{b}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{x}} \cdot \frac{x}{a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{x}}} = \frac{b}{x}$$

Wenn sich die monatlichen Mittel x um 1 % erhöhen, so verändert (erhöht) sich der Pizza-Verbrauch um (näherungsweise) $\dfrac{b}{x}$ %.

c) $v = 150 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{300}{600}} = 90,98$ €; $\qquad \varepsilon\big|_{x=600} = \dfrac{300}{600} = 0,5$

Erhöhen sich die finanziellen Mittel um p %, so erhöht sich der Pizza-Verbrauch um (näherungsweise) $0,5 \cdot p$ %. Speziell für $p = 10$ ergibt sich eine Erhöhung um 5 %, d. h. um ca. 4,55 € (auf 95,53 €).

[Zum Vergleich der exakte Wert: $v = f(660) = 95,21$.]

Bemerkung: Man kann auch den absoluten Funktionswertzuwachs mit Hilfe des Differentials abschätzen.

Aufgabe 5. B a)

$$f(t) = a + bt + c \cdot \sin \frac{(t-9)\pi}{12}, \qquad f(9) = a + 9b$$

$$f'(t) = b + c \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{(t-9)\pi}{12}, \qquad f'(9) = b + \frac{c\pi}{12}$$

$$f''(t) = -c \cdot \frac{\pi^2}{144} \cdot \sin \frac{(t-9)\pi}{12}, \qquad f''(9) = 0$$

$$q(t) = f(9) + f'(9) \cdot (t-9) + \frac{1}{2} f''(9)(t-9)^2 = a + 9b + \left(b + \frac{c\pi}{12}\right)(t-9) + 0$$

$$q(t) = a - \frac{3}{4}c\pi + \left(b + \frac{c\pi}{12}\right) t$$

b) $f(10) = 100 + 100 + \sin \frac{\pi}{12} = 200,25882$

$$q(10) = 100 - \frac{3}{4}\pi + \left(10 + \frac{\pi}{12}\right) \cdot 10 = 200 + \frac{\pi}{12} = 200,26180$$

c)

Aufgabe 6. A $\quad f(x,y) = x\mathrm{e}^y - x^2 + 2xy$

a) $\quad f_x(x,y) = \mathrm{e}^y - 2x + 2y \quad f_x(2,0) = 1 - 4 + 0 = -3$

$\quad f_y(x,y) = x\mathrm{e}^y + 2x \quad f_y(2,0) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

b) $\mathrm{d}f\big|_{(2,0)} = f_x(2,0) \cdot \Delta x + f_y(2,0) \cdot \Delta y = -3\Delta x + 6\Delta y$

c) $f(2+\Delta x, \Delta y) \approx f(2,0) + \mathrm{d}f\big|_{(2,0)} = -2 - 3\Delta x + 6\Delta y$

d) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & \mathrm{e}^y + 2 \\ \mathrm{e}^y + 2 & x\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$

Aufgabe 6. B $\quad p(x;y) = \sqrt{xy}$

a) $p(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda x \cdot \lambda y} = \lambda\sqrt{xy} = \lambda \cdot p(x,y)$

b) $p(x,y) = \sqrt{xy} = 2$

c) $\sqrt{2 \cdot 2} = 2$

d) $xy = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = f(x) = \dfrac{4}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = -1$

Tangentengleichung: $t(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 2 + (-1)(x-2) = 4 - x$

Bemerkung: der Anstieg der Tangente kann auch mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion berechnet werden, was aber hier wegen der expliziten Auflösbarkeit nach y nicht erforderlich ist.

Klausur Analysis Juli 2002

1. (MKQ)

Die Anzahl der von einem Biotech-Startup-Unternehmen angemeldeten Patente betrug

Jahr	1	2	3
Patentanzahl	0	1	4

Mit wie viel Patenten kann man im Jahr 10 seit Gründung rechnen?
a) Verwenden Sie die Methode der kleinsten Quadratsummen mit dem üblichen quadratischen Ansatz.

b) Verwenden Sie die Ansatzfunktion $f(t) = a + b \cdot t^2$.
Hinweis: Das System notwendiger Bedingungen ist im Fall b) „von Hand" herzuleiten. Bei der anschließenden Rechnung darf **keine Transformation** der t-Variablen durchgeführt werden (da sonst die Klasse der betreffenden Ansatzfunktionen verlassen würde).

c) Wie schätzen Sie die Sicherheit der beiden Prognosen ein? **5+6+1 P.**

. . . .

2. (Taylorentwicklung)

a) Es sei x der aktuelle Dollarkurs im Vergleich zum Euro (= Menge an Dollar, die für 1 Euro gezahlt wird). Wie viel Euro werden dann für einen Dollar gezahlt?

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Glied. Setzen Sie dabei $\Delta x = x - 1$. (**Herleitung wichtig, nicht nur endgültige Formel angeben!**)

c) Berechnen Sie mit Hilfe der in b) gewonnenen Taylorentwicklung den Dollar-Euro-Kurs für $x = 0,97$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

d) Ein erfahrener Devisenhändler rechnet das Dollar-Euro-Verhältnis zumeist (näherungsweise) im Kopf aus. Mit welcher (möglichst einfachen) Formel wird er rechnen? Welches Ergebnis erhält er für $x = 0,97$?

Zusatz. Warum funktioniert diese Näherungsmethode nicht, wenn 1 Euro ca. 2 Dollar wert ist? **1+4+3+2 (+2) P.**

. . . .

3. **(Kurvendiskussion)**

a) Bestimmen Sie Extremwerte, Wendepunkte, Monotonieverhalten sowie das Krümmungsverhalten (Konvexität / Konkavität) für die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x + a \cdot x,$$

die von dem festen, aber unbekannten Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängig ist. (Die Ergebnisse werden also im Allgemeinen ebenfalls von diesem Parameter abhängig sein.)

b) Fertigen Sie jeweils eine Skizze für $a = 1$ und für $a = -1$ an. **8+4 P.**

4A. (Integration)

a) Berechnen Sie den von den Parametern a, b, c, d abhängigen Wert

$$w = \int_0^a b \cdot \mathrm{e}^{-cx+d} \, \mathrm{d}x.$$

b) Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ und interpretieren Sie den Wert grafisch.

c) Was ist der Unterschied zwischen einem bestimmten und einem unbestimmten Integral und auf welche Weise hängen beide zusammen? **3+3+2 P.**

oder

4B. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit vom reellen Parameter a = feste, aber unbekannte Zahl) alle Extremwerte und ihre Art (Maximum / Minimum) der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 7a \cdot x.$$

(Das Ergebnis wird im Allgemeinen vom Wert des Parameters a abhängen.) **8 P.**

....

5A. (Vergleich von Funktionswerten)

Zeigen Sie, dass im einzigen stationären Punkt der Funktion $f(x, y) = x^3 - y^3$ kein Extremum (sondern ein Sattelpunkt) vorliegt, indem sie in einer (beliebig kleinen) Umgebung dieses Punktes sowohl Punkte mit größerem als auch Punkte mit kleinerem Funktionswert finden. **5 P.**

oder

5B. (Überprüfung auf Stationarität)

Überprüfen Sie, ob die Punkte $(0, \pi, 0)^\top$ und $(5, 0, 0)^\top$ extremwertverdächtig (stationär) für das folgende Problem sind:

$$d(x, y, z) = \mathrm{e}^x \sin y + y^3 + z \to \text{extr}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 25 \end{array}$$

5 P.

6A. (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

Der Juniorchef eines Unternehmens will eine Erweiterungsinvestition vornehmen und hat dafür die Produktionsfunktion

$$P = f(A, G) = A^{1/3} \cdot G^{2/5}$$

als zutreffend ermittelt. Er möchte das ihm zur Verfügung stehende Kapital von 1 Mill. € so aufteilen, dass die Ausbringungsmenge P maximal wird. Sein Vater meint, eine gleichmäßige Aufteilung in $A = G = \frac{1}{2}$ sei noch immer das beste gewesen. Die Unternehmensberatung „Weiß & Bescheid" plädiert für die Aufteilung $A = \frac{1}{3}$, $G = \frac{2}{3}$, während ein als Praktikant tätiger Chemnitzer Wiwi-Student die Aufteilung $A = \frac{5}{11}$, $G = \frac{6}{11}$ empfiehlt.

a) Vergleichen Sie die Ausbringungsmengen in den drei Fällen miteinander. Wer gab die beste Empfehlung?

b) Dem Juniorchef ist keine der drei Empfehlungen gut genug. Bekräftigen Sie (z. B. mittels notwendiger Bedingungen in einer Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen), dass die vom Chemnitzer Studenten vorgeschlagene Aufteilung optimal ist. (Ein exakter Nachweis der Optimalität mittels hinreichender Bedingungen ist nicht erforderlich.) **2+5 P.**

oder

6B. (Vollständiges Differential)

Der Barwert (und dessen Änderung) eines konkreten festverzinslichen Wertpapiers hängt von der Marktrendite i und der Restlaufzeit n ab:

$$P = g(i, n) = \frac{1}{(1+i)^n} \left[4 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + 100 \right].$$

a) Beschreiben Sie allgemein das vollständige Differential einer **beliebigen** Funktion $f(i, n)$ im festen Punkt $(\bar{i}, \bar{n})$ und geben Sie eine Interpretation dieser Größe an.

b) Berechnen Sie das vollständige Differential der obigen Funktion $g(i, n)$ im Punkt $(\bar{i}, \bar{n}) = (0,05; 6)$.

c) Wie ändert sich der Barwert des Wertpapiers (näherungsweise), wenn sich $\bar{i}$ um $\Delta i = 0,0001 (= 0,01\%)$ und $\bar{n}$ um $\Delta n = -\frac{7}{360}$ (= Laufzeitverkürzung um 7 Tage) ändert? **2+4+1 P.**

Hinweis: Die Ableitung der Funktion $f(x) = a^x$ lautet $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Lösungen der Klausur Analysis 8/2002:

1.

a) Transformation $t'_i = t_i - 2$

	t'_i	y_i	${t'_i}^2$	$t'_i y_i$	${t'_i}^3$	${t'_i}^4$	${t'_i}^2 y_i$
	-1	0	0	0	-1	1	0
	0	1	0	0	0	0	0
	1	4	1	4	1	1	4
$\sum$	0	5	2	4	0	2	4

Aus dem linearen Gleichungssystem (Normalgleichungssystem)

$$\begin{array}{lllll} 2a_1 & & + & 2a_3 & = 4 \\ & 2a_2 & & & = 4 \\ 3a_1 & & + & 2a_3 & = 5 \end{array}$$

ergibt sich die Lösung $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ und somit die Bestapproximationsfunktion

$$f(t') = 1 + 2t' + t'^2 = (t' + 1)^2.$$

Unter Beachtung der vorgenommenen Transformation erhält man den Prognosewert $f(8) = 9^2 = 81$.

