Klausur Algebra Februar 2002

1. (Begriffe und Kurzantworten)

a) Was versteht man unter der Komplementärmenge zu einer Menge A?

b) Was besagen die Komplementaritätsbedingungen in der Lin. Optimierung?

c) Wodurch unterscheidet sich eine reguläre quadr. Matrix von einer singulären?

d) Ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle von Null verschieden sind, invertierbar (Begründung!)? **7 P.**

....

2 A. (Ungleichung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x-1$.

oder

2. B (Ungleichung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x-2| \leq \dfrac{1}{2}x+1$. **10 P.**

....

3 A. (Bedarfsrechnung)

In einem Betrieb werden die Produkte E_1, E_2 und E_3 hergestellt, wozu die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 (in gewissen Mengeneinheiten) wie in der linken Tabelle beschrieben benötigt werden. Außerdem verbraucht der Betrieb einen Teil seiner Produktion selbst (siehe rechte Tabelle):

	R_1	R_2	R_3
je Einheit E_1	2	1	4
je Einheit E_2	1	0	3
je Einheit E_3	0	2	5

	E_1	E_2	E_3
je Einheit E_1	1/2	0	1
je Einheit E_2	0	0	1/2
je Einheit E_3	1/4	1/4	0

Die zu befriedigende Nachfrage an E_1, E_2 und E_3 betrage 5, 8 bzw. 10 Mengeneinheiten. Welche Mengen an Rohstoffen sind zu beschaffen?

oder

3. B (Matrizenrechnung)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det A$ **(von Hand!)**.

b) Berechnen Sie (falls existent) A^{-1} **(Rechnung von Hand!)**.

c) Lösen Sie die Matrizengleichung $AX + M - CB = X - DB$ nach X auf. Unter welcher Voraussetzung ist das möglich?

d) Sind die Spalten von A linear unabhängig? **12 P.**

4 A. (Modellierung einer LOA)

In einer Mensa soll eine Speise unter ernährungswissenschaftlichen Aspekten optimiert werden. Dabei sollen drei Essensbestandteile beliebig miteinander kombiniert werden können. Für jeden Bestandteil ist sein Vitamingehalt sowie sein Kostenanteil (in Euro pro Kilogramm) in der folgenden Tabelle aufgeschlüsselt. Zusätzlich ist die ärztlich empfohlene Mindestration (in mg pro Tag) für drei Vitaminsorten angegeben:

Bestandteil	Gehalt an Vitamin I [mg/kg]	II	III	Kosten [GE/kg]
1	50	20	10	0,10
2	30	10	50	0,15
3	20	30	20	0,12
Tagesration [mg]	29	20	21	

Gesucht ist eine Speisenzusammensetzung, die bei minimalen Kosten die Einnahme der Vitamin-Mindestration sichert. Dabei soll aus geschmacklichen Gründen der Anteil an Bestandteil 1 mindestens doppelt so groß wie der von Bestandteil 3 sein **(Keine Rechnung!)**.

oder

4. B (Dualität)

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$
(P)\quad
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bekannt sei die optimale Lösung der zu (P) dualen Aufgabe: $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)^\top = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)^\top$. Finden Sie mit Hilfe der Komplementaritätsbedingungen die optimale Lösung von (P) sowie deren Zielfunktionswert (**keine grafische Lösung von (P), keine Lösung mittels Simplexmethode!**). **7 P.**

....

5 A. (Grafische Lösung einer LOA)

a) Man löse die lineare Optimierungsaufgabe

$$
\begin{array}{rcrcl}
-2x & - & 4y & \to & \min \\
-2x & - & 2y & \leq & 6 \\
2x & + & y & \geq & 2 \\
2x & - & 2y & \geq & 2 \\
 & & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

auf grafischem Wege.

b) Was ergibt sich bei Maximierung der Zielfunktion? **12 P.**

oder

5. B (Simplexmethode)
Man löse die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

mit Hilfe der Simplexmethode (**Rechnung von Hand!**). **12 P.**

....

6 A. (Finanzmathematik)

a) Felicitas war zum Teilstudium in einem südamerikanischen Land und zahlte dort für eine Busfahrt 4000 GE. Von ihrer Mutter, die vor 13 Jahren dort war, wusste sie, dass damals eine Fahrt 2 GE kostete. Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Inflationsrate, wenn man als Berechnungsgrundlage nur den Preis einer Busfahrt nutzt?

b) Beim Kauf eines Gebrauchtwagens kann Ludwig entweder 5 000 € sofort bezahlen oder ein Finanzierungsmodell wählen, das eine sofortige Anzahlung in Höhe von 1 250 € sowie 36 (jeweils zum Monatsende zahlbare) Raten von 115 € vorsieht. Wofür soll sich Ludwig entscheiden, wenn er stets über genügend Geld verfügt und sein Geld festverzinslich zu einem Prozentsatz von $p = 7,25$ angelegt hat? **4 + 8 P.**

oder

6 B. (Finanzmathematik)

a) Ein heute 35-Jähriger will sich mit 60 Jahren zur Ruhe setzen und 10 Jahre lang vorschüssig eine Rente von 8000 € pro Jahr abheben können. Die jeweils angelegte Summe in der Spar- und Auszahlphase soll mit 5 % verzinst werden. Wie hoch ist die jährlich nachschüssig zu entrichtende Prämie in den 25 Jahren?

b) Ein Jungunternehmer benötigt für eine Investition 100000 €. Die Bank verlangt 6 % Zinsen p. a.; er ist in der Lage, jährlich (nachschüssig) 15000 € zu zahlen. Kann er das Darlehen bei Annuitätentilgung innerhalb von 8 Jahren vollständig tilgen? **7 + 5 P.**

....

ZUSATZAUFGABE
Ingrid kauft für Kurt Kommunalobligationen mit einem Nominalzinssatz von 8,75 %, die eine Restlaufzeit von 1 Jahr und 11 Monaten aufweisen, zum Kurs von 100. Für die Zeit zwischen dem letzten vergangenen Zinstermin und dem Kaufdatum (1 Monat) hat sie Stückzinsen zu zahlen (einfache Verzinsung mit 8,75 %). Welche Rendite erzielt Kurt? (Diese beträgt **nicht** 8,75 %, wie Ingrid vermutete.) **8 P.**

Lösungen:

1. a) Ist Ω eine Grundmenge und $A \subset \Omega$, so gehören zur Komplementärmenge von A bezüglich der Menge Ω alle Elemente aus Ω, die nicht zu A gehören (Differenz der Mengen Ω und A): $\mathbf{C}_\Omega A = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \setminus A$.

b) Entweder ist die zu einer Nebenbedingung gehörige Dualvariable gleich Null oder die entsprechende Nebenbedingung als Gleichung erfüllt (oder beides). Die Komplementaritätsbedingungen bilden ein System von Gleichungen der Form

$$y_i^* \cdot (Ax * -b)_i = 0 \quad \forall i; \qquad x_j^* \cdot (A^\top y * -c)_j = 0 \quad \forall j.$$

Dieses stellt zusammen mit den primalen und dualen Nebenbedingungen ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Lösungen x^* bzw. y^* der primalen bzw. dualen LOA dar.

c) Reguläre Matrix: $\det A \neq 0$, Zeilen (bzw. Spalten) linear unabhängig, rang $A = n$, A ist invertierbar.
Singuläre Matrix: $\det A = 0$, Zeilen (bzw. Spalten) linear abhängig, rang $A < n$, A besitzt keine Inverse.

d) Ja, weil die Determinante einer Diagonalmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente und damit im vorliegenden Fall von Null verschieden ist.

Oder: Die Inverse der Matrix existiert, wobei die Diagonalelemente der Inversen gerade die Kehrwerte der Diagonalelemnte der ursprünglichen Matrix sind.

2. A: 1. Fall: $x > 3$

Aus $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x-1$ folgt $x^2+2 < x^2-4x+3$, d. h. $4x < 1$ bzw. $x < \dfrac{1}{4}$

Damit gibt es in diesem Fall keine Lösung: $L_1 = \emptyset$.

2. Fall: $x < 3$

Aus $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x-1$ folgt $x^2+2 > x^2-4x+3$, d. h. $4x > 1$ bzw. $x > \dfrac{1}{4}$. Somit gilt $L_2 = \left(\dfrac{1}{4}, 3\right)$.

Die Gesamt-Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = L_2 = \left(\dfrac{1}{4}, 3\right)$.

2. B:

1. Fall: $x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x - 2 \leq \dfrac{1}{2}x + 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{2}x \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 6$

Damit ist $L_1 = [2, 6]$.

2. Fall: $x < 2 \quad \Longrightarrow \quad -x + 2 \leq \dfrac{1}{2}x + 1 \quad \Longrightarrow \quad -\dfrac{3}{2}x \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq \dfrac{2}{3}$

Damit ist $L_2 = \left[\frac{2}{3}, 2\right)$.

Gesamt-Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \left[\frac{2}{3}, 6\right]$.

Bemerkung: Selbstverständlich ist auch eine Fallunterscheidung $x > 2$, $x \leq 2$ oder auch $x \geq 2$, $x \leq 2$ möglich. Beide führen auf das dasselbe Resultat.

3. A:
Bezeichnet man die zur ersten Tabelle gehörige Matrix mit A, die zur zweiten gehörige mit B und den Nachfragevektor mit n, so berechnet sich der Produktionsvektor p gemäß dem Leontief-Ansatz als $p = (E - B^\top)^{-1} n$ und daraus der Rohstoffvektor $r = A^\top p = A^\top (E - B^\top)^{-1} n$. Dies ergibt

$$r = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14/3 & 2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 170 \\ 560 \end{pmatrix}.$$

Es werden also 108 Mengeneinheiten von R_1, 170 ME von R_2 und 560 ME von R_3 benötigt.