Lösungsweg **ohne** Transformation der t-Variablen:

	t_i	y_i	${t_i}^2$	$t_i y_i$	${t_i}^3$	${t_i}^4$	${t_i}^2 y_i$
	1	0	1	0	1	1	0
	2	1	4	2	8	16	4
	3	4	9	12	27	81	36
$\sum$	6	5	14	14	36	98	40

Aus dem linearen Gleichungssystem (Normalgleichungssystem)

$$\begin{array}{rcrcrl} 3a_1 & + & 6a_2 & + & 14a_3 & = 5 \\ 6a_1 & + & 14a_2 & + & 36a_3 & = 14 \\ 14a_1 & + & 36a_2 & + & 98a_3 & = 40 \end{array}$$

ergibt sich die Lösung $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$ und somit die Bestapproximationsfunktion

$$f(t) = 1 - 2t + t^2 = (t - 1)^2.$$

Als Prognosewert erhält man wiederum $f(10) = 9^2 = 81$.

b) Mit der Ansatzfunktion $g(t) = a + bt^2$ ergibt sich

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \left(a + bt_i^2 - y_i\right)^2 \to \min.$$

Notwendige Bedingungen:

$$F_a = 2\sum \left(a + bt_i^2 - y_i\right)^2 \cdot 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_b = 2\sum \left(a + bt_i^2 - y_i\right)^2 \cdot t_i^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Nach kurzer Umformung entsteht hieraus das Normalgleichungssystem

$$\begin{array}{lcccl} a \cdot N & + & b \cdot \sum t_i^2 & = & \sum y_i \\ a \cdot \sum t_i^2 & + & b \cdot \sum t_i^4 & = & \sum t_i^2 y_i \end{array}$$

Konkret ergibt sich

$$\begin{array}{rcrl} 3a & + & 14b & = 5 \\ 14a & + & 98b & = 40 \end{array}$$

mit den Lösungen $a = -\frac{5}{7}$ und $b = \frac{25}{49}$, woraus sich die Bestapproximationsfunktion $g(t) = -\frac{5}{7} + \frac{25}{49}t^2$ ergibt, die für $t = 10$ den Prognosewert $g(10) = -\frac{5}{7} + \frac{2500}{49} \approx 50{,}3$ liefert.

c) Die Prognosewerte in beiden Ansätzen weichen erheblich voneinander ab. Sie sind auch sehr unsicher, da nur 3 Messwerte vorliegen und der Prognosezeitraum relativ groß ist.

2. a) $\frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f(1) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(1) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad f''(1) = 2$

$$f(x) = 1 - (x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 1 - \Delta x + (\Delta x)^2 = 3 - 3x + x^2$$

c) $f(0{,}97) \approx 1 + 0{,}03 + 0{,}0009 = 1{,}0309$, $\qquad f(0{,}97)_{\text{exakt}} = \frac{1}{0{,}97} = 1{,}0309278$

Die Näherung ist recht gut.

d) Näherungsformel (lineare Näherung): $f(x) \approx 1 - \Delta x$; $\; f(0{,}97) \approx 1{,}03$

Zusatz: Die Größe Δx muss „klein" sein.

3. $f(x) = \mathsf{e}^x + ax$, $a \in \mathbb{R}$; $\qquad f'(x) = \mathsf{e}^x + a$; $\qquad f''(x) = \mathsf{e}^x$

Extremwerte: Aus $f'(x) = 0$ folgt $\mathsf{e}^x = -a$.

(1) Für $a \geq 0$ gibt es keine Lösung.

(2) Für $a < 0$ gibt es die einzige Lösung $x_E = \ln(-a)$. Wegen $f''(x_E) = -a > 0$ handelt es sich um eine lokale (und sogar globale) Minimumstelle, nämlich den Punkt $P_{\min}\left(\ln(-a), -a + a\ln(-a)\right)$

Wendepunkte: Wegen $f''(x) = \mathsf{e}^x > 0$ für beliebiges x besitzt die Gleichung $f''(x) = 0$ keine Lösung, so dass es (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$) keine Wendepunkte gibt.

Monotonie: (1) $a \geq 0$: $f'(x) > 0$ für beliebiges x, also monoton wachsend

(2) $a < 0$: Da in $x_e = \ln(-a)$ ein Minimum vorliegt, ist dort $f'(x_E) = 0$. Für $x < x_E$ ist $f'(x) < 0$, also die Funktion monoton fallend; für $x > x_E$ ist $f'(x) > 0$, also die Funktion monoton wachsend.

Krümmungsverhalten: Wegen $f''(x) = \mathsf{e}^x > 0$ für beliebiges x ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ konvex (bei beliebigem $a \in \mathbb{R}$).

Skizze:

4A.

a) $w = -\dfrac{b}{c} \cdot \mathsf{e}^{-cx+d}\Big|_0^a = -\dfrac{b}{c}\left[\mathsf{e}^{-ca+d} - \mathsf{e}^d\right] = \dfrac{b}{c}\left[\mathsf{e}^d - \mathsf{e}^{d-ac}\right]$

(Lineare) Substitution: $z = -cx + d, \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -c, \quad \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{c}\mathrm{d}z$

b) $I = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^A \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to\infty} -\dfrac{1}{x}\Big|_1^A = 1$

c) **Unbestimmte Integration:** gesucht ist Stammfunktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle x;
Bestimmte Integration: gesucht ist Flächeninhalt (Zahl)
Zusammenhang zwischen beiden: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Flächenberechnung mittels Stammfunktion, sofern eine solche bekannt ist)

4B.
$f(x,y) = x^3 - y^3 + 7ax$
$f_x(x,y) = 3x^2 + 7a, \quad f_y(x,y) = -3y^2$

Aus $f_y = 0$ folgt $y = 0$. Aus $f_x = 0$ ergibt sich $x = \pm\sqrt{-\frac{7}{3}a}$.

Fall 1: $a > 0$: kein stationärer Punkt

Fall 2: $a = 0$: ein stationärer Punkt $(x_s, y_s) = (0,0)$

Fall 3: $a < 0$: zwei stationäre Punkte $\left(\sqrt{-\frac{7}{3}a}, 0\right)$ und $\left(-\sqrt{-\frac{7}{3}a}, 0\right)$

Aus $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = -6y$ ergibt sich $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ sowie $\mathcal{A} = \det H_f(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy$.

Damit erhält man in den Fällen 2 und 3 den Wert $\mathcal{A} = 0$ und somit keine Aussage darüber, ob ein Extremum vorliegt.

5A. Für $a = 0$ ist $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt; er besitzt den Funktionswert $f(0,0) = 0$.

Für $(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein, gilt $f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^3 < 0$; für $(\delta, 0)$, $\delta > 0$ beliebig klein, ist $f(\delta,0) = \delta^3 > 0$. Damit gibt es in einer beliebig kleinen Umgebung von $(0,0)$ sowohl Punkte mit kleinerem als auch solche mit größerem Funktionswert. Also ist $(0,0)$ kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt.

5B.
(1) Da der Punkt $(0,\pi,0)^\top$ nicht zulässig ist, kann er auch nicht stationär sein.
(2) Aus der zur vorliegenden Extremwertaufgabe gehörigen Lagrangefunktion

$$L = \mathsf{e}^x \sin y + y^3 + z + \lambda_1(x + 2y + 3z - 5) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 25)$$

resultieren die Stationaritätsbedingungen

$$\begin{array}{lcll} L_x & = & \mathsf{e}^x \sin y + \lambda_1 + 2\lambda_2 x & = 0 \\ L_y & = & \mathsf{e}^x \cos y + 3y^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 y & = 0 \\ L_z & = & 1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 z & = 0 \\ L_{\lambda_1} & = & x + 2y + 3z - 5 & = 0 \\ L_{\lambda_2} & = & x^2 + y^2 + z^2 - 25 & = 0\,. \end{array}$$

Der Punkt $(5,0,0)^\top$ ist zwar zulässig, aber nicht stationär, da bei Einsetzen in die Zeilen 2 und 3 des Systems notwendiger Extremalitätsbedingungen ein Widerspruch entsteht:

$$\begin{array}{rcrcl} e^5 & + & 2\lambda_1 & = & 0 \\ 1 & + & 3\lambda_1 & = & 0 \end{array}$$

6A. $P = f(A,G) = A^{1/3}G^{2/5}$

a) $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{11/15} \approx 0,60151215$ bzw. 15109,31

$P\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2/5} \approx 0,5895533$ bzw. 14808,91

$P\left(\frac{5}{11},\frac{6}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^{2/5} \approx 0,6033406$ bzw. 15155,23

Der Chemnitzer Wiwi-Student hat die beste Empfehlung gegeben (wie sollte es auch anders sein).

b) Eliminationsmethode: $A = 1 - G$, $\quad \tilde{f}(G) = (1-G)^{1/3}G^{2/5}$

$$\tilde{f}'(G) = -\frac{1}{3}(1-G)^{-2/3}G^{2/5} + \frac{2}{5}(1-G)^{1/3}G^{-3/5} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{2}{5}(1-G)^{1/3}G^{-3/5} = \frac{1}{3}(1-G)^{-2/3}G^{2/5} \quad | \cdot G^{3/5}(1-G)^{2/3}$$

$$\frac{2}{5}(1-G) = \frac{1}{3}G \quad \Longrightarrow \quad A^* = \frac{5}{11}, \quad G^* = \frac{6}{11}$$

Lagrangemethode: $L(A,G,\lambda) = A^{1/3}G^{2/5} + \lambda(A+G-1)$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}A^{-2/3}G^{2/5} + \lambda \\ \frac{2}{5}A^{1/3}G^{-3/5} + \lambda \\ A+G-1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es ergibt sich wiederum der stationäre Punkt $A^* = \frac{5}{11}$, $\quad G^* = \frac{6}{11}$.
Dies ist die Lösung, die der Chemnitzer Wiwi-Student vorgeschlagen hatte.

(Mit Hilfe hinreichender Bedingungen kann man nachweisen, dass diese Lösung tatsächlich optimal ist.)