Bemerkung: Die inverse Matrix kann auch mit dem Taschenrechner berechnet werden. Allerdings muss das explizit hingeschrieben werden.

Andere Lösungsmöglichkeit: p wird als Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet und anschließend (von links) mit $A^\top$ multipliziert:

$1/2$	0	$-1/4$	5
0	1	$-1/4$	8
-1	$-1/2$	1	10
1	0	$-1/2$	10
0	1	$-1/4$	8
0	$-1/2$	$1/2$	20
1	0	$-1/2$	10
0	1	$-1/4$	8
0	0	$3/8$	24
1	0	0	42
0	1	0	24
0	0	1	64

$$r = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 24 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 170 \\ 560 \end{pmatrix}$$

3. B: a) $\det A = 2$ (z. B. mittels Regel von Sarrus)

b)

1	2	3	1	0	0
0	1	2	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	2	3	1	0	0
0	1	2	0	1	0
0	-2	-2	-1	0	1
1	0	-1	1	-2	0
0	1	2	0	1	0
0	0	2	-1	2	1
1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	-1	-1
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Inverse Matrix: $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $AX + M - CB = X - DB \quad \Longrightarrow \quad (A - E)X = CB - DB - M \quad \Longrightarrow$
$X = (A - E)^{-1}(CB - DB - M)$

Falls $A - E$ regulär ist, so lässt sich X (eindeutig) berechnen. Außerdem müssen die in der Gleichung vorkommenden Matrizenmultiplikationen ausführbar sein (Verkettbarkeit der Matrizen).

d) Ja, da $\det A \neq 0$ (vgl. Teil b).

4. A: Bezeichnet man mit x_i die Menge (in kg) des i-ten Bestandteils pro Portion ($i = 1, 2, 3$), so erhält man folgendes Modell:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 0{,}10x_1 & + & 0{,}15x_2 & + & 0{,}12x_3 & \to & \min & \\ 50x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & \geq & 29 & \text{Vitamin I} \\ 20x_1 & + & 10x_2 & + & 30x_3 & \geq & 20 & \text{Vitamin II} \\ 10x_1 & + & 50x_2 & + & 20x_3 & \geq & 21 & \text{Vitamin III} \\ x_1 & & & - & 2x_3 & \geq & 0 & \text{Geschmack} \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \text{NNB} \end{array}$$

Eine andere Modellierungsvariante besteht zum Beispiel darin, den Anteil der Bestandteile an einer Essensportion als Variable anzusetzen.

4. B: Wegen $y_1^* \neq 0$ und $y_2^* \neq 0$ müssen auf Grund der Komplementaritätsbedingungen die erste und die zweite Nebenbedingung als Gleichung erfüllt sein, d. h.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Daraus folgt für die primale optimale Lösung: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$ mit $z^* = 4$.

Andere Überlegung: Als optimaler Zielfunktionswert der dualen LOA (und damit – auf Grund des starken Dualitätssatzes – auch der primalen LOA) ergibt sich $3y_1^* + y_2^* + 2y_3^* = 4$.

5. A:

Da der zulässige Bereich unbeschränkt ist und die Niveaulinie der Zielfunktion in Minimierungsrichtung beliebig weit verschoben werden kann, kann der Zielfunktionswert unbeschränkt fallen, d. h. $z^* = -\infty$.
Bemerkung: Die 1. Nebenbedingung hat keinerlei Einfluss auf den zulässigen Bereich.

Bei Maximierung ergibt sich als optimale Lösung $x^* = 1$, $y^* = 0$ mit dem Zielfunktionswert $z^* = -2$. Diese Lösung kann sofort aus der Skizze abgelesen werden bzw. ergibt sich aus dem LGS

$$\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 2 \\ 2x & - & 2y & = 2. \end{array}$$

5. B: Ersatzaufgabe:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & & & & & & & -v_1 & & & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & + & u_1 & & & & & & & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & u_2 & + & v_1 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & u_3 & = & 2 \\ & & & & & & & & & x_!, x_2, u_1, u_2, u_3, v_1 & & \geq & 0 \end{array}$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	u_3	x_B	Θ	
			0	0	0	0	-1	0			
			3	6	0	0	/	0			
1	u_1	0	1	1	1	0	0	0	3	3	
2	v_1	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	1	$\leftarrow$
3	u_3	0	2	1	0	0	0	1	2	1	
4	/	/	-1	1	0	1	0	0	-1		
				$\uparrow$							
1	u_1	0	0	2	1	1	/	0	2	1	
2	x_1	0	1	-1	0	-1	/	0	1	/	
3	u_3	0	0	3	0	2	/	1	0	0	$\leftarrow$
4	/	/	0	0	0	0	/	0	0		
1	u_1	0	0	2	1	1	/	0	2	1	
2	x_1	3	1	-1	0	-1	/	0	1	/	
3	u_3	0	0	3	0	2	/	1	0	0	$\leftarrow$
4	/	/	0	-9	0	-3	/	0	3		
1	u_1	0	0	0	1	$-1/3$	/	$-2/3$	2		
2	x_1	3	1	0	0	$-1/3$	/	$1/3$	1		
3	x_2	6	0	1	0	$2/3$	/	$1/3$	0		
4	/	/	0	0	0	3	/	3	3		

Optimale Lösung: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$ mit $z^* = 3$.

6. A:

a) Der ursprüngliche Betrag von $K_0 = 2$ GE muss, um nach 13 Jahren den neuen Preis zu ergeben, auf $K_{13} = 4000$ GE anwachsen. Gemäß der Endwertformel der Zinseszinsrechnung gilt dann:

$K_n = K_0 \cdot q^n \implies K_{13} = K_0 \cdot q^{13} \implies 2000 = q^{13} \implies q = \sqrt[13]{2000} = 1,7944.$

Dies entspricht einer durchschnittlichen jährlichen Inflationsrate von $79,44\%$.

Anderer Ansatz: $K_{13} = K_0 \cdot (1+i)^{13} \quad \implies \quad i = \sqrt[13]{\dfrac{K_{13}}{K_0}} - 1 = 0,7944.$

b) Wir berechnen den Barwert aller Zahlungen bei 7,25 % Verzinsung. Zunächst beträgt die Jahresersatzrate der monatlichen Zahlungen

$$R = 115 \cdot (12 + 5,5 \cdot 0,0725) = 1425,86\,€$$

(zahlbar am Jahresende). Mit ihrer Hilfe berechnen wir den Barwert für drei (nachschüssig zahlbare) Jahresraten ($q = 1,0725$):

$$B_3^{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^3 - 1}{q^3(q-1)} = 3724,88\,€.$$

Zusammen mit der Anfangsrate von 1 250 € ergibt das 4 974,88 €, was etwas geringer als die Sofortzahlung von 5 000 € ist. Ludwig sollte sich für die Finanzierung entscheiden.

Alternativer Lösungsweg: Mit $i = 0,0725$ bzw. $q = 1,0725$ sowie $S_0 = 5000 - 1250 = 3750$ und $n = 3$ (Jahre) berechnet man eine jährliche Annuität von $A = S_0 \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = 1435,48$ €.
Mit Hilfe der (nachschüssigen) Jahresersatzrate lässt sich diese auf eine monatliche Annuität umrechnen: $a = \dfrac{A}{12 + 5,5 \cdot \frac{i}{12}} = 119,29$ €.
Wegen $115 < 119,29$ ist Ratenzahlung günstiger.

6. B: a) Der Barwert einer über 10 Jahre nachschüssig zahlbaren Rente in Höhe von 8 000 € muss als Endwert in der Sparphase bei regelmäßigen Zahlungen der (gesuchten) Höhe r im Laufe von $n = 25$ Jahren erzielt werden:

$$B_{10} = 8\,000 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q^9(q-1)} = 64862,62 \stackrel{!}{=} E_{25} = r \cdot \frac{q^{25} - 1}{q - 1}\,.$$

Auflösen nach r ergibt $r = 8\,000 \cdot \dfrac{q^{10} - 1}{q^9\,(q^{25} - 1)}$, woraus sich für $q = 1,05$ die jährlich zu entrichtende Prämie mit $r = 1\,359,03$ € ermitteln lässt.

b) Die Annuität bei der Annuitätentilgung berechnet sich aus der Formel $A = S_0 \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$. Mit den Werten $S_0 = 100\,000$, $q = 1,06$ und $n = 8$ ermittelt man hieraus den Betrag $A = 16\,103,59$ €, der für eine vollständige Tilgung erforderlich ist. Nein, er kann das Darlehen nicht innerhalb von 8 Jahren tilgen.