6B. a) $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial i}(\bar{i},\bar{n}) \cdot \Delta i + \frac{\partial f}{\partial n}(\bar{i},\bar{n}) \cdot \Delta n$

Das vollständige Differential stellt eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes (bei Änderung von $\bar{i}$ um Δi und von $\bar{n}$ um Δn) dar.

b) Wir betrachten die konkrete Funktion (Barwert einer Anleihe)

$$P = g(i,n) = \frac{1}{(1+i)^n}\left[4\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+100\right].$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial i}(i,n) = {} & \frac{-n}{(1+i)^{n+1}}\left[4\frac{(1+i)^n-1}{i}+100\right] \\ & +\frac{1}{(1+i)^n}\left[4\frac{in(1+i)^{n-1}-[(1+i)^n-1]}{i^2}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial i}(\bar{i},\bar{n}) = ... = -491,34$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial n}(i,n) = {} & \frac{-1}{(1+i)^n}\ln(1+i)\left[4\frac{(1+i)^n-1}{i}+100\right] \\ & +\frac{1}{(1+i)^n}\cdot\frac{4}{i}(1+i)^n\ln(1+i)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial n}(\bar{i},\bar{n}) = ... = -0,728$$

c) $\mathrm{d}P = -491,34\cdot 0,0001 - 0,728\cdot\left(-\frac{7}{360}\right) = -0,0350$

Diese Größe stellt die näherungsweise Änderung des Barwertes der Anleihe bei Marktzinsänderung und Restlaufzeitverkürzung dar.

Wiederholungsklausur Analysis Februar 2003

1. (Taylorapproximation) a) Nähern Sie die Funktion f in einer Umgebung des Punktes $\bar{x} = 2$ durch eine quadratische Funktion $q(x)$ mit Hilfe der Taylorapproximation an, wenn gilt $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$.
b) Berechnen Sie die Differenz $\Delta f = q(2,1) - f(2,1)$ und schätzen Sie die Qualität der Approximation ein. 5+3 P.

2. (Kurvendiskussion) a) Ermitteln Sie für $a, b, c \geq 0$ den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$.

b) Es gelte $b = -10$ sowie $c = 1$.
b1) Zeigen Sie, dass f für $a \leq 0$ keine Nullstellen besitzen kann.
b2) Es sei bekannt, dass $4 \leq a \leq 5$ gilt. Berechnen Sie die Nullstelle(n) von f (im Bereich $x > 0$).
b3) Überprüfen Sie die Monotonie von f im Bereich $x > 0$.
b4) Bestimmen Sie die möglichen Wendepunkte von f im Bereich $x > 0$ (hinreichende Bedingungen müssen nicht untersucht werden). 2+1+4+3+2 P.

3 (Elastizität) a) Berechnen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $\bar{x} = 5$ für die Parameterwerte $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$.
b) Der Wert $\bar{x} = 5$ vergrößere sich um $1\,\%$. Wie wird sich der Funktionswert (näherungsweise) prozentual verändern? Nutzen Sie dazu den Begriff der (Punkt-) Elastizität. 2+4 P.

4 (MKQ) a) Berechnen Sie für die Parameterwerte $a = 100$, $b = 100$, $c = 1$ die Funktionswerte $f(x)$ in den Punkten $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ (auf jeweils zwei Nachkommastellen genau).
b) Nähern Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Funktion f durch eine lineare Funktion an, indem Sie die Punkte aus a) verwenden.
c) Schätzen Sie den Funktionswert für $x = 7$ mittels der berechneten linearen Funktion und vergleichen Sie mit dem exakten Wert. 2+6+2 P.

5 (Totales Differential) Gegeben seien die Parameterwerte $a = 0$ und $c = 1$. Die Größe b werde als zweite Variable (neben x) aufgefasst.
a) Beschreiben Sie das totale Differential der Funktion f in einem beliebigen Punkt (x, b) sowie für beliebige Zuwächse Δx und Δb.
b) Welchen Wert hat das totale Differential für $\bar{x} = 1$, $\bar{b} = 1$, $\Delta x = 0,1$ und $\Delta b = 0,2$? Interpretieren Sie diesen Wert. 3+3 P.

6 (Extremwertrechnung) Es gelte $a = 0$, $c = 1$, während die Größe b als zweite Variable (neben x) aufgefasst werden soll.

a) Finden Sie (bei einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen) einen extremwertverdächtigen Punkt der Aufgabe

$$\begin{aligned} f(x, b) &\to \text{extr} \\ x + b &= 10. \end{aligned}$$

b) Geben Sie unter Nutzung des Satzes von Descartes an, wie viele extremwertverdächtige Punkte es gibt, deren x-Komponente positiv ist.

Hinweise: Sie müssen nicht **alle** extremwertverdächtigen Punkte finden, einer genügt. Hinreichende Bedingungen müssen nicht untersucht werden. Die x-Komponenten möglicher Extrempunkte liegen im Intervall $[0, 3]$. 9+3 P.

Zusatz zu 6: Wie wird sich der optimale Zielfunktionswert (näherungsweise) ändern, wenn sich die rechte Seite in der Nebenbedingung um 0,5 auf 9,5 verringert? (Abschätzung mittels Lagrange-Multiplikator) (3 P.)

Lösungen zur Klausur Analysis Februar 2003

Aufgabe 1:

a) $f(x) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f'(x) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{2}{x^3}, \qquad f(x) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{4-6x^2}{x^6}$

$f(2) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}} = 0,7788,\ f'(2) = \dfrac{1}{4}\mathsf{e}^{-\frac{1}{4}} = 0,1947,\ f''(2) = -\dfrac{5}{16} \cdot \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}} = -0,2434$

$$
\begin{aligned}
q(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \tfrac{1}{2} f''(2)(x-2)^2 \\
&= 0,7788 + 0,1947(x-2) - 0,1217(x-2)^2 \\
&= \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}} \left[1 + \tfrac{1}{4}(x-2) - \tfrac{5}{32}(x-2)^2\right] \\
&= \mathsf{e}^{-\frac{1}{4}} \left[-\tfrac{1}{8} + \tfrac{7}{8}x - \tfrac{5}{32}x^2\right] \\
&= -0,097 + 0,6815x - 0,1217x^2
\end{aligned}
$$

b) $f(2,1) = 0,797114,\ \ q(2,1) = 0,797053,\ \ \Delta = -0,000416$

Die Näherung ist recht gut, da $\Delta x = 0,1$ relativ klein ist. Die Funktion q stellt eine gute Näherung für die Funktion f in der Nähe des Punktes $\bar{x} = 2$ dar.

Aufgabe 2:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a + b \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+c}} = a + b \cdot \mathsf{e}^0 = a + b$

b1) Da $\mathsf{e}^z > 0$ für beliebiges $z \in \mathbb{R}$, sind für die gegebenen Parameterwerte beide Summanden negativ, so dass f für $a \leq 0$ keine Nullstelle besitzt.

b2) Nullsetzen von $f(x)$ und Umformen liefert:

$$
a = 10\mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{10} = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x^2+1} = \ln\frac{a}{10}
$$

$$
\Longrightarrow \quad x^2 + 1 = \frac{-1}{\ln\frac{a}{10}} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{\ln\frac{a}{10}} - 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{-1}{\ln\frac{a}{10}} - 1}
$$

(x_2 entfällt, da negativ)

Bemerkung: Man überzeugt sich leicht davon, dass für $4 \leq a \leq 5$ der Radikand positiv ist.

b3) $f'(x) = -10 \cdot \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Für $x > 0$ sind sowohl der zweite als auch der dritte Faktor positiv. Damit gilt $f'(x) < 0$, so dass die Funktion f monoton fallend für $x \geq 0$ ist.

b4) Aus der Beziehung $f''(x) = 0$ ergibt sich die Forderung $-6x^4+2 = 0$. Hieraus folgt $x^4 = \dfrac{1}{3}$ bzw. $x_w = \sqrt[4]{\dfrac{1}{3}} = 0,7598$. (Negative Werte für x_w entfallen.)

Aufgabe 3:

a) $f(x) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f(5) = 0,9608$

b) $f'(x) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{2x}{x^4} = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{2}{x^3}$

$$\varepsilon = f'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{f(\bar{x})} = \frac{2}{\bar{x}^2} = 0,08$$

Die Veränderung des Funktionswertes beträgt ca. 0,08 %, d. h., der neue Funktionswert beträgt ca. 0,9685.
(Zum Vergleich: $f(5,05) = \mathsf{e}^{-\frac{1}{5,05^2}} = 0,9615$.)

Aufgabe 4:

a,b) $f(x) = 100 + 100 \cdot \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}}$

x_i	x'_i	y_i	x'^2_i	$x'_i y_i$
1	-2	$160,65$	4	$-321,3$
3	0	$190,48$	0	0
5	2	$196,23$	4	$392,46$
$\sum$	0	$547,36$	8	$71,16$

$\tilde{f}(x'_i; a_1, a_2) = a_1 + a_2 x' = 182,45 + 8,895x'$
Das Normalgleichungssystem
$$\begin{aligned} 3a_1 &= 547,36 \\ 8a_2 &= 71,16 \end{aligned}$$
besitzt die Lösungen $a_1 = 182,45$ und $a_2 = 8,895$.

Ohne Transformation: $f(x; a_1, a_2) = 155,77 + 8,895x$

c) Für $x = 7$ bzw. $x' = 4$ ergibt sich $\tilde{f}(4) = 218,04$, während der exakte Wert $f(7) = 100 + 100 \cdot \mathsf{e}^{-1/50} = 198,02$ lautet. Die Näherung ist einigermaßen gut, aber nicht zu gut (was auch nicht zu erwarten war).

Aufgabe 5:

a) $\dfrac{\partial f(x,b)}{\partial x} = b \cdot \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, \qquad \dfrac{\partial f(x,b)}{\partial b} = \mathsf{e}^{-\frac{1}{x^2+1}}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \Delta b$$

b) $\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\mathsf{e}^{-1/2} = 0,30327, \qquad \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial b} = \mathsf{e}^{-1/2} = 0,60653$

$$\mathrm{d}f(1,1) = \tfrac{1}{2}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}} \cdot 0,1 + \mathsf{e}^{-\frac{1}{2}} \cdot 0,2 = 0,30327 \cdot 0,1 + 0,60653 \cdot 0,2 = 0,15163$$

Das totale Differential stellt den Hauptanteil der Funktionswertänderung bei Änderung des Punktes (1,1) auf (1,1;1,2) dar.

(Der exakte Funktionswertunterschied beträgt $\Delta = f(1,1;1,2) - f(1,1) = 0,76325 - 0,60653 = 0,15672$.)