Andere Lösungsmöglichkeiten:
1. Berechnung des Barwertes von 93146,91 €.
2. Berechnung der Zeit bis zur vollständigen Tilgungs des Darlehens bei gegebener Annuität von 15 000 €: $n = \frac{1}{\ln q}[\ln A - \ln(A - S_0 i)] n = 8,77$ (Jahre).
3. Aufstellen eines Tilgungsplanes
4. Restschuld nach 8 Jahren: $S_8 = 100000 \cdot 1,06^8 - 15000 \cdot \frac{1,06^8 - 1}{0,06} = 10922,79$ €

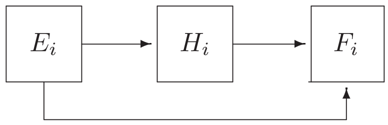
ZUSATZ: Der Barwertvergleich aller Zahlungen liefert:

$$100,73 = \frac{1}{1 + \frac{11}{12} \cdot \frac{p_{\text{eff}}}{100}} \cdot \left(\frac{108,75}{1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100}} + 8,75 \right).$$

Dabei werden die zum Kaufzeitpunkt (bei $t = \frac{1}{12}$, betrachtet als neuer Ursprung der Zeitachse) fälligen Zahlungen des Nennwertes und der Stückzinsen den Barwerten der Zinsen bzw. des zurückgezahlten Nennwertes gegenübergestellt. Letztere erhält man durch Abzinsen um 11 Monate (einfache Verzinsung) bzw. um 1 Jahr und 11 Monate (gemischte Verzinsung).
Aus der obigen Beziehung erhält man nach kurzer Umformung die quadratische Gleichung $p^2 + 199,61456p - 1816,2974 = 0$, die die einzige positive Lösung $p_{\text{eff}} = 8,718249$ besitzt. Die Rendite beträgt somit 8,72 %.

Wiederholungsklausur Algebra Juli 2002

1A. (Teileverflechtung) Ein technologischer Prozeß gliedert sich in zwei Bearbeitungsstufen. In der 1. Stufe werden aus drei Typen von Einzelteilen E_1, E_2, E_3 Halbfabrikate H_1, H_2, H_3 und daraus die Finalprodukte F_1, F_2, F_3 hergestellt. Eine bestimmte Anzahl von Einzelteilen geht direkt in die Finalprodukte ein (s. Abb.).



Die folgenden Tabellen geben an, welche Erzeugnismengen (in Stück) der unteren Stufen in jeweils ein Stück der höheren Stufen direkt eingehen:

	je Einheit		
	F_1	F_2	F_3
H_1	0	2	3
H_2	1	0	1
H_3	1	2	0
H_4	0	1	0

	je Einheit		
	F_1	F_2	F_3
E_1	10	0	0
E_2	0	20	0
E_3	0	0	8

	je Einheit			
	H_1	H_2	H_3	H_4
E_1	5	1	2	0
E_2	0	0	4	2
E_3	1	0	2	1

a) Der Betrieb hat Endprodukte im Umfang von $f = (100,\ 100,\ 200)^\top$ zu liefern. Wie viele Einzelteile $e = (e_1, e_2, e_3)^\top$ sind dafür bereitzustellen?
b) Ein Kunde ordert je 20 Stück jedes Halbfabrikats zusätzlich (also $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 20$). Welche Einzelteilstückzahlen sind dafür vom Zulieferer extra zu beschaffen?
c) Geben Sie eine Formel an, die einen Zusammenhang zwischen dem Vektor e (Menge benötigter Einzelteile), den Matrizen A, B, C (die den 3 Tabellen entsprechen) und den Vektoren f (Menge zu fertigender Finalprodukte) und h (Menge zusätzlicher Halbfabrikate) herstellt. **5+3+2 P.**

oder

1B. (Teileverflechtung bei Eigenbedarf) Eine Unternehmung stellt drei Endprodukte P_1, P_2, P_3 aus drei Ausgangsstoffen A_1, A_2, A_3 her, wobei der Bedarf in der linken Tabelle gegeben ist. Durch die angewandte Techologie bedingt, wird ein Teil der Endprodukte im Prozess selbst verbraucht (s. rechte Tabelle):

	je Einheit		
	P_1	P_2	P_3
A_1	2	1	0
A_2	0	3	2
A_3	3	2	4

		je Einheit		
		P_1	P_2	P_3
werden	P_1	1/4	0	1/10
selbst	P_2	0	1/4	0
verbraucht	P_3	0	1/10	0

Es besteht eine Nachfage nach 300, 900 bzw. 600 Mengeneinheiten an P_1, P_2

bzw. P_3. Welche Mengen an Ausgangsstoffen sind bereitzustellen? **10 P.**

2A. (Grafische Lösung einer LOA) Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe auf grafische Weise:

$$3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10 & \leq & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 20 \\ -8 & \leq & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

10 P.

oder

2B. (Ungleichungssystem) Weisen Sie nach, dass das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq & -7 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

keine Lösung besitzt. (Hinweis: Eine – wenn auch nicht die einzige – Möglichkeit besteht in der Nutzung der Simplexmethode.) **10 P.**

. . . .

3A. (Ungleichung) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{x^2+1}{x-3} > x - 1.$$

8 P.

oder

3B. (Ungleichung) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x-2| \geq \frac{1}{2}x-1.$$

8 P.

4 (Lineares Gleichungssystem)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus und geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$$

b) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\hat{x} = (1, 1, 1, 0)^\top$ keine Lösung des LGS ist!

c) Zeigen Sie, dass $\overline{x} = (-2, 0, 2, 0)^\top$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist! **6+2+2 P.**

. . . .

5. (Modellierung)

Eine Studentin hat für ihren Urlaub höchstens sechs Wochen Zeit und maximal eine Geldsumme von 3 000 € zur Verfügung. Sie hat verschiedene Angebote sowohl für Abenteuer- als auch für reine Erholungsreisen eingeholt (siehe Tabelle), von denen sie nun eine oder mehrere auswählen will. Sie will jedoch nicht mehr als eine Abenteuerreise unternehmen. Als Entscheidungshilfe hat sie jeder Reise einen Bewertungskoeffizienten zugeordnet (von 1 Punkt bis zu 10 Punkten, wobei die höchste Punktzahl dem beliebtesten Reiseziel entspricht).

Reiseziel	Reisetyp	Dauer der Reise (in Wochen)	Kosten (in €)	Bewertung (1,...,10)
Malaysia	Abenteuer	3	1 100	5
Mallorca	Erholung	1	600	3
Türkei	Erholung	2	800	4
Korsika	Abenteuer	1	900	2
Nepal	Abenteuer	2	1 600	9

Helfen Sie ihr bei der Entscheidungsfindung, indem Sie ein mathematisches Modell in Form einer linearen Optimierungsaufgabe aufstellen! Das Ziel der Urlaubsplanung soll eine möglichst hohe Gesamtbewertung aller Reisen sein.

(Nur Modellierung, keine Ausführung der Rechnung !) **6 P.**

6A. (Finanzmathematik)

Ein Unternehmung plant eine Neuinvestition, die sofort 1 Mill. € und in einem Jahr nochmals 600 000 € an Kapital erfordert. Die in den Jahren 2 bis 10 anfallenden Nettoerlöse werden auf je 200 000 € geschätzt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die alle Zahlungen verdeutlicht.

b) Vergleichen Sie die Summe aller Ausgaben mit der Summe aller Einnahmen und ziehen Sie daraus eine erste Schlussfolgerung.

c) Ist die Investition vorteilhaft, wenn mit einem Kalkulationszinssatz von 6 % gerechnet wird?

d) Wie kann man den internen Zinsfuß des Investitionsvorhabens berechnen? **(Nur Beschreibung, keine Rechnung!)**

e) Ein Zahlungsstrom bestehe nur aus positiven Zahlungen. Erhöht oder verringert sich der Barwert des Zahlungsstroms, wenn ein höherer Kalkulationszinssatz zugrunde gelegt wird? (Begründung!) **1+2+3+2+2 P.**

oder

6B. (Finanzmathematik)

Ein Unternehmen aus der Computerbranche hat einen Kredit über 100 Mill. € zu einem jährlichen Zinssatz von $p = 8{,}5$ aufgenommen, der mittels Annuitätentilgung bei jährlichen Tilgungsraten zurückgezahlt werden soll.

a) Wie hoch muss die jährliche Annuität sein, wenn der Kredit nach 15 Jahren vollständig getilgt sein soll?

b) Mit der Bank wurde für das 1. Jahr eine Tilgung von 2 % vereinbart. Nach welcher Zeit wird der Kredit vollständig zurückgezahlt sein?

c) Aus steuerlichen Gründen vereinbarte das Unternehmen mit der Bank ein anderes Darlehensmodell: Anstelle der vereinbarten 100 Mill. € werden nur 90 % dieser Summe ausgezahlt, dafür beträgt der Zinssatz auch nur 6,8 %.

c1) Wie hoch ist die Restschuld nach 6 Jahren (bei einer Anfangstilgung von 1 %)?

c2) Welchem anfänglichen effektiven Jahreszinssatz (bezogen auf die ersten sechs Jahre) entspricht die Finanzierungsvereinbarung? **(Nur Beschreibung des Ansatzes, keine Rechnung!)** **3+3+2+2 P.**

Lösungen zur Klausur Algebra 7/2002:
1A.

a) $a_1 = (CA+B)f = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 \\ 4 & 30 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5900 \\ 3400 \\ 3100 \end{pmatrix}$

Nebenrechnung: $CA = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 16 \\ 4 & 10 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

$$CA+B = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 16 \\ 4 & 10 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 \\ 4 & 30 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

b) $a_z = Ch = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

c) $a = a_1 + a_z = (CA+B)f + Ch$

1B.

a) $E - B = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -1/10 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1/10 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen:

3/4	0	−1/10	1	0	0
0	3/4	0	0	1	0
0	−1/10	0	0	0	1
1	0	−4/30	4/3	0	0
0	1	0	0	4/3	0
0	−1/10	1	0	0	1
1	0	−4/30	4/3	0	0
0	1	0	0	4/3	0
0	0	1	0	4/30	1
1	0	0	4/3	16/900	4/30
0	1	0	0	4/3	0
0	0	1	0	4/30	1

$$a = A(E-B)^{-1}n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 & 16/900 & 4/30 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 4/30 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 496 \\ 1200 \\ 720 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2192 \\ 5040 \\ 6768 \end{pmatrix}$$

oder:

$$a = Gn = \begin{pmatrix} 8/3 & 1232/900 & 8/30 \\ 0 & 128/3 & 2 \\ 4 & 976/300 & 132/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2192 \\ 5040 \\ 6768 \end{pmatrix}$$

b) $a = a \cdot (E - B)^{-1} n$

2A.