Aufgabe 6:

Lagrange-Methode: $L(x, b, \lambda) = b \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} + \lambda(x + b - 10)$

$$
\begin{array}{rcllcl}
L_x &=& b \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & + \ \lambda & \stackrel{!}{=} & 0 \\
L_b &=& \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} & + \ \lambda & \stackrel{!}{=} & 0 \\
L_\lambda &=& x + b - 10 & & \stackrel{!}{=} & 0
\end{array}
$$

Aus der 3. Gleichung ergibt sich $b = 10 - x$. Nach Einsetzen in die 1. Gleichung und unter Berücksichtigung der 2. Beziehung erhält man

$$
b \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}}
$$

$$
\Longrightarrow (10 - x) \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad (10 - x)2x = (x^2+1)^2
$$

Setzt man $F(x) = x^4 + 2x^2 - 20x + 1$, so gilt $F'(x) = 4x^3 + 8x - 20$. Die Nullstelle von $F(x)$ lässt sich z. B. mittels des Newtonverfahrens (oder mit dem Taschenrechner) berechnen: $x_E = 2,2053$. Zweite Lösung: $x_E = 0,0505$.

x	$F(x)$	$F'(x)$
2,0	−7,000	28,00
2,25	1,879	43,56
2,207	0,069	40,66
2,205	−0,013	40,52
2,2053		

Eliminationsmethode: $b = 10 - x \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}(x) = (10 - x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}}$

$$
\tilde{f}'(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} + (10 - x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} \stackrel{!}{=} 0
$$

Nach Umformung ergibt sich dasselbe Polynom wie oben, dessen Nullstelle(n) mittels numerischer Verfahren bestimmt werden muss.

b) Anzahl positiver Nullstellen von F beträgt $w =$ Anzahl der Vorzeichenwechsel von F bzw. $w - 2$, also 2 oder 0. Da eine positive Nullstelle bereits berechnet wurde, gibt es zwei positive Nullstellen und somit zwei extremwertverdächtige Punkte.

Zusatz. Für $x_E = 2,2053$ ergibt sich $\lambda = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_E^2+1}} = -0,84$. Verändert sich die rechte Seite um $\Delta x = -0,5$, so ändert sich der optimale Zielfunktionswert um $\Delta = -\lambda^* \cdot \Delta b = 0,84 \cdot (-0,5) = -0,42$.

Für $x_E = 0,0505$ ergibt sich $\lambda = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_E^2+1}} = -0,3688$. Verändert sich die rechte Seite um $\Delta x = -0,5$, so ändert sich der optimale Zielfunktionswert um ca. $\Delta = 0,3688 \cdot (-0,5) = -0,18$.

Klausur Analysis August 2003

1. (Kurvendiskussion)

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Extremwerte und deren Art sowie Wendepunkte (jeweils auf eine Nachkommastelle genau) der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x + 27.$$

b) Skizzieren Sie die Funktion f. **8+2 P.**

Zusatz. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 27$ für $0 \leq a \leq 1$ auf der gesamten Zahlengeraden monoton wachsend ist. **(5 P.)**

. . . .

2A. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Berechnen Sie alle Extrema der Funktion

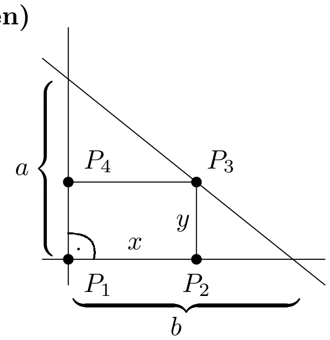
$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 5ax,$$

wobei a ein Parameter (d. h. eine feste, aber unbekannte Zahl) ist.
Hinweise: Das Ergebnis wird im Allgemeinen von a abhängig sein. Unterscheiden Sie geeignete Fälle für a. Sollte bei einem stationären Punkt keine Aussage hinsichtlich der Art des Extremums möglich sein, so können Sie zur Entscheidung Punkte aus einer Umgebung des stationären Punktes untersuchen. **10 P.**

oder

2B. (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

Tobias hat vom Kanzler der Universität ein Stück Land in Erbpacht bekommen, das er mit einem Gebäude von maximaler rechteckiger Grundfläche bebauen will, um eine Campus-Snack-Bar zu eröffnen. Das dreieckige Grundstück ist an einer rechtwinkligen Wegkreuzung gelegen (s. Abb.).



a) Für welche Seitenlängen x und y ergibt sich eine maximale Grundfläche? (Hinweis: Bestimmen Sie eine Gleichung, der die Koordinaten des Punktes P_3 genügen müssen, indem Sie ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in P_1 einführen und beachten, dass P_3 auf der schrägen Geraden liegt.)
b) Wie groß ist die maximale Gebäudegrundfläche, wenn die Seitenlängen des Grundstücks $a = 16\,\text{m}$ und $b = 24\,\text{m}$ betragen? **8+2 P.**

3A. (Integrale)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{wenn gilt} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases} .$$

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ oder stellen Sie dessen Divergenz fest.

c) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion $f(x) = \frac{2}{x \cdot \ln x}$ im Intervall (1,6] an und schätzen Sie die Fläche unter der Funktionskurve in den Grenzen von $a = 2$ bis $b = 5$ grob nach unten und oben ab. **3+4+3 P.**

Zusatz. Berechnen Sie die Fläche aus Teilaufgabe c) exakt. **(4 P.)**

oder

3B. (Integrale und Taylorentwicklung)

a) Wann spricht man von einem uneigentlichen Integral?

b) Worin liegen die Unterschiede zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral und welcher Satz beschreibt einen Zusammenhang zwischen beiden?

c) Das Integral $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ ist nicht in geschlossener Form integrierbar. Approximieren Sie daher den Integranden $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ im Punkt $\overline{x} = 0$ durch eine quadratische Funktion g (Taylorreihe mit Abbruch nach dem quadratischen Glied) und berechnen Sie $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ als Näherung für I. **2+2+6 P.**

4. (Vollständiges Differenzial)
Gegeben sei die Cobb-Douglas-Funktion $P = f(A,K) = \sqrt{AK} = A^{1/2}K^{1/2}$.

a) Berechnen Sie den Funktionswert P im Punkt $(\overline{A}, \overline{K}) = (4,9)$ sowie im Punkt $(\overline{A} + \Delta A, \overline{K} + \Delta K)$ für $\Delta A = 0,1$ und $\Delta K = -0,3$.

b) Ermitteln Sie die ersten partiellen Ableitungen von P sowie das vollständige Differenzial (in allgemeiner Form).

c) Beschreiben Sie das vollständige Differenzial (das den näherungsweisen Zuwachs von P angibt) im Punkt (4,9) bezüglich der Zuwächse $\Delta A = 0,1$ und $\Delta K = -0,3$.

d) Vergleichen Sie den näherungsweisen und exakten Funktionswertzuwachs.

e) Berechnen Sie die partielle Elastizität bezüglich A im Punkt (4,9) und interpretieren Sie diese Größe. **2+2+2+2+2 P.**

Zusatz. Beschreiben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktionsoberfläche von f im Punkt (4,9). **(3 P.)**

. . . .

5. (Methode der kleinsten Quadratsumme, MKQ)

Der Füllstand eines Wasserreservoirs schwankt in Abhängigkeit von Tageszeit und Wochentag. Folgende Pegelstände wurden gemessen:

Montag		Dienstag	
12 Uhr	2,85 m	0 Uhr	2,76 m
18 Uhr	2,81 m	6 Uhr	2,71 m
		12 Uhr	2,67 m

Hinweis:
$\sin 0 = \sin \pi = \sin(-\pi) = 0$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

a) Stellen Sie die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit t grafisch dar.

b) Bestimmen Sie mittels MKQ diejenige Funktion

$$y = f(t) = a \cdot \sin \frac{\pi}{12} t + b \cdot t + c, \qquad (1)$$

die den Wasserstand im Reservoir am besten beschreibt (d.h., ermitteln Sie die Größen a, b, c in optimaler Weise). Hinweis: Wählen Sie Dienstag 0 Uhr als Zeitpunkt $t = 0$ und benutzen Sie Stunden als Maßeinheit für t.

Wenn Sie mit der Funktion (1) nichts anzufangen wissen, können Sie – bei halber zu erreichender Punktzahl – auch einen linearen Ansatz verwenden.

c) Eine kritische Höhe stellt 2,40 m dar. Treffen Sie mit Hilfe des in b) ermittelten Resultates eine Vorhersage, ob am Mittwoch um 18 Uhr dieser mindestens einzuhaltende Füllstand gewährleistet sein wird. **2+8+2 P.**

Lösungen Klausur Analysis 8/2003

$\boxed{1.}$ a) Kurvendiskussion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x + 27$$

$$f'(x) = x^2 + 4x + 1, \qquad f''(x) = 2x + 4, \qquad f'''(x) = 2$$

Nullstellen: Wie die Skizze in b) zeigt, besitzt die Funktion f lediglich eine reelle Nullstelle, die nur mittels eines numerischen Näherungsverfahrens gefunden werden kann. So liefert beispielsweise das Newton-Verfahren mit Startpunkt $x = -7$ nach 2 Schritten den Wert $x_0 = -7,2$.

Extremwerte: $f'(x) = x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad x_{E1} = -2 + \sqrt{3} \approx -0,268,\ f(x_{E1}) = 26,869;$$

$$x_{E2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3,732,\ f(x_{E2}) = 33,797.$$

Wegen $f''(x_{E1}) > 0$ handelt es sich bei x_{E1} um eine Minimumstelle. Wegen $f''(x_{E2}) < 0$ handelt es sich bei x_{E2} um eine Maximumstelle.

Wendepunkte: Aus $f''(x) = 0$ folgt $x_w = -2$ mit $f(x_w) = 30,333$. Wegen $f'''(x_w) = 2 \neq 0$ handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt.

b) Skizze:

Zusatz. Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 27$ gilt $f'(x) = x^2 + 2ax + 1$.

Es gilt die folgende Beziehung:

$$x^2 + 2ax + 1 = (x + a)^2 + 1 - a^2 \geq (x + a)^2 \geq 0.$$

Folglich ist die Funktion f für beliebige Parameterwerte $a \in [0, 1]$ monoton wachsend.

$\boxed{\text{2A.}}$

a) Die notwendigen Bedingungen $f_x = 3x^2 + 5a \stackrel{!}{=} 0$ und $f_y = -3y^2 \stackrel{!}{=} 0$ führen auf $y = 0$ sowie $x^2 = -\frac{5}{3}a$. Für $a > 0$ gibt es keinen stationären Punkt, für $a = 0$ den einzigen stationären Punkt $(0, 0)$ und für $a < 0$ die beiden Punkte $\left(\pm\sqrt{-\frac{5a}{3}}, 0\right)$.

Mit $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ folgt in allen Fällen $\det H_f(x, y) = 0 \ \forall\, (x, y)$, so dass keine Aussage hinsichtlich des Vorliegens von Extrempunkten getroffen werden kann.

Tatsächlich liegt kein Extremum vor, da es in der Umgebung der berechneten stationären Punkte sowohl Punkte mit größerem als auch mit kleinerem Funktionswert gibt, was man sofort erkennt, wenn man den x-Wert fixiert und den y-Wert variiert ($y_s = 0$; ist y positiv, so gilt $-y^3 < 0$; ist y negativ, wird $-y^3 > 0$).