Rechnerische Bestimmung der aus der Skizze abgelesenen optimalen Lösung:
Aus dem LGS

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -8 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 20 \end{array}$$

ergibt sich $x_2^* = \dfrac{32}{5} = 6,4$,

$x_1^* = \dfrac{36}{5} = 7,2$ und $z^* = \dfrac{172}{5} = 34,4$.

2B. Das Ungleichungssystem wird durch Einführung von zwei Schlupfvariablen in ein Gleichungssystem mit zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen umgewandelt. Da die rechte Seite in der 2. Zeile negativ ist, wird diese Zeile mit -1 multipliziert; anschließend wird eine künstliche Variable v_1 eingeführt und die 1. Phase der Simplexmethode (die nach einer zulässigen Lösung sucht) gestartet:

Nr.	BV	c_B	x_1 0	x_2 0	x_3 0	u_1 0	u_2 0	v_1 -1	x_B	Θ
1	u_1	0	$\boxed{1}$	1	2	1	0	0	3	$\boxed{3}$
2	v_1	-1	2	2	2	0	-1	1	7	7/2
			$\boxed{-2}$	-2	-2	0	1	0	-7	
1	x_1	0	1	1	2	1	0	0	3	
2	v_1	-1	0	0	-2	-2	-1	1	1	
			0	$\boxed{0}$	2	2	1	0	-1	

Da es nicht gelingt, die künstliche Variable aus der Basis zu entfernen, gibt es keine zulässige Lösung des betrachteten Ungleichungssystems.

Alternative Lösung: Wegen $x_3 \geq 0$ gilt:

$$7 \leq 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 6,$$

was einen Widerspruch darstellt.

3A. $\dfrac{x^2+1}{x-3} > x-1$

1. Fall: $\boxed{x>3}$: $x^2+1 > (x-1)(x-3) = x^2-4x+3$
$\Longrightarrow \quad 4x > 2 \quad \Longrightarrow \quad x > \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L_1 = (3, \infty)$

2. Fall: $\boxed{x<3}$: $x^2+1 < (x-1)(x-3) = x^2-4x+3$
$\Longrightarrow \quad 4x < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L_2 = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$
Gesamtlösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \{x \,|\, x < \dfrac{1}{2} \text{ oder } x > 3\}$

3B. $|x-2| \geq \dfrac{1}{2}x - 1$

1. Fall: $\boxed{x \geq 2}$: $x - 2 \geq \dfrac{1}{2}x - 1$
$\Longrightarrow \quad \dfrac{1}{2}x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 2$
$L_1 = [2, \infty)$
2. Fall: $\boxed{x<2}$: $-x + -2 \geq \dfrac{1}{2}x - 1$
$\Longrightarrow \quad 3 \geq \dfrac{3}{2}x \quad \Longrightarrow \quad x \leq 2$
$L_2 = (-\infty, 2)$

Gesamtlösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R}$

Hinweis: Eine Skizze der Funktionen $f_1(x) = |x-2|$ und $f_2 = \dfrac{1}{2}x - 1$ kann die von Ihnen errechnete Lösung bestätigen.

4.

a) Die allgemeine Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Der Vektor $\hat{x} = (1,\, 1,\, 1,\, 0)^\top$ ist keine Lösung des LGS, da für ihn z. B. die zweite Gleichung nicht erfüllt ist.

c) Der Vektor $\overline{x} = (-2,\, 0,\, 2,\, 0)^\top$ ist eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, denn setzt man ihn in die auf der linken Seite des betrachteten LGS stehenden Ausdrücke ein, so ergibt sich in jeder Zeile der Wert Null.

Andere Begründung: $\overline{x}$ ist das Doppelte des in der allgemeinen Lösung beim Parameter t_1 stehenden Vektors und somit eine spezielle Lösung des homogenen Systems.

5. Die Variable $x_i \in \{0,1\}$ gibt an, ob die i-te Reise, $i = 1, \ldots, 5$ (s. Tabelle) durchgeführt werden soll (Wert $x_i = 1$) oder nicht ($x_i = 0$).
Zielfunktion: $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 \longrightarrow \max;$

NB: $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 6$ (Dauer)

$1100x_1 + 600x_2 + 800x_3 + 900x_4 + 1600x_5 \leq 3000$ (Kosten)

$x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$ (Abenteuer)

Variablenbeschränkungen: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$.

6A.
a)

b) Gesamtsumme der Ausgaben: 1600000
Gesamtsumme der Einnahmen: 1800000

Da die Einnahmen die Ausgaben übersteigen, ist die Investition bei einem kleinen Zinssatz (insbesondere bei $p = 0$) vorteilhaft.

c) $K = -1000000 - \dfrac{600000}{1,06} + 200000 \cdot \dfrac{1,06^9 - 1}{1,06^{10} \cdot 0,06} = -282700$

Nein, die Investition sollte (bei $p = 6$) lieber unterlassen werden.

d) Fasst man die erwarteten Einnahmen mittels der Barwertformel der Rentenrechnung zusammen, so ergibt sich der folgende Ansatz:

$$-1000000 - \frac{600000}{q} + 200000 \cdot \frac{q^9 - 1}{q^{10} \cdot (q-1)} = 0$$

Dieser ist numerisch zu lösen. Aus der (einzigen) Lösung q_{int} ergibt sich $p_{\text{int}} = 100(q_{\text{int}} - 1)$.

e) Wenn der Kalkulationszinssatz erhöht wird, verringert sich der Barwert, da jeder Summand stärker abgezinst (d.h. durch eine größere Zahl dividiert) wird.

6B.

a) Mit $S_0 = 100$ Mill. €, $p = 8,5$, $n = 15$ ergibt sich

$$A = S_0 \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = 12,042 \,\text{Mill. €}.$$

b) Die Annuität beträgt $A = 10,5$ Mill. €.
Aus $A = S_0 \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$ folgt nach Formelumstellung

$$n = \frac{\ln A - \ln(A - S_0 i)}{\ln q} = 20,326 \text{ [Jahre]}.$$

c) (1): Die Restschuld beträgt

$$S_n = S_0 q^n - A\frac{q^n - 1}{q - 1} = 92,88\,\text{Mill. €},$$

(wobei zu beachten ist, dass nur 90 Mill. € ausgezahlt wurden).
(2): Der Ansatz

$$S_n \stackrel{!}{=} S_0^N \cdot q_{\text{eff}} - A \cdot \frac{q_{\text{eff}}^n - 1}{q_{\text{eff}} - 1}$$

stellt eine Bestimmungsgleichung dar, die näherungsweise numerisch zu lösen ist.

Klausur Algebra Februar 2003

1. (Kurze Fragen – kurze Antworten)

a) Was bedeutet Regularität einer Matrix? Wie kann man diese überprüfen?

b) Können vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sein? (Begründung!)

c) Kann die inverse Matrix zu einer regulären Diagonalmatrix eine Nicht-Diagonalmatrix sein? (Begründung!)

d) Von einem linearen Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten sei bekannt, dass es mindestens eine Lösung hat. Kann es dann auch **genau** eine Lösung besitzen? **2+2+3+3 P.**

2. (Lineares Gleichungssystem)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus **(von Hand!)** und geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

b) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\bar{x} = (1, 1, 1, 0)^\top$ keine Lösung des LGS ist.

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $\hat{x} = (4, 0, -4, 0)^\top$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist. **6+2+2 P.**

3. (Abschreibungen)

Das Unternehmen Schlau & Berger möchte aus steuerlichen Gründen möglichst hohe Abschreibungen geltend machen.

a) Ein Anlagegut im Anschaffungswert von 100 000 € soll über fünf Jahre geometrisch degressiv mit einem Abschreibungssatz von 18 % abgeschrieben werden, danach über weitere fünf Jahre linear bis zum Restwert $R_n = 0$. Wie hoch ist der Buchwert am Ende des 8. Jahres?

b) Wäre der Abschreibungsbetrag im 6. Jahr größer, wenn (im Unterschied zu der in a) beschriebenen Situation) ein Jahr länger degressiv abgeschrieben werden würde?

c) Ist es möglich, das Anlagegut von 100 000 € im Laufe von 10 Jahren auf einen Restwert von 10 000 € geometrisch degressiv abzuschreiben? Man beachte, dass entsprechend den gesetzlichen Vorgaben der Abschreibungssatz höchstens 20 % betragen darf. **4+3+3 P.**

4A. (Grafische Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe)

a) Lösen Sie die folgende LOA auf grafischem Wege. Wie lautet die optimale Lösung und der optimale Zielfunktionswert?

$$\begin{array}{rcrcr} -3x & + & y & \to & \max \\ x & + & y & \geq & 1 \\ 3x & - & 5y & \geq & -10 \\ x & - & 5y & \leq & 5 \\ & & y & \geq & 0 \\ & & & & x \text{ beliebig} \end{array}$$

b) Was würde sich ergeben, wenn dieselbe Zielfunktion zu minimieren wäre?

c) Welchen optimalen Zielfunktionswert erhält man, wenn **zusätzlich** die Nebenbedingung $-3x + y = -6$ zu beachten ist? **10 P.**

oder

4B. (Simplexmethode)

Finden Sie eine optimale Lösung der folgenden LOA mittels Simplexmethode **(von Hand!)**:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \to & \min \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 30 \\ 4x_1 & & & + & x_3 & + & 5x_4 & \leq & 20 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_4 & \geq & 0 \\ & & & & & & & & x_3 \text{ beliebig} \end{array}$$

10 P.

....