$\boxed{\text{2B.}}$

a) Als Erstes ist die Gleichung der Geraden zu finden, auf der P_3 liegt (woraus die Nebenbedingung des Problems resultiert). Diese Gerade verläuft durch die Punkte $(b, 0)$ und $(0, a)$ und besitzt somit die Gleichung $y = a - \frac{a}{b}x$. Damit ergibt sich die bedingte Extremwertaufgabe

$$\begin{array}{rclcl} f(x,y) & = & x \cdot y & \longrightarrow & \max \\ g(x,y) & = & y - a + \frac{a}{b} \cdot x & = & 0, \end{array}$$

wobei die zu bestimmenden optimalen Größen x und y sinnvollerweise nichtnegativ sein müssen. Einsetzen der nach y aufgelösten Nebenbedingung in die Zielfunktion liefert $\tilde{f}(x) = x \cdot \left(a - \frac{a}{b}x\right) = ax - \frac{a}{b}x^2$ mit $\tilde{f}'(x) = a - \frac{2a}{b}x$. Aus der Forderung $\tilde{f}' \stackrel{!}{=} 0$ folgt $x_E = \frac{b}{2}$, $y_E = \frac{a}{2}$. Auf Grund der Beziehung $\tilde{f}''(x_E) = -\frac{2a}{b} < 0$ liegt ein Maximum vor.

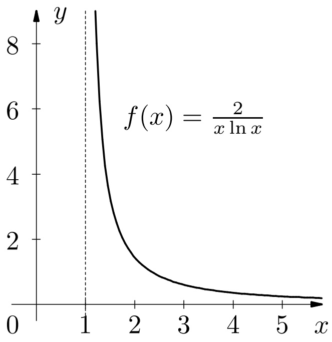
b) Mit $a = 16\,\mathrm{m}$ und $b = 24\,\mathrm{m}$ ergibt sich $F_{\max} = 96\,\mathrm{m}^2$.

$\boxed{\text{3A.}}$

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{3}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{x}{2}\Big|_1^3 + 0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

b) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to\infty} \left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^A = \lim\limits_{A\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{A}}\right) = 2$

c) Der größte Funktionswert im betrachteten Intervall $[2, 5]$ liegt offensichtlich mit $f(2) = \frac{2}{2\ln 2} \approx 1,44$ vor, während der kleinste Funktionswert $f(5) = \frac{2}{5\ln 5} \approx 0,25$ beträgt; die Differenz der Integralgrenzen lautet $d = 3$. Damit gilt für die Fläche unter der Kurve $f(x)$ die Abschätzung $3 \cdot 0,25 = 0,75 \le I \le 3 \cdot 1,44 = 4,32$.



Zusatz. Mit der Substitution $z = \ln x$, d. h. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ bzw. $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}z$ folgt

$$\int_2^5 \frac{2}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{z_1}^{z_2} \frac{2}{z}\,\mathrm{d}z = 2\ln z\Big|_{z_1}^{z_2} = 2\ln(\ln x)\Big|_2^5 = 2[\ln(\ln 5) - \ln(\ln 2)] \approx 1,685\,.$$

$\boxed{\text{3B.}}$ a) Ein uneigentliches Integral ist ein Integral, in dem eine oder beide Integralgrenzen $+\infty$ bzw. $-\infty$ sind oder wo der Integrand eine unbeschränkte Funktion darstellt.

b) Unbestimmte Integration: Gesucht ist eine Stammfunktion F mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ für alle x.
Bestimmte Integration: Gesucht ist der Flächeninhalt (Zahl) zwischen x-Achse und Graph einer Funktion f in gewissen Grenzen.
Zusammenhang zwischen beiden: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Flächenberechnung mittels Stammfunktion, sofern eine solche bekannt ist).

c) Es gilt

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\; f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\; f''(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

sowie

$$f(0) = 1,\; f'(0) = 0,\; f''(0) = -1.$$

Damit ergibt sich aus der Darstellung $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x-\overline{x})^n$ mit $\overline{x} = 0$ bei Abbruch nach dem 2. Glied die Funktion $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Mit dieser erhaltenen Approximationsfunktion g gilt:

$$I \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{6} \approx 0,8333$$

Der exakte Wert lautet übrigens $I = 0,8556$.

$\boxed{4.}$ Zu untersuchen ist die Funktion $P(A,K) = A^{1/2}K^{1/2} = \sqrt{AK}$.

a) Für $\overline{A} = 4$ und $\overline{K} = 9$ lautet der Funktionswert $P(4,9) = 6$. Für den Punkt (4,1;8,7) lautet der Funktionswert $P = f(4,1;8,7) = 5,9724$.

b) Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{1}{2}A^{-1/2}K^{1/2} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{A}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial K} = \frac{1}{2}A^{1/2}K^{-1/2} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{K}}.$$

Vollständiges Differenzial:

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial A}\,\mathrm{d}A + \frac{\partial P}{\partial K}\,\mathrm{d}K = \frac{1}{2\sqrt{AK}}(K\,\mathrm{d}A + A\,\mathrm{d}K)\,.$$

c) Vollständiges Differenzial im Punkt (4,9):

$$\mathrm{d}P(4,9) = \frac{\partial P}{\partial A}\Big|_{(4,9)}\Delta A + \frac{\partial P}{\partial K}\Big|_{(4,9)}\Delta K = \frac{\sqrt{9}}{2\sqrt{4}}\cdot 0,1 + \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{9}}\cdot(-0,3)$$
$$= \frac{3}{2\cdot 2}\cdot 0,1 + \frac{2}{2\cdot 3}\cdot(-0,3) = -0,025.$$

d) Der näherungsweise Funktionswertzuwachs $\mathrm{d}P$ beträgt $P(4,9) = -0,025$ (siehe d)). Der exakte Funktionswertzuwachs lautet $\Delta P(4,9) = f(4,1;8,7) - P(4,9) = 5,9724 - 6 = -0,0276$. Die Differenz von beiden ist sehr gering und beträgt $0,0026$, d. h., das vollständige Differenzial beschreibt den Funktionswertzuwachs für kleine Änderungen des Arguments tatsächlich sehr genau.

e) $\varepsilon_{A,P} = \frac{\partial P}{\partial A}(\overline{A},\overline{K})\cdot\frac{\overline{A}}{f(\overline{A},\overline{K})} = 0,75\cdot\frac{4}{6} = 0,5$

Ändert sich $\overline{A}$ um 1 % (und bleibt $\overline{K}$ konstant), so ändert sich der Funktionswert (näherungsweise) um 0,5 %.

Wegen $|\varepsilon_{A,P}| < 1$ ist die Funktion P im Punkt $(\overline{A},\overline{K})$ unelastisch.

Zusatz. Gleichung der Tangentialebene:

$$y = f(x_0) + \langle\nabla f(x_0),\, x - x_0\rangle = f(\overline{A},\overline{K}) + \left\langle\begin{pmatrix} P_A(\overline{A},\overline{K}) \\ P_K(\overline{A},\overline{K})\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A-\overline{A} \\ K-\overline{K}\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$= 6 + \left\langle\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A-4 \\ K-9\end{pmatrix}\right\rangle = 6 + \frac{3}{4}A - 3 + \frac{1}{3}K - 3$$

Endgültig erhält man:

$$y = \frac{3}{4}A + \frac{1}{3}K$$

$\boxed{5.}$

t_i	H_i
-12	$2,85$
-6	$2,81$
0	$2,76$
6	$2,71$
12	$2,67$

Die Zeitvariable t wurde so transformiert, dass Dienstag 0 Uhr dem Zeitpunkt $t = 0$ entspricht. In der Abbildung ist die aus dem linearen Ansatz resultierende Trendgerade dargestellt.

b) Aus dem Fehlerquadratansatz

$$\sum_{i=1}^{5}\left(a\sin\frac{\pi t_i}{12} + bt_i + c - H_i\right)^2 \to \min$$

ensteht das Normalgleichungssystem

$$\begin{array}{lclclcl}
a\cdot\sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sin\frac{\pi t_i}{12}\right)^2 & + & b\cdot\sum\limits_{i=1}^{5} t_i\sin\frac{\pi t_i}{12} & + & c\cdot\sum\limits_{i=1}^{5}\sin\frac{\pi t_i}{12} & = & \sum\limits_{i=1}^{5} H_i\sin\frac{\pi t_i}{12} \\
a\cdot\sum\limits_{i=1}^{5} t_i\sin\frac{\pi t_i}{12} & + & b\cdot\sum\limits_{i=1}^{5} t_i^2 & + & c\cdot\sum\limits_{i=1}^{5} t_i & = & \sum\limits_{i=1}^{5} H_i t_i \\
a\cdot\sum\limits_{i=1}^{5}\sin\frac{\pi t_i}{12} & + & b\cdot\sum\limits_{i=1}^{5} t_i & + & c\cdot 5 & = & \sum\limits_{i=1}^{5} H_i.
\end{array}$$

Die zur Lösung dieses Systems benötigten Zahlenwerte sind in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengefasst:

i	t_i	H_i	$\sin\frac{\pi t_i}{12}$	$\left(\sin\frac{\pi t_i}{12}\right)^2$	$t_i\sin\frac{\pi t_i}{12}$	$H_i\sin\frac{\pi t_i}{12}$	t_i^2	$H_i t_i$
1	-12	$2,85$	0	0	0	0	144	$-34,20$
2	-6	$2,81$	-1	1	6	$-2,81$	36	$-16,86$
3	0	$2,76$	0	0	0	0	0	0
4	6	$2,71$	1	1	6	$2,71$	36	$16,26$
5	12	$2,67$	0	0	0	0	144	$32,04$
$\sum$:	0	$13,80$	0	2	12	$-0,10$	360	$-2,76$

Nach Einsetzen der Werte in das Normalgleichungssystem erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2a & + & 12b & & & = & -0,10 \\
12a & + & 360b & & & = & -2,76 \\
 & & & & 5c & = & 13,80,
\end{array}$$

dessen Lösung $a = -0,005$; $b = -0,0075$; $c = 2,76$ lautet, so dass sich die folgende Approximationsfunktion ergibt:

$$f(t) = -0,005\cdot\sin\frac{\pi t}{12} - 0,0075\cdot t + 2,76.$$

c) Der Füllstand am Mittwoch um 18 Uhr ($t = 42$) beträgt voraussichtlich

$$y = f(42) = -0,005 \cdot (-1) - 0,0075 \cdot 42 + 2,76 = 2,45 \text{ [m]}$$

und liegt somit über der kritischen Höhe.

Linearer Ansatz. Für die lineare Ansatzfunktion $f(t) = a_1 + a_2 t$ ergibt sich mit

$$\sum_{i=1}^{5} t_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} H_i = 13,80, \quad \sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 360, \quad \sum_{i=1}^{5} t_i H_i = -2,76$$

aus dem Normalgleichungssystem die Trendfunktion

$$y = f(t) = 2,76 - 0,00767t.$$

Als Prognosewert für Mittwoch 18 Uhr ($t = 42$) liefert diese den Wert $f(42) = 2,44$ [m], der ebenfalls über der kritischen Höhe liegt.