5A. (Analytische Geometrie)

Gegeben seien die beiden Ebenen $E_1 : x+y-2z = 10$ und $E_2 : 2x-y+z = 20$.

a) Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden g_1 von E_1 und E_2 an sowie einen Punkt P_1, der sowohl in E_1 als auch in E_2 liegt.

b) Geben Sie einen Punkt P_2 von E_1 an, der nicht in E_2 liegt.

c) Geben Sie die Gleichung derjenigen Geraden g_2 an, die parallel zu der in Aufgabe a) ermittelten Geraden g_1 verläuft und den Punkt $P_3 = (1, 1, 1)^\top$ enthält.

d) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_3 an, die g_1 und P_3 enthält. **3+1+2+2 P.**

oder

5B. (Verflechtung und Leontief)

In einer Chemiefabrik werden aus den Substanzen S_1 und S_2 die Mischungen M_1, M_2, M_3 hergestellt, aus denen dann in einer zweiten Produktionsstufe die Produkte P_1, P_2, P_3 entstehen. Die benötigten Mengen(in gewissen Mengeneinheiten ME) sind folgenden Tabellen zu entnehmen:

		Bedarf (in ME) S_1	S_2
	M_1	2	1
je ME	M_2	3	2
	M_3	1	2

		Bedarf (in ME) M_1	M_2	M_3
	P_1	2	0	2
je ME	P_2	0	3	2
	P_3	4	3	0

Es ist jedoch zu beachten, dass in der ersten Produktionsstufe die Mischungen M_1, M_2, M_3 in der chemischen Reaktion teilweise selbst verbraucht werden, so dass an die zweite Produktionsstufe weniger abgegeben werden kann als tatsächlich hergestellt wird. Der Eigenverbrauch des Prozesses ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt:

		je ME M_1	M_2	M_3
Eigen-	M_1	0	0	0,2
verbrauch	M_2	0	0,25	0,5
(in ME) an	M_3	0	0	0,2

Wie viele Mengeneinheiten der Substanzen S_1 und S_2 sind für die Produktion von 100 ME an P_1, 200 ME an P_2 und 100 ME an P_3 bereitzustellen? **8 P.**

. . . .

6A. (Finanzmathematik)

Frau Y. schließt einen Sparplan ab, der vorsieht, dass sechs Jahre lang monatlich jeweils zu Monatsbeginn 60 € auf ein mit 6 % p. a. verzinsliches Konto eingezahlt werden. Im 7. Jahr erfolgen keine Einzahlungen mehr, jedoch wird das bis dahin aufgelaufene Kapital verzinst. Am Ende des 7. Jahres zahlt die Bank einen Bonus von 6 % auf **alle eingezahlten Beträge**.

a) Über welche Summe kann Frau Y. am Ende des 7. Jahres verfügen?

b) Welche Rendite erzielt Frau Y. mit dem Sparplan? **5+4 P.**

oder

6B. (Finanzmathematik)

Herr Z. schließt bei einer Fondsgesellschaft einen Spar- und Entnahmeplan ab. Dieser sieht monatliche (vorschüssige) Spareinzahlungen in Höhe von 100 € über einen Zeitraum von 20 Jahren sowie eine sofortige Einmalzahlung von 10 000 € vor. In der Sparphase wird mit einer Verzinsung von 7 % p. a. gerechnet. An die Sparphase schließt sich die 15-jährige Entnahmephase an, in der mit 5 % Verzinsung p. a. gerechnet wird und in der jährliche vorschüssige Entnahmen vorgesehen sind. In welcher Höhe? Hinweis: Am Ende der Entnahmephase soll das Kapital aufgezehrt sein. **9 P.**

Lösungen zur Klausur Algebra Februar 2003

1. a) Regularität einer Matrix $n \times n$-Matrix A: $\det(A) \neq 0$ bzw. A ist quadratisch und alle Spalten sind linear unabhängig bzw. A hat den vollen Rang n. Überprüfung druch Berechnung der Determinante oder Anwendung des Gaußschen Algorithmus.
b) Nein, vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig (allgemein: $n+1$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind stets linear abhängig).
c) Nein, die inverse Matrix zu einer Diagonalmatrix ist wiederum eine Diagonalmatrix. Dies ergibt sich z. B. aus der Anwendung des Gaußschen Algorithmus.
d) Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten, das eine Lösung besitzt, hat stets einen freien Parameter und damit unendlich viele Lösungen.

2. a)

x_1	x_2	x_3	x_4	re. S.
1	2	1	2	4
6	6	6	8	20
2	1	2	2	6
1	2	1	2	4
0	−6	0	−4	−4
0	−3	0	−2	−2
1	0	1	2/3	8/3
0	1	0	2/3	2/3
0	0	0	0	0

Die allgemeine Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Der Vektor $\bar{x} = (1,\,1,\,1,\,0)^\top$ ist keine Lösung des LGS, da für ihn z. B. die zweite Gleichung nicht erfüllt ist.
c) Der Vektor $\hat{x} = (-4,\,0,\,4,\,0)^\top$ ist eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, denn setzt man ihn in die auf der linken Seite des betrachteten LGS stehenden Ausdrücke ein, so ergibt sich in jeder Zeile der Wert null. Andere Begründung: $\hat{x}$ ist das Doppelte des in der allgemeinen Lösung beim Parameter t_1 stehenden Vektors und somit eine spezielle Lösung des homogenen Systems.

3. a) Degressive Abschreibung: $R_5 = A\left(1 - \frac{s}{100}\right)^5 = 100000 \cdot 0,82^5 = 37073,98$

Lineare Abschreibung: $R_5 = \overline{A}$, $\quad w = \dfrac{\overline{A} - R_n}{5} = \dfrac{37073,98 - 0}{5} = 7414,80$
$R_8 = \overline{R}_3 = \overline{A} - 3w = 37073,98 - 3 \cdot 7414,80 = 14829,58$

b) Degressive Abschreibung: $w_k = A \cdot \dfrac{s}{100}\left(1 - \dfrac{s}{100}\right)^{k-1}$

$w_6 = 100000 \cdot 0,18 \cdot 0,82^5 = 6673,32$

Nein, bei degressiver Abschreibung ergäbe sich im 6. Jahr ein geringerer Abschreibungsbetrag als bei linearer Abschreibung, beginnend mit dem 6. Jahr.

Anderer Lösungsweg: Der Übergang von degressiver zu linearer Abschreibung ist vorteilhaft ab dem Jahr $\lceil k \rceil$ mit $k = n + 1 - \dfrac{100}{s} = 10 + 1 - \dfrac{100}{18} = 5,44$, d. h., ab dem 6. Jahr ist lineare Abschreibung besser.

Ein Vergleich ergibt folgendes:

Übergang im 5. Jahr: $w_5^{degr} = 8138,19 > 7535,36 = w_5^{lin}$;
Übergang im 6. Jahr: $w_6^{degr} = 6673,32 < 7414,80 = w_6^{lin}$

c) Mit $A = 100000$ und $R_{10} = 10000$ gilt:

$$s = 100\left(1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{A}}\right) = 100\left(1 - \sqrt[10]{\frac{10000}{100000}}\right) = 20,57.$$

Nein, es ist nicht möglich.

Alternativer Lösungsweg: Bei Abschreibung mit gesetzlichem Höchstsatz von 20 % bleibt ein Restwert von $R_{10} = 10737,42 > 10000$ €.

4A. (Grafische Lösung einer LOA)

a) $x^* = -\frac{5}{8}, \quad y^* = \frac{13}{8}, \quad z^* = 3,5$

b) $z^* = -\infty$

c) $z^* = -6$

4B. (Simplexmethode)

Umgeformte Aufgabe:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
-3x_1 & - & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & - & x_4 & & & & & \to & \max \\
3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3' & + & 3x_3'' & + & x_4 & - & u_1 & & & = & 30 \\
4x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & + & 5x_4 & & & + & u_2 & = & 20 \\
\multicolumn{15}{r}{x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, u_1, u_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	u_1	u_2	x_B	θ_i
			-3	-1	1	-1	-1	0	0		
1	x_2	-1	2	1	-3	3	1	-1	0	30	$\boxed{10}$ $\leftarrow$
2	u_2	0	4	0	1	-1	5	0	1	20	/
3	/	/	1	0	2	-2	0	1	0	-30	
						$\uparrow$					
1	x_3''	-1	$2/3$	$1/3$	-1	1	$1/3$	$-1/3$	0	10	
2	u_2	0	$14/3$	$1/3$	0	0	$16/3$	$-1/3$	1	30	
3	/	/	$7/3$	$2/3$	0	0	$2/3$	$1/3$	0	-10	

Optimale Lösung: $x_1^* = x_2^* = 0$, $x_3^* = x_3'^* - x_3''^* = 0 - 10 = -10$, $x_4^* = 0$; $u_1^* = 0, u_2^* = 30$; $z^* = 10$

Anderer Lösungsweg (Einführung einer künstlichen Variablen):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
& & & & & & & & & & & & & - & v_1 & \to & \max \\
3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3' & + & 3x_3'' & + & x_4 & - & u_1 & & & + & v_1 & = & 30 \\
4x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & + & 5x_4 & & & + & u_2 & & & = & 20 \\
\multicolumn{17}{r}{x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, u_1, u_2, v_1 \geq 0}
\end{array}
$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	u_1	u_2	v_1	x_B	θ_i
			0	0	0	0	0	0	0	-1		
			-3	-1	1	-1	-1	0	0	/		
1	v_1	-1	2	1	-3	3	1	-1	0	1	30	$\boxed{10}$ $\leftarrow$
2	u_2	0	4	0	1	-1	5	0	1	0	20	/
3	/	/	-2	-1	3	-3	-1	1	0	0	-30	
						$\uparrow$						
1	x_3''	$0(-1)$	$2/3$	$1/3$	-1	1	$1/3$	$-1/3$	0	/	10	
1	u_2	0 (0)	$14/3$	$1/3$	0	0	$16/3$	$-1/3$	1	/	30	
3	/	/	0	0	0	0	0	0	0	/	0	
$3'$	/	/	$7/3$	$2/3$	0	0	$2/3$	$1/3$	0	/	-10	

Optimale Lösung: siehe oben.

5A. (Analytische Geometrie)

a)
$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & 2z & = 10 \\ & & -3y & + & 5z & = 0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rcrcl} x & & & - & \frac{1}{3}z & = 10 \\ & & y & - & \frac{5}{3}z & = 0 \end{array}$$

$$g_1: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) z. B. $P_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$ erfüllt Gleichung von E_1, aber nicht von E_2

c) Richtungsvektor von g_2 ist gleich dem (Vielfachen des) Richtungsvektors von g_1, d. h. $\quad g_2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $E_3: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

wobei $\quad s = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5B. (Verflechtung und Leontief)

$s = A^\top (E - C)^{-1} B^\top p$

$$E - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0,75 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \qquad (E - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$$

(Berechnung mittels Gaußschem Algorithmus oder Taschenrechner)

$$\begin{aligned} s &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 750 \\ 1700 \\ 750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7350 \\ 5650 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder

$$s = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 17/4 \\ 1 & 8/3 & 53/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 25/2 & 41/2 & 20 \\ 65/6 & 101/6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7350 \\ 5650 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es kann auch das LGS $(E-C)x = B^\top p$ gelöstund danach $s = A^\top x$ berechnet werden.

6A. (Finanzmathematik)

a) $E_6 = r(12+6,5\cdot i)\cdot\dfrac{q^6-1}{q-1} = 60\cdot(12+6,5\cdot 0,06)\cdot\dfrac{1,06^6-1}{0,06} = 743,40\cdot\dfrac{1,06^6-1}{0,06}$ $= 5185,45;$

$E_7 = E_6 \cdot q = 5496,58$

$E_{\text{ges}} = E_7 + B = 5496,58 + 0,06 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 60 = 5496,58 + 259,20 = 5755,78$

b) Endwertvergleich (gesucht: $q = q_{\text{eff}}$)

Ansatz: $60 \cdot (12 + 6,5 \cdot (q-1)) \cdot \dfrac{q^6-1}{q-1} \cdot q = 5755,78$

Mittels eines numerischen Näherungsverfahrens erhält man

q	linke S.
1,07	5719,85
1,071	5742,64
1,0716	5756,35
1,0715	5754,07

$i_{\text{eff}} = 7,16\,\%$

6B. (Finanzmathematik)

$$\begin{aligned} E_{20} &= r(12 + 6,5 \cdot i) \cdot \frac{q^{20}-1}{q-1} + K_0 \cdot q^{20} \\ &= 100(12 + 6,5 \cdot 0,07) \cdot \frac{1,07^{20}-1}{0,07} + 10000 \cdot 1,07^{20} \\ &= 1245,50 \cdot \frac{1,07^{20}-1}{0,07} + 38696,84 \\ &= 51059,88 + 38696,84 = 89756,72 \end{aligned}$$

Ansatz: $E_{20} = B_{15}$

$$B_{15} = R \cdot \frac{q^{15}-1}{q^{14}(q-1)} \quad \Longrightarrow \quad R = 89756,72 \cdot \frac{1,05^{14} \cdot 0,05}{1,05^{15}-1} = 8235,59$$

Herr Z. erhält jährlich 8235,59 €.

Wiederholungsklausur Algebra August 2003

1. (Matrizenmultiplikation)

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Halbfabrikaten H_1, H_2 und H_3 und diese wiederum aus drei Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 gefertigt, wobei folgende Mengeneinheiten (ME) aufgewendet werden müssen:

	je ME P_1	je ME P_2	je ME P_3
H_1	1	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

	A_1	A_2	A_3
je ME H_1	3	0	1
je ME H_2	4	2	1
je ME H_3	5	6	0

a) Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden für die Produktion von 600 ME P_1, 400 ME P_2 und 1000 ME P_3 benötigt?
b) Wie viel kosten diese Rohstoffe insgesamt, wenn A_1, A_2 und A_3 gleich teuer sind und für 100 € genau 1200 ME A_1 (bzw. A_2 oder A_3) erhältlich sind?
c) Berechnen Sie die Gesamtaufwandsmatrix für diesen Produktionsprozess.
d) Wie hoch sind die Materialkosten für eine Einheit von P_3 unter den in b) genannten Rohstoffpreisen? **5+2+2+3 P.**

. . . .

2. (Lineares Gleichungssystem)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & + & 3w & = & 5 \\
2x & + & 4y & + & 2z & - & 6w & = & 14 \\
4x & & & + & 4z & + & 6w & = & 42 \\
4x & & & + & 4z & + & 3w & = & 33
\end{array}$$

b) Gibt es eine spezielle Lösung, deren Komponenten alle größer oder gleich 2 sind? (Wenn ja, Beispiel angeben, wenn nein, beweisen.) **7+3 P.**

. . . .

3. (Modellierung einer LOA)

Eine Schilderfabrik fertigt aus $1\,\text{m}\times 1\,\text{m}$ großen Blechen dreieckige, runde und rechteckige Schilder, wobei der Meister aus den Erfahrungen der letzten zehn Jahren weiß, dass die folgenden Zuschnittvarianten günstig sind:

	Zuschnitt aus einer Ausgangsplatte				
	Variante 1	Variante 2	Variante 3	Variante 4	Variante 5
Dreiecke	5	4	4	2	0
Kreise	0	1	0	1	3
Rechtecke	0	0	2	2	3

Innerhalb der nächsten 20 Tage werden 2 880 Dreiecke, 1 310 Kreise und 550 Rechtecke benötigt. Aus technologischen Gründen soll die Variante 1 mindestens so oft wie alle anderen Varianten zusammen angewendet werden. Stellen Sie ein Modell auf, das einen minimalen Verbrauch an Ausgangsplatten zum Ziel hat. **6 P.**

4A. (Grafische Lösung einer LOA)

a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich der nachstehenden linearen Optimierungsaufgabe und geben Sie die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \longrightarrow & \min \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\ -4x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

b) Was ergibt sich bei Maximierung? **8+2 P.**

Zusatz. Es sollen zusätzlich die beiden Variablenbeschränkungen $x_1 \leq 100$ und $x_2 \leq 500$ gelten. Welche Veränderungen in den optimalen Lösungen ergeben sich bei Minimierung bzw. Maximierung der Zielfunktion? **(5 P.)**

oder

4B. (Simplexmethode)

a) Formen Sie die nachstehende lineare Optimierungsaufgabe in eine Aufgabe in (G)-Form um **(keine künstlichen Variablen einführen, nicht lösen!)**:

$$\begin{array}{lcl} 3x_1 \qquad\quad - \;\; x_3 & \longrightarrow & \min \\ 9x_1 \qquad\quad + 6x_3 & \leq & 15 \\ x_1 + 2x_2 - \;\; x_3 & \geq & 7 \\ 5x_1 + 4x_2 & = & 13 \\ \multicolumn{3}{r}{x_1,\, x_2 \geq 0, x_3 \text{ frei}} \end{array}$$

b) Finden Sie die optimale Lösung der folgenden linearen Optimierungsaufgabe oder stellen Sie deren Unlösbarkeit fest:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & - & x_3 & \longrightarrow & \max \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ -x_1 & + & x_2 & & & \geq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

4+6 P.

5A. (Lösungsmenge einer Ungleichung)

Beschreiben Sie die Menge aller Lösungen der Ungleichung

$$\frac{1-2x^2}{x+2} \leq 3-2x.$$

8 P.

Zusatz. Lösen Sie die Aufgabe geometrisch. **(5 P.)**

oder

5B. (Finanzmathematik)

In einem Gerichtsprozess wird Herr Prof. Schall wegen zu schwerer Klausuren verurteilt, beginnend ab sofort 20-mal jedes Jahr (jeweils am Jahrestag der Urteilsverkündung) 1 000 € für wohltätige Zwecke zu spenden.

a) Welchem Wert entsprechen diese Zahlungen am Tag der Urteilsverkündung, wenn man einen Zinssatz von 8 % unterstellt?

b) Welchen Wert erhält man, wenn bei gleichem Beginn und gleichem Zinssatz theoretisch unendlich lange gezahlt werden müsste?

c) Im Revisionsverfahren wird Prof. Schall freigesprochen. Er spart deshalb 20 Jahre lang die Summe von 1 000 € jährlich vorschüssig. Auf welchen Endwert kommt er bei gleicher Verzinsung von 8 % p.a. und einem Bonus von 10 % **auf alle eingezahlten Beträge**, der ihm am Ende des 20. Jahres gutgeschrieben wird? **3+2+3 P.**

Zusatz. Welche Rendite erzielt Prof. Schall mit dem in Teil c) beschriebenen Sparplan? **(5 P.)**

. . . .