Wiederholungsklausur Analysis Februar 2004

1. (Differenziation)

a) Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2y^3 - 3\ln x$$

in einem beliebigen Punkt (x, y).

b) Überprüfen Sie, ob die Hesse-Matrix von f im Punkt $(1, \frac{1}{2})$ positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die von der Funktion f erzeugte Oberfläche im Punkt $(3, 0, f(3, 0))$? **3+3+3 P.**

. . . .

2. (Kurvendiskussion)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x - a \cdot \mathrm{e}^x$, die den Parameter a enthält, wobei $a \neq 0$ gelten soll.

a) Besitzt die Funktion f Extremwerte? Wenn ja, welcher Art? Wenn nein, warum? (Hinweis: Das Ergebnis kann von a abhängig sein.)

b) Besitzt die Funktion f Wendepunkte?

c) Skizzieren Sie die Funktion f für den Parameterwert $a = 1$.

d) Entwickeln Sie die Funktion f im Punkt $\bar{x} = 0$ in eine Taylorreihe mit Abbruch nach dem quadratischen Glied. Das Ergebnis sei die Funktion $q(x)$. (Hinweis: Das Ergebnis wird im Allgemeinen den Parameter a enthalten.)

e) Skizzieren Sie $q(x)$ für $a = 1$. **4+2+2+4+2 P.**

. . . .

3. (Methode der kleinsten Quadratsumme)

Die monatlichen Absatzzahlen einer Unternehmung (in Mill. Euro) haben sich in den vergangenen Monaten wie folgt entwickelt:

Monat	September	Oktober	November	Dezember	Januar
Absatz	40,4	32,9	25,7	19,3	14,8

a) Berechnen Sie eine quadratische Trendfunktion mit Hilfe der MKQ.

b) Sagen Sie den voraussichtlichen Wert für den Absatz im Monat Mai voraus und unterziehen Sie diesen einer kritischen Wertung.

c) Wäre auch eine lineare Ansatzfunktion sinnvoll?

d) Wie lauten die notwendigen Minimumbedingungen, wenn die Approximationsfunktion $f(x) = \dfrac{a}{x} + b$ verwendet wird? **(Keine Rechnung!)** **6+2+2+4 P.**

. . . .

4. (Eigenschaften einer Funktion)

Der mittlere Verbrauch an Schokoladenerzeugnissen v einer sächsischen Familie in Abhängigkeit vom monatlichen Netto-Familieneinkommen x (beide Größen gemessen in Euro/Monat) werde durch die Funktion

$$v = f(x) = 102 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2000}{x}+0{,}2}$$

beschrieben.

a) Man berechne den Verbrauch für ein Einkommen von $\bar{x} = 2500$.

b) Welchem Wert strebt der Verbrauch an Schokoladenerzeugnissen für unbeschränkt wachsendes Einkommen zu?

c) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion f in einem beliebigen Punkt x.

d) Ist bei $\bar{x} = 2500$ der Schokoladenverbrauch eine elastische oder unelastische Größe?

e) Um wie viel Prozent ändert sich (näherungsweise) der Schokoladenverbrauch im Punkt $\bar{x} = 2500$, wenn sich das Familieneinkommen um 3 % erhöht? Wie groß ist die absolute (näherungsweise) Änderung? **2+2+3+2+3 P.**

. . . .

5A. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 3xy - 6x + \frac{3}{2}y^3 + 3y$$

und untersuchen Sie, ob ein Extremum vorliegt bzw. welcher Art dieses ist. **10 P.**

oder

5B. (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

a) Man ermittle alle stationären Punkte der folgenden Extremwertaufgabe:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 &\rightarrow\ & \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b) Falls Sie in a) die Eliminationsmethode angewendet haben, so untersuchen Sie, ob es sich bei dem berechneten stationären Punkt (oder Punkten) um Minimum- oder Maximumstellen oder keines von beiden handelt.

Falls Sie in a) die Lagrange-Methode angewendet haben, so beantworten Sie die folgende Frage: Wie wird sich der optimale Zielfunktionswert (näherungsweise) verändern, wenn sich die rechte Seite in der 2. Nebenbedingung von 2 auf 1,9 ändert? **(Keine Berechnung der neuen optimalen Lösung!)** **8+2 P.**

6. (Integration)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ im Intervall [0,1] **(keine Kurvendiskussion!)**.

b) Geben Sie eine Schätzung für das Integral $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis (grobe Abschätzung genügt).

c) Berechnen Sie das Integral I näherungsweise durch Anwendung der Trapezregel, indem Sie das Intervall [0,1] in fünf Teile gleicher Länge zerlegen (Genauigkeit: 4 Nachkommastellen). **2+3+3 P.**

. . . .

ZUSATZAUFGABE.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x - a \cdot \mathrm{e}^x$, $a \neq 0$.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Das Ergebnis kann von a abhängig sein.

c) In welchen Bereichen ist die Funktion f monoton wachsend bzw. fallend? Hinweis: Das Ergebnis kann von a abhängig sein.

d) Beweisen Sie, dass $f(x)$ für $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ keine Nullstelle besitzt. Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 2a). **zus. 2+3+3+5 P.**

Lösungen zur Klausur Analysis 2/2004

1. a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy^3 - \frac{3}{x} \\ 6x^2y^2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^3 + \frac{3}{x^2} & 12xy^2 \\ 12xy^2 & 12x^2y \end{pmatrix}$

b) $H_f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det H = 21 - 9 = 12 > 0,\ f_{xx} = \frac{7}{2} > 0$ Damit ist H positiv definit.

c) $f(3,0) = -3\ln 3, \qquad \nabla f(3,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z = \left\langle \nabla f(3,0), \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + f(3,0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle - 3\ln 3$

Also: $z = -x + 3 - 3\ln 3 = -x - 0{,}2958$.

2. $f(x) = x - a \cdot e^x, \quad a \neq 0$
$f'(x) = 1 - a \cdot e^x$
$f''(x) = -a \cdot e^x$

a) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{1}{a}$

1. Fall: $a < 0$: Es gibt keine Extrempunkte.
2. Fall: $a > 0$: $x_E = \ln \frac{1}{a} = -\ln a$

Wegen $f''(x_E) = -a \cdot e^{x_E} = -1 < 0$ liegt eine Maximumstelle vor.

b) $f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -a \cdot e^x = 0$

Diese Beziehung ist nicht lösbar, da $a \neq 0$ und $e^x > 0\ \forall x$. Folglich gibt es keine Wendepunkte.

d) $\bar{x} = 0,\ f(0) = -a,\ f'(0) = 1 - a,\ f''(0) = -a$

$$q(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \tfrac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = -a + (1-a)x - \tfrac{a}{2}x^2$$
$$= -\tfrac{a}{2}x^2 - ax + x - a$$

c), e) Für $a = 1$ gilt $f(x) = x - e^x$ sowie $q(x) = -1 - \frac{1}{2}x^2$.

3. a) Wir ordnen dem Monat November den Variablenwert $x = 0$ zu.

	t_i	y_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$y_i t_i$	$y_i t_i^2$
	-2	$40,4$	4	-8	16	$-80,8$	$161,6$
	-1	$32,9$	1	-1	1	$-32,9$	$32,9$
	0	$25,7$	0	0	0	$0,0$	$0,0$
	1	$19,3$	1	1	1	$19,3$	$19,3$
	2	$14,8$	4	8	16	$29,6$	$59,2$
$\sum$	0	$133,1$	10	0	34	$-64,8$	$273,0$

Aus dem Normalgleichungssystem

$$\begin{array}{lclclcl} a_0 \cdot N & + & a_1 \cdot \sum t_i & + & a_2 \cdot \sum t_i^2 & = & \sum y_i \\ a_0 \cdot \sum t_i & + & a_1 \cdot \sum t_i^2 & + & a_2 \cdot \sum t_i^3 & = & \sum y_i t_i \\ a_0 \cdot \sum t_i^2 & + & a_1 \cdot \sum t_i^3 & + & a_2 \cdot \sum t_i^4 & = & \sum y_i t_i^2 \end{array}$$

ergibt sich speziell

$$\begin{array}{lllll} 5a_0 & & + & 10a_2 & = 133,1 \\ & 10a_1 & & & = -64,8 \\ 10a_0 & & + & 34a_2 & = 273,0, \end{array}$$

woraus die Lösungen $a_0 = 25,649$, $a_1 = -6,48$, $a_2 = 0,4857$ resultieren. Wir erhalten $y = f(x) = 0,4857x^2 - 6,48x + 25,649$.

b) Dem Monat Mai entspricht der Wert $x = 6$. Damit ergibt sich die Prognose $f(6) = 4,25$. Der quadratische Ansatz approximiert die gegebenen Werte hinreichend gut.

c) Ein linearer Ansatz würde (da der Anstieg offensichtlich negativ ist) nach einer gewissen Zeit einen negativen Absatz liefern, was ökonomisch wenig sinnvoll erscheint.

d) Aus $\sum\limits_i \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)^2 \to \min$ ergeben sich die notwendigen Bedingungen

$$\begin{array}{lclcl} F_a & = & 1\sum\limits_i \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right) \cdot \frac{1}{x_i} & = & 0 \\ F_b & = & 1\sum\limits_i \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right) \cdot 1 & = & 0, \end{array}$$

woraus folgt:

$$\begin{array}{lclcl} a \cdot \sum \frac{1}{x_i^2} & + & b \cdot \sum \frac{1}{x_i} & = & \sum \frac{y_i}{x_i} \\ a \cdot \sum \frac{1}{x_i} & + & b \cdot N & = & \sum y_i . \end{array}$$

4. $v = f(x) = 102 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2000}{x}+0,2}$

a) $v = f(2500) = 102 \cdot \mathrm{e}^{-0,8+0,2} = 102 \cdot \mathrm{e}^{-0,6} = 55,98$ [€/Monat]

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 102 \cdot \mathrm{e}^{0,2} = 124,58$ [€/Monat]

c) $f'(x) = 102 \cdot \dfrac{2000}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2000}{x}+0,2}$

$$\varepsilon_{f,x}(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = 102 \cdot \frac{2000}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2000}{x}+0,2} \cdot \frac{x}{102 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2000}{x}+0,2}} = \frac{2000}{x}$$

d) Für $x = 2500$ gilt $\varepsilon = 0,8$. Damit ist der Schokoladenverbrauch eine unelastische Größe im Punkt $x = 2500$.

e) $\Delta v \approx \varepsilon \cdot 3\,\% = 2,4\,\%$
Die absolute Änderung des Verbrauchs beträgt folglich etwa $55,98 \cdot 2,4\,\% = 1,34$ [€/Monat].