Zusatzaufgabe (Beweis)

Die Matrix A sei regulär. Beweisen Sie, dass dann auch die inverse Matrix A^{-1} regulär ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Definition der inversen Matrix sowie die Beziehung $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$. **(5 P.)**

Lösungen zur Klausur Algebra 8/2003

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Bezeichnet man die zur linken Tabelle gehörige Matrix mit A, die der rechten Tabelle entsprechende Matrix mit B, mit $p = (600,\ 400,\ 1000)^\top$ den Vektor zu produzierender Produkte P_i sowie mit h und a die Vektoren zu fertigender Mengen an Halbfabrikaten bzw. einzusetzender Ausgangsstoffe, so gelten die Matrizengleichungen $a = B^\top \cdot h$ und $h = A \cdot p$. Daraus erhält man zunächst den Vektor $h = (4\,400,\ 10\,400,\ 16\,400)^\top$ (für die Halbfabrikate) und mit dessen Hilfe den gesuchten Vektor an Ausgangsstoffen $a = (136\,800,\ 119\,200,\ 14,800)^\top$.

b) Die Rohstoffe kosten $(a_1 + a_2 + a_3) \cdot \dfrac{100}{1200} = 22\,566,67$ €.

c) Eine weitere Berechnungsmöglichkeit besteht in der Nutzung der Beziehung $a = B^\top \cdot A \cdot p$, für die man als erstes die Gesamtaufwandsmatrix

$$G = B^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 54 & 66 & 78 \\ 50 & 58 & 66 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

und daraus den gesuchten Vektor bereitzustellender Ausgangsstoffe ermittelt: $a = G \cdot p = (136\,800,\ 119\,200,\ 14,800)^\top$.

d) $K = \frac{100}{1200} \cdot (1,\ 1,\ 1) \cdot G \cdot (0,\ 0,\ 1)^\top = \frac{100}{1200} \cdot (78+66+9) = \frac{100}{1200} \cdot 153 = 12,75$ €

$\boxed{\mathbf{2.}}$ a)

x	y	z	w	re.S.
1	-2	1	3	5
2	4	2	-6	14
4	0	4	6	42
4	0	4	3	33
1	-2	1	3	5
0	8	0	-12	4
0	8	0	-6	22
0	8	0	-9	13
1	0	1	0	6
0	1	0	$-3/2$	$1/2$
0	0	0	6	18
0	0	0	3	9
x	y	w	z	
1	0	0	1	6
0	1	$-3/2$	0	$1/2$
0	0	6	0	18
0	0	3	0	9
1	0	0	1	6
0	1	0	0	5
0	0	1	0	3
0	0	0	0	0

Allgemeine Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist die Größe $t \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.

b) Eine spezielle Lösung, in der alle Komponenten größer oder gleich 2 sind, muss den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{rcclcl} 6-t & \geq & 2 & \Longrightarrow & t \leq 4 & \text{(1. Komponente)} \\ 0+t & \geq & 2 & \Longrightarrow & t \geq 2 & \text{(4. Komponente).} \end{array}$$

(Die 2. und die 3. Komponente sind automatisch größer als 2.) Damit genügen alle Lösungen mit Parameterwerten $2 \leq t \leq 4$ der geforderten Bedingung.

3.

x_i – Anzahl, wie oft ein Blech nach Variante i zugeschnitten wird

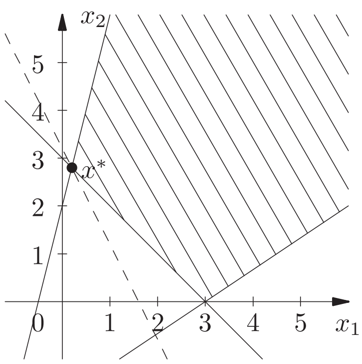
$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{Materialverbrauch:} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \longrightarrow & \min \\ \text{Dreiecke:} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & \geq & 2880 \\ \text{Kreise:} & & & x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 1310 \\ \text{Rechtecke:} & & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & \geq & 550 \\ \text{technolog. Bed.} & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \geq & 0 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Alle Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 müssen ganzzahlig sein.

4A.

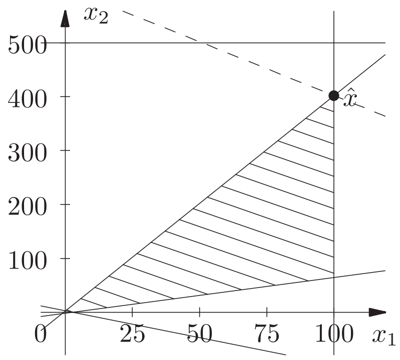
a) Der minimale Zielfunktionswert wird im Punkt $x^* = (\frac{1}{5}, \frac{14}{5})$ angenommen und beträgt $z^* = \frac{16}{5}$.

b) In Maximierungsrichtung ist der Zielfunktionswert unbeschränkt.



Zusatz. Bei Minimierung gibt es durch die hinzugekommenen Restriktionen keine Veränderungen, während bei Maximierung der optimale Zielfunktionswert jetzt endlich ist und $\hat{z} = 602$ beträgt; er wird für $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (100, 402)$ angenommen.
Die grafische Darstellung ist am besten in getrennten Koordinatensystemen mit unterschiedlichem Maßstab möglich (s. Abb.), da man sonst „nichts sieht". Man

kann sich allerdings auch überlegen, ob (bei Maximierung) die x_1-Beschränkung ($x_1 \leq 100$), die x_2-Beschränkung ($x_2 \leq 500$) oder beide, d. h. der Eckpunkt $(100, 500)$ des zulässigen Bereiches im Optimum aktiv sind.



4B.

a) Setzt man $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3' \geq 0$, $x_3'' \geq 0$, so ergibt sich:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
-3x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & & & & & \longrightarrow & \min \\
9x_1 & & & + & 6x_3' & - & 6x_3'' & + & u_1 & & & = & 15 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3' & + & x_3'' & & & - & u_2 & = & 7 \\
5x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & & = & 13 \\
 & & & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3', x_3'', u_1, u_2 \geq 0}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & & & & & & - & v_1 & \rightarrow & \max \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
-x_1 & + & x_2 & & & - & u_1 & + & v_1 & = & 3 \\
 & & & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, u_1, v_1 \geq 0} & &
\end{array}$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	v_1	x_B	Θ
			0	0	0	0	-1		
1	x_3	0	3	6	1	0	0	12	$\boxed{2}$
2	v_1	-1	-1	1	0	-1	1	3	3
3	/	/	1	-1	0	1	0	-3	
				$\uparrow$					
1	x_2	0	$1/2$	1	$1/6$	0	0	2	
2	v_1	-1	$-3/2$	0	$-1/6$	-1	1	1	
3			$3/2$	0	$1/6$	1	0	-1	

Es gibt keine zulässige Lösung.

Alternativ: Einführung von zwei künstlichen Variablen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & & & & & & & -v_1 & - & v_2 & \to & \max \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & + & v_1 & & & = & 12 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & u_1 & + & & + & v_2 & = & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	v_1	v_2	x_B	Θ
			0	0	0	0	-1	-1		
1	v_1	-1	3	6	1	0	1	0	12	$\boxed{2}$
2	v_2	-1	-1	1	0	-1	0	1	3	3
3	/	/	-2	-7	-1	1	0	0	-15	
				$\uparrow$						
1	x_2	0	1/2	1	1/6	0	/	0	2	
2	v_2	-1	$-3/2$	0	$-1/6$	-1	/	1	1	
3			3/2	0	1/6	1	/	0	-1	

Es gibt keine zulässige Lösung.

5A.

a) **Fall 1:** Ist $x > -2$, so ist der Nenner positiv. Nach Multiplikation der Ungleichung mit $x + 2$ ergibt sich

$$1 - 2x^2 \leq 3x + 6 - 2x^2 - 4x = 6 - x - 2x^2,$$

d. h. $x \leq 5$. Zusammen mit der Annahme $x > -2$ erhält man hieraus als erste Teillösungsmenge $L_1 = (-2, 5]$.
Fall 2: Für $x < -2$ ist der Nenner negativ, so dass die Multiplikation mit dem Nenner die Ungleichung

$$1 - 2x^2 \geq 6 - x - 2x^2,$$

also $x \geq 5$ liefert. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, so dass die zweite Teillösungsmenge leer ist: $L_2 = \emptyset$.
Die Gesamtlösungsmenge ist die Vereinigung von L_1 und L_2: $L = L_1 = (-2, 5]$.

5B.

a) $B_n^{vor} = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = 1000 \cdot \dfrac{1,08^{20} - 1}{1,08^{19} \cdot 0,08} = 10\,603,60\,€$

b) $B_\infty^{vor} = r \cdot \dfrac{q}{q-1} = 13\,500\,€$

c) $E_{20}^{vor} = r \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} + B = 1000 \cdot 1,08 \cdot \dfrac{1,08^{20} - 1}{0,08} + 20 \cdot 1000 \cdot 0,1 =$ $49422,92 + 2000 = 51422,92$

Zusatz. Ansatz: $1000 \cdot q \cdot \dfrac{q^{20} - 1}{q-1} = 51422,92$

Ein beliebiges numerisches Lösungsverfahren liefert $q = 1,0833$, also eine Effektivverzinsung von 8,33 % p.a.

Zusatzaufgabe.