5A. a) Für die betrachtete Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 3xy - 6x + \frac{3}{2}y^3 + 3y$ lauten die notwendigen Bedingungen für Extrema:

$$\begin{array}{rcrcl} f_x(x,y) & = & 6x - 3y - 6 & = & 0 \\ f_y(x,y) & = & -3x + \frac{9}{2}y^2 + 3 & = & 0\,. \end{array}$$

Multipliziert man die zweite Beziehung mit 2 und addiert beide Gleichungen, erhält man $9y^2 - 3y = 3y(3y-1) = 0$. Ein Produkt ist null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. Dies führt zu einer Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \ y_1 = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 1\,; \\ 2)\ \ y_2 = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & x_2 = \frac{7}{6}\,. \end{array}$$

Damit gibt es zwei stationäre Punkte: $(\bar{x},\bar{y}) = (1,0)$, $(\tilde{x},\tilde{y}) = (\frac{7}{6},\frac{1}{3})$.
Hinreichende Bedingungen: Die zweiten partiellen Ableitungen $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = -3$ und $f_{yy} = 9y$ liefern die Hesse-Matrix $H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9y \end{pmatrix}$ bzw. den Ausdruck

$$\mathcal{A} = \det H_f(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = 54y - 9.$$

Einsetzen von $(\bar{x},\bar{y})$: $\mathcal{A}\big|_{(\bar{x},\bar{y})} = -9 \Longrightarrow$ es liegt kein Extremum vor.
Einsetzen von $(\tilde{x},\tilde{y})$: $\mathcal{A}\big|_{(\tilde{x},\tilde{y})} = 18 - 9 > 0 \Longrightarrow$ es liegt ein Extremum vor; wegen $f_{xx}(\tilde{x},\tilde{y}) = 6 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

5B.
Lösung mittels Lagrange-Methode:
$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = (x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 + \lambda_1(x_1+x_2+x_3-2) + \lambda_2(3x_1 + x_2 - x_3 - 2)$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{array}{rcccl} L_{x_1} & = & 2(x_1-2)+\lambda_1+3\lambda_2 & \stackrel{!}{=} & 0 \\ L_{x_2} & = & 2(x_2-3)+\lambda_1+\lambda_2 & \stackrel{!}{=} & 0 \\ L_{x_3} & = & \lambda_1-\lambda_2 & \stackrel{!}{=} & 0 \\ L_{\lambda_1} & = & x_1+x_2+x_3-2 & \stackrel{!}{=} & 0 \\ L_{\lambda_2} & = & 3x_1+x_2-x_3-2 & \stackrel{!}{=} & 0 \end{array}$$

Hier handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem, das zum Beispiel mit dem Gauß'schen Algorithmus gelöst werden kann (Lösung mittels Taschenrechner möglich). Seine eindeutige Lösung ist

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,$$

so dass es also nur einen stationären Punkt $x_s = (0,2,0)^\top$ gibt.

b) Ändert sich b_i um Δb_i, so ändert sich der optimale Zielfunktionswert um (näherungsweise) $-\lambda_i \cdot \Delta b_i$. Hier: $\Delta f \approx -\lambda_2 \cdot \Delta b_2 = -1 \cdot (-0,1) = 0,1$. Der optimale Zielfunktionswert vergrößert sich näherungsweise um 0,1. Zum Vergleich: Der exakte neue optimale ZF-Wert beträgt 5,099375; während der ursprüngliche optimale ZF-Wert 5 betrug.

Lösung mittels Eliminationsmethode:

a) Die Nebenbedingungen stellen ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten dar, dessen allgemeine Lösung z. B. mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus bestimmt werden kann: $x = (0,2,0)^\top + t \cdot (1,-2,1)^\top$. Setzt man für die Variablen nun die Werte $x_1 = t$, $x_2 = 2-2t$, und $x_3 = t$ in die Zielfunktion ein (die nicht explizit von x_3 abhängt), so erhält man die nur von t abhängige Funktion

$$\tilde{f}(t) = (t-2)^2 + (-2t-1)^2 = 5t^2 + 5.$$

Aus der notwendigen Optimalitätsbedingung

$$\tilde{f}(t) = 10t \stackrel{!}{=} 0$$

ergibt sich $t_E = 0$ mit $\tilde{f}(t_E) = 5$. Zum Wert $t_E = 0$ gehört der Vektor $x_E = (0,2,0)^\top$.

b) Wegen $\tilde{f}''(t_E) = 10 > 0$ handelt es sich bei x_E um eine lokale Minimumstelle.

6. a)

b) Wegen $f'(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} < 0$ ist f im Intervall [0,1] monoton fallend. Ferner gilt $f(0) = 1$ und $f(1) = \mathrm{e}^{-0,5} = 0,606$. Damit kann man das Integral durch die Beziehung

$$0,606 \le I \le 1$$

abschätzen.

c) $f(0) = 1,0000$, $f(0,2) = 0,9802$, $f(0,4) = 0,9231$, $f(0,6) = 0,8353$, $f(0,8) = 0,7261$, $f(1) = 0,6065$;

$$I \approx \frac{1-0}{5}\left[\sum_{i=1}^{4} f(x_i) + \frac{f(0)+f(1)}{2}\right] = 0,8536$$

Der exakte Wert lautet übrigens $I = 0,8556$.

Zusatzaufgabe.

$f(x) = x - a \cdot \mathrm{e}^x, \quad a \neq 0$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - a \cdot 0 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & a < 0 \\ -\infty, & a > 0 \end{cases}$

Begründung: Der Fall $a < 0$ ist offensichtlich.

Für $a > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x} - a\right) = \infty \cdot (-a) = -\infty$,

denn e^x wächst stärker als x bzw. es gilt (z.B. nach der Regel von l'Hospital):

$$\lim \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x} - a\right) = \lim \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - a\right) = -a$$

c) $f'(x) = 1 - a \cdot \mathrm{e}^x$

1. Fall: $a < 0$: $f'(x) > 0 \implies f$ monoton wachsend $\forall\, x$

2. Fall: $a > 0$: $f'(x) > 0$ für $x < \ln\frac{1}{a}$ monoton wachsend

$f'(x) < 0$ für $x > \ln\frac{1}{a}$ monoton fallend

(beachte: $f'(x) = 0$ für $x = \ln\frac{1}{a}$).

d) (vgl. Aufgabe 2a):

Für $a > 0$, was wegen der Voraussetzung $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ offensichtlich gilt, hat f bei $x_E = \ln\frac{1}{a}$ eine Maximumstelle (einzige Extremstelle und globale Maximumstelle). Dort beträgt der Funktionswert $f(x_E) = \ln\frac{1}{a} - a \cdot \frac{1}{a} = -\ln a - 1$.

Für $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ ist $\ln a > \ln\frac{1}{\mathrm{e}} = -\ln \mathrm{e} = -1$, d. h. $-\ln a < 1$ und somit $f(x_E) < 0$. Damit gibt es unter dieser Voraussetzung keine Nullstelle.

Klausur Analysis Juli 2004

Der *Quételet Index*[1], auch *Körpermassen-Index (Body Mass Index,* BMI) genannt, erlaubt eine Einteilung des Grades an Über- bzw. Untergewicht von erwachsenen Frauen und Männern:

BMI	
< 20	Untergewicht
20–24	Normalgewicht
25–29	leichtes/mäßiges Übergewicht
30–39	deutliches Übergewicht
≥ 40	sehr starkes Übergewicht

Er berechnet sich nach der Formel

$$\text{BMI} = \frac{\text{Gewicht [in kg]}}{(\text{Körpergröße [in m]})^2} \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{G}{K^2}\,. \tag{1}$$

....

1. a) Berechnen Sie Ihren persönlichen BMI (fiktive Daten sind zulässig) und überprüfen Sie, ob Sie unter-, normal- oder übergewichtig sind.
b) Skizzieren Sie das Verhalten des BMI in Abhängigkeit vom Gewicht G (bei fixierter Körpergröße $\overline{K}$). **2+2 P.**

....

2. Untersuchen Sie (bei fixierter Körpergröße $\overline{K}$), um wie viel

a) das Gewicht G verringert werden muss, damit sich der BMI um eins verringert,
b) sich der BMI absolut verändert, wenn sich das Gewicht um ΔG ändert (Nutzen Sie das Differenzial!),
c) sich der BMI prozentual verändert, wenn sich das Gewicht um $1\,\%$ verringert (Nutzen Sie die Elastizität!). Ist der BMI elastisch?
d) Bestätigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus b) das in a) erzielte Resultat. **3+3+3+3 P.**

[1] Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796–1874), belgischer Astronom und Statistiker; Begründer der modernen Sozialstatistik

3. Der Teenager Felix (1,70 m/68 kg/schwarzhaarig) wächst innerhalb von 6 Monaten um 2 cm. Um wie viel darf er in diesem Zeitraum zunehmen, damit sich der nach Formel (1) berechnete BMI-Wert nicht ändert?

a) Nutzen Sie das vollständige Differenzial für eine näherungsweise Berechnung.

b) Wie lautet das exakte Ergebnis? Vergleichen Sie. **4+3 P.**

. . . .

4. In einer im Internet unter www-x.nzz.ch/nzz-bin/showbmi zu findenden Grafik wird das (relative) Sterberisiko (in %) in Abhängigkeit vom Wert des BMI angegeben. Man liest z.B. folgende Werte ab:

BMI	20	25	30	35
Sterberisiko	105	110	140	220

a) Stellen Sie die Tabellenwerte grafisch dar.

b) Bei welchem BMI ist die Lebenserwartung am größten (d.h. das Sterberisiko am geringsten)? Verwenden Sie die Methode der kleinsten Quadratsumme mit einem quadratischen Ansatz.

c) Kommentieren Sie Ihr Ergebnis aus mathematischer und medizinischer Sicht. **1+8+2 P.**

. . . .

5. Um eine möglicherweise einfachere Formel als (1) für die Berechnung ihres persönlichen BMI zu erhalten, möchte Felicitas (1,74 m/59 kg/brünett) die Formel $B = f(G) = \frac{G}{1{,}74^2}$ im Punkt $\overline{G} = 59$ in eine Taylorreihe (mit Abbruch nach dem linearen Glied) entwickeln.

a) Helfen Sie ihr.

b) Schreiben Sie die in a) gewonnene Formel in einer solchen Form auf, dass eine Rechnung im Kopf möglich ist. **4+2 P.**

6. Die Englische Formel für den BMI lautet

$$\text{BMI} = \frac{\text{Weight in pounds}}{(\text{Height in inches})^2} \times 703. \tag{2}$$

Bestätigen Sie, dass sich mit Formel (2) für beliebiges Körpergewicht und beliebige Größe derselbe Wert für den BMI ergibt wie bei Berechnung mittels der metrischen Formel (1).
Hinweis: 1 pound = 453,59 g, 1 inch = 2,54 cm. **4 P.**

. . . .

7. Für Kinder und Jugendliche (BMI for children and teens, BMI-for-age) ist die Interpretation des nach Formel (1) berechneten BMI komplizierter; diese ist alters- und geschlechtsabhängig. So kann z.B. die BMI-Kurve für einen deutlich übergewichtigen Jungen (der zu den 5 % Jungen seines Alters mit dem höchsten BMI gehört) im Bereich $2 \leq x \leq 20$ (x – Alter in Jahren) durch die Funktion

$$f(x) = -0,004278x^3 + 0,204188x^2 - 1,548303x + 21,514077$$

beschrieben werden.

a) Wie lautet der BMI-for-age für einen 2-jährigen, deutlich übergewichtigen Jungen?

b) Bis zu welchem Alter sinkt der BMI und wann ist er am niedrigsten?

c) Wann nimmt das Wachstum des BMI ab (d.h., ab welchem Alter ist die Funktion f degressiv wachsend)?

d) Skizzieren Sie die Funktion für $2 \leq x \leq 20$. **1+4+3+2 P.**

. . . .

Zusatzaufgabe. Eine bekannte Faustformel für das Idealgewicht eines Erwachsenen lautet

$$\text{Idealgewicht [in kg]} = \text{Körpergröße [in cm]} - 100. \tag{3}$$

Bestätigen Sie, dass diese einfache Formel für Menschen mit Körpergröße 150 cm $\leq K \leq$ 190 cm gute Werte liefert oder widerlegen Sie diese „Volksweisheit“. Für welche Körpergröße(n) liefert Beziehung (3) die besten Werte? **8 P.**

Lösungen Klausur Analysis 7/2004:

1.

a) Z.B. $K = 1,70$ m, $G = 70$ kg $\quad \Longrightarrow \quad B = \dfrac{70}{1,7} = 24,22 \quad$ (es liegt Normalgewicht vor)

b) $B = \dfrac{G}{\overline{K}}$ ist eine lineare Funktion von G

2.

a) $B = f(G) = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot G, \quad \overline{B} = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \overline{G}, \quad B_{\text{neu}} = \overline{B} - 1$

$$\Longrightarrow \quad G = \overline{K}^2 \cdot B_{\text{neu}} = \overline{K}^2 \left(\overline{B} - 1\right) = \overline{K}^2 \left(\frac{\overline{G}}{\overline{K}^2} - 1\right) = \overline{G} - \overline{K}^2$$

Das Gewicht muss um $\overline{K}^2$ [kg] verringert werden.

b) $\Delta B = f'(\overline{G}) \cdot \Delta G = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \Delta G$

c) $\varepsilon = f'(G) \cdot \dfrac{G}{f(G)} = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \dfrac{G}{\frac{1}{\overline{K}^2} \cdot G} = 1$

Wenn sich G um $1\,\%$ verringert, so verringert sich der BMI ebenfalls um $1\,\%$. Der BMI ist 1-elastisch.

d) Für $\Delta B = 1$ erhält man aus b): $1 = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \Delta G.$, d.h. $\Delta G = \overline{K}^2$, was mit dem Ergebnis aus a) übereinstimmt.

3.

$B = f(G, K), \quad \overline{B} = f(\overline{G}, \overline{K}) = \dfrac{68}{1,70^2} = 23,53$

a) $\mathrm{d}B = \dfrac{\partial B}{\partial G}(\overline{G}, \overline{K}) \cdot \Delta G + \dfrac{\partial B}{\partial K}(\overline{G}, \overline{K}) \cdot \Delta K \overset{!}{=} 0$

$\dfrac{\partial B}{\partial G}(\overline{G}, \overline{K}) = \dfrac{1}{\overline{K}^2} = 0,346, \; \dfrac{\partial B}{\partial K}(\overline{G}, \overline{K}) = -\dfrac{2\overline{G}}{\overline{K}^3} = -27,682, \; \Delta K = 0,02$

$$\Longrightarrow \quad \Delta G = \frac{27,682 \cdot 0,02}{0,346} = 1,60$$

Felix darf (näherungsweise) um 1,6 kg zunehmen.

b) $23,53 = \dfrac{G}{1,72^2} \quad \Longrightarrow \quad G = 69,909$

Exakt darf Felix um 1,609 kg zunehmen.

4.

a)

b) $f(x) = \sum_{i=1}^{4}(a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 - y_i)^2 \to \min$

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
	-3	105	9	-27	81	-315	945
	-1	110	1	-1	1	-110	110
	1	140	1	1	1	140	140
	3	220	9	27	81	660	1980
$\sum$	0	575	20	0	164	375	3175

$$\begin{array}{lclclcl}
4a_1 & + & a_2 \cdot \sum x_i & + & a_3 \cdot \sum x_i^2 & = & \sum x_i \\
a_1 \cdot \sum x_i & + & a_2 \cdot \sum x_i^2 & + & a_3 \cdot \sum x_i^3 & = & \sum x_iy_i \\
a_1 \cdot \sum x_i^2 & + & a_2 \cdot \sum x_i^3 & + & a_3 \cdot \sum x_i^4 & = & \sum x_i^2y_i
\end{array}$$

Speziell ergibt sich:

$$\begin{array}{lclclr}
4a_1 & & & + & 20a_3 & = & 575 \\
 & & 20a_2 & & & = & 375 \\
20a_1 & & & + & 164a_3 & = & 3175
\end{array}$$

Daraus erhält man $a_1 = 120,3125$, $a_2 = 18,75$, $a_3 = 4,6875$, d.h.
$f(x) = 120,3125 + 18,75x + 4,6875x^2$ bzw.
$f'(x) = 18,75 + 9,375 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2.$

Dies entspricht einem BMI-Wert von $B = 22,5$.

c) Kommentar aus mathematischer Sicht: Das Ergebnis stimmt gut mit der Abbildung (den Tabellenwerten) überein. Generell liefert eine Interpolation von Werten i.Allg. gute Werte.
Kommentar aus medizinischer Sicht: Das geringste Sterberisiko liegt dort, wo

sich der BMI im Bereich „Normalgewicht“ befindet.

5.

$$f(G) = f(\overline{G}) + f'(\overline{G}) \cdot (G - \overline{G}) = \frac{\overline{G}}{1,74^2} + \frac{1}{1,74^2}(G - \overline{G})$$
$$= \frac{G}{1,74^2} = 0,33G \approx \frac{G}{3}$$

b) siehe a): $B \approx \dfrac{G}{3}$ oder $B \approx 19,5 + \frac{1}{3} \cdot \Delta G$

Beispiel: $G = 66$: $B_{\text{exakt}} = 21,8$; $\frac{1}{3}G = 22$; $19,5 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 21,5$.

6.

G [in kg] $= G$ [in pounds] $\cdot\, 0,45359$, K [in m] $= K$ [in inches] $\cdot\, 0,0254$

$$B_{\text{metrisch}} = \frac{G\,[\text{in kg}]}{(K\,[\text{in m}])^2} = \frac{G\,[\text{in pounds}] \cdot 0,45359}{(K\,[\text{in inches}] \cdot 0,0254)^2}$$
$$= \frac{G\,[\text{in pounds}]}{(K\,[\text{in inches}])^2} \cdot 703,066 = B_{\text{englisch}}$$

7.

$f(x) = -0,004278x^3 + 0,204188x^2 - 1,548303x + 21,514077$
$f'(x) = -0,012834x^2 + 0,408376x - 1,548303$
$f''(x) = -0,025668x + 0,408376$

a) $f(2) = 19,2$

b) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 31,82x + 120,64 = 0$

Lösungen: $x_{E1} = 4,4 \quad (x_{E2} = 27,42$ entfällt); $f(x_{E_1}) = 18,64$

Wegen $f''(x_{E1}) = 0,2954 > 0$ handelt es sich um eine lokale Minimumstelle.

c) $f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_w = \dfrac{0,408376}{0,025668} = 15,9$

Für $0 \leq x \leq x_w$ gilt $f''(x) \geq 0$, d.h. konvexes Kurvenverhalten.

Für $x \geq x_w$ ist f konkav und $f'(x) > 0$, also f monoton wachsend. Daher ist der BMI im Bereich $x \in [15,9; 20]$ degressiv wachsend.

d)

Zusatzaufgabe.

Wir berechnen zunächst den BMI bei verschiedenen Körpergrößen jeweils für das „Idealgewicht“ gemäß Faustformel: $G_{\text{ideal}} = 100K - 100$.

$100K$	G_{ideal}	BMI
150	50	22,22
160	60	23,43
170	70	24,22
180	80	24,69
190	90	24,93
200	100	25,00
210	110	24,94
(280)	(180)	22,96
(300)	(200)	22,22

Man stellt fest: Im Bereich $1,50 \leq K \leq 1,90$ liegen alle nach der Faustformel ermittelten Werte im „Normalbereich“ des BMI, wenn auch zum Teil am oberen Ende. Die Faustformel ist daher sehr brauchbar.

Übrigens: Mit der Faustformel $B = 100K - 11$ erhält man noch bessere Werte.

Nimmt man als „idealen BMI“ z.B. den Wert 23 an (andere Werte sind natürlich ebenfalls möglich), so müsste das tatsächliche Idealgewicht $\overline{G}_{\text{ideal}}$ gerade $23K^2$ betragen. Dieser Wert wird mit dem aus der Faustregel ermittelten verglichen, indem die (quadratische) Abweichung betrachtet und deren minimaler Wert in Abhängigkeit von K gesucht wird:

$$a(K) = \left(G_{\text{ideal}} - \overline{G}_{\text{ideal}}\right)^2 = \left(100K - 100 - 23K^2\right)^2 \to \min$$

Aus der notwendigen Bedingung

$$a'(K) = 2\left(100K - 100 - 23K^2\right)^2 (100 - 46K) \stackrel{!}{=} 0$$

ergeben sich insgesamt drei Nullstellen:

1) $100 - 46K = 0 \quad \Longrightarrow \quad K_1 = \dfrac{100}{46} = 2,18$ [m]

Diese liefert ein Maximum der Abweichung, liegt aber außerhalb des untersuchten Bereichs.

2) $23K^2 - 100K + 100 = 0 \quad \Longrightarrow \quad K^2 - \frac{100}{23}K + \frac{100}{23} = 0$

$$K_{2,3} = \tfrac{500}{23} \pm \sqrt{\tfrac{200}{23^2}}$$

$K_2 = 2,79$ [m] (nicht relevant, da unrealistische Körpergröße)

$K_3 = 1,56$ [m]

Der für den interessierenden Bereich 1,50 m $\leq K \leq$ 1,90 m relevante Wert beträgt $K_3 = 1,56$ m; er liefert ein Minimum der Abweichung.

Analoge Überlegungen kann man anstellen, wenn man als „idealen“ BMI den Wert 22 oder 22,5 (oder andere Werte) ansieht.