Nach Definition der inversen Matrix gilt $A \cdot A^{-1} = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Nutzt man die Beziehung $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$ und setzt man $B = A^{-1}$, so ergibt sich

$$0 \neq \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = (\det A) \cdot (\det A^{-1}).$$

Folglich muss $\det A^{-1} \neq 0$ sein, d. h., A^{-1} ist regulär.

Klausur Algebra Februar 2004

1. (Lineares Gleichungssystem)
a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus **(von Hand!)** und geben Sie dessen allgemeine Lösung an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$$

b) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\widetilde{x} = (1, 2, 7, -1)^\top$ keine Lösung des LGS ist.
c) Zeigen Sie, dass der Vektor $\hat{x} = (3, 0, -3, 0)^\top$ eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS ist.
d) Das obige LGS soll in der Matrixform $Ax = b$ geschrieben werden. Wie müssen dann A, x und b lauten? **5+1+2+2 P.**

. . . .

2. (Kurze Fragen, kurze Antworten)
a) Geben Sie Bedingungen an die Matrix A bzw. den Vektor b an, damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$
α) genau eine Lösung, β) keine Lösung
besitzt.

b) Gegeben sei die Menge $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Konstruieren Sie eine Menge $B \neq \emptyset$ derart, dass $A \cap B = \emptyset$ gilt.

c) Beschreiben Sie **in eigenen Worten**, worin der Unterschied zwischen einer Äquivalenzbeziehung und einer Implikation liegt. **2+2+2 P.**

. . . .

3A. (Grafische Lösung einer LOA)
a) Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe grafisch:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Ändert sich die Lösung, wenn dieselbe Zielfunktion zu minimieren ist? **10 P.**

ZUSATZ. Wie lautet der maximale Zielfunktionswert und die optimale Lösung bei Maximierung der Zielfunktion, wenn zusätzlich zu den obigen Nebenbedingungen noch die Gleichung $2x_1 + x_2 = 2$ gelten soll? **zus. 5 P.**

oder

3B. (Rechnerische Lösung einer LOA) Finden Sie mit Hilfe der Simplexmethode **(von Hand!)** eine Lösung der folgenden LOA (es müssen nicht alle Lösungen angegeben werden). Formen Sie vorher die LOA in die (G)-Form um.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

8+2 P.

b) Wie ist zu verfahren, wenn die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist?

ZUSATZ. Was ergibt sich bei Minimierung der Zielfunktion? **zus. 5 P.**

....

4A. (Rentenrechnung)

a) Ein Auto im Wert von 20 000 € soll durch eine Anzahlung in Höhe von 5 000 € sowie 36 (nachschüssig zahlbare) Monatsraten finanziert werden. Der vereinbarte Zinssatz betrage 6 %. Wie hoch sind die Monatsraten?

b) Jemand spart 20 Jahre lang einmal jährlich vorschüssig 1 000 € (prognostizierte Rendite in der Anlagephase: 7 % p. a.) und möchte danach innerhalb von 10 Jahren sein angespartes Geld vollständig verbrauchen, wozu ihm jährlich vorschüssig ein Betrag A ausbezahlt wird (garantierte Verzinsung in der Entnahmephase: 5 % p. a.). Wie hoch ist A? **5+5 P.**

oder

4B. (Zinseszinsrechnung)

a) Eine 1993 gekaufte Antiquität wurde im Jahre 2003 zum dreifachen Preis verkauft. Welche (jährliche) Rendite erzielte der Kunsthändler?

b) Wie lange hätte er bei einem Wertzuwachs von 6 % p. a. warten müssen, um die Antiquität zum dreifachen Preis verkaufen zu können?

c) Gerhard legt 10 000 € für drei Jahre an, seine Frau Doris hingegen die Summe S. Während Gerhards Kapital einmal jährlich zu 6 % verzinst wird, erhält Doris monatlich 0,5 % gutgeschrieben.Wie hoch muss S sein, damit beide nach drei Jahren dieselbe Summe auf ihrem Konto haben?

d) Begründen Sie, warum sich in c) $S < 10000$ ergibt. **2+2+4+2 P.**

....

5A. (Inverse Matrix) Es soll der Parameter b bestimmt werden, für den die Matrizengleichung $AC = B$ erfüllt ist, wobei gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b & 3 & -2 \\ b & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -7/2 & 9/2 \end{pmatrix}.$$

Jemand schlägt vor, die Matrix A zu invertieren (z. B. mittels Taschenrechner) und die Inverse mit der Matrix B zu multiplizieren. Danach sei nur noch das Produkt mit der Matrix C zu vergleichen, um den Parameter b zu bestimmen.
a) Ist dieser Weg gangbar? **(Begründung!)**

b) Falls der vorgeschlagene Lösungsweg durchführbar ist, so gehen Sie wie beschrieben vor. Welches Ergebnis wird für b erhalten?

c) Kann es bei einer anderen Matrix B (aber derselben Matrix A) passieren, dass die Gleichung $AC = B$ unlösbar ist? **(Begründung!)** **2+4+2 P.**

oder

5B. (Modellierung)

Ein Unternehmen der Metallbranche stellt Bohrmaschinen, Fräsmaschinen sowie verschiedene Kleinteile her. Das dabei verwendete Material, die verbrauchte Energie, der entstehende Gewinn und die benötigte Arbeitszeit je hergestellter Maschine bzw. Tonne sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	Material (t)	Energie (kWh)	Gewinn (Tsd. Euro)	Arbeitszeit (Std.)
Bohrmaschine	1,2	5,8	5,0	450
Fräsmaschine	1,5	4,9	6,5	410
Tonne Kleinteile	1,3	3,0	0	30

Vom Material stehen 100 t zur Verfügung, Elektroenergie soll nicht mehr als 500 kWh verbraucht werden, und der Gewinn soll mindestens 200 Tsd. Euro betragen. Ferner werden 0,05 t bzw. 0,025 t Kleinteile je hergestellte Bohr- bzw. Fräsmaschine verbraucht. Wie ist die Produktion zu gestalten, damit bei geringstmöglicher aufzuwendender Arbeitszeit mindestens 20 Bohrmaschinen, mindestens 25 Fräsmaschinen sowie genau 2 t Kleinteile verkauft werden können? Stellen Sie ein entsprechendes Modell auf (alles Produzierte soll auch absetzbar sein). **(Keine Lösung!)** **8 P.**

. . . .

6A. (Lösungsmenge einer Ungleichung)

a) Ermitteln Sie alle Lösungen der Ungleichung $|x-1| \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.

b) Stellen Sie die Funktionen $f_1(x) = |x-1|$ und $f_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ grafisch dar und interpretieren Sie auf diese Weise die Lösungsmenge der in a) betrachteten Ungleichung. **6+2 P.**

oder

6B. (Zahlenfolgen)

Eine verallgemeinert exponentiell wachsende Kenngröße genüge der Bildungsvorschrift $a_n = b + c(1+s)^n$, wobei $b, c, s > 0$ gelten soll.
a) Wie lautet das allgemeine Glied der Folge $\{w_n\}$ der Wachstumstempi? (Hinweis: Das Wachstumstempo ist wie folgt definiert: $w_n = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$.)
b) Weisen Sie nach, dass die Folge $\{w_n\}$ streng monoton wachsend ist, d. h., dass $\forall\, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $w_{n+1} > w_n$ gilt. **8 P.**

Lösungen zur Klausur Algebra 2/2004

1. a)

x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.
1	2	1	2	4
2	1	2	2	6
3	3	3	4	10
1	2	1	2	4
0	−3	0	−2	−2
0	−3	0	−2	−2
1	0	1	2/3	8/3
0	1	0	2/3	2/3
0	0	0	0	0

$$x = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\tilde{x} = (1, 2, 7, -1)^\top$ ist keine Lösung, denn nach Einsetzen in die erste Beziehung ergibt sich ein Widerspruch: $1 + 4 + 7 - 2 = 10 \neq 4$.

c) $\bar{x} = (3, 0, -3, 0)^\top$ ist eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS, denn bei Einsetzen in **jede** Gleichung ergibt sich stets null.
Andere Begründung: Der Vektor $\bar{x}$ ist das (-3)-Fache des ersten Richtungsvektors.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

2. a) α) A regulär, d. h. $\det A \neq 0$
β) $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} (A|b)$

b) Zum Beispiel: $B = \{1, 3, 5, \ldots\}$

c) Äquivalenz ist wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Implikation ist nur dann falsch, wenn aus einer richtigen Aussage (Prämisse) eine falsche (Konklusion) folgt.

3A. a)

Der Zielfunktionswert wächst bei Maximierung unbeschränkt an.

b) Bei Minimierung lautet der optimale Zielfunktionswert $z^* = 1$. Die gesamte Strecke zwischen den Punkten $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimal.

ZUSATZ.

Der zulässige Bereich besteht nunmehr nur aus einer Strecke.

Die optimale Lösung lautet $x^* = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ und der optimale Zielfunktionswert $z^* = \frac{7}{3}$.

3B. a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrrcr}
 & & & & & & & - & v_1 & & & & \to & \max \\
x_1 & + & x_2 & - & u_1 & + & v_1 & & & & & & = & 1 \\
-x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_2 & & & & = & 3 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & u_3 & & = & 4 \\
 & & & & & & & & & & x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, v_1 & & \geq & 0
\end{array}$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	u_1	v_1	u_2	u_3	x_B	θ_i	
			0	0	0	-1	0	0			
			1	1	0	/	0	0			
1	v_1	-1	1	1	-1	1	0	0	1	$\boxed{1}$	$\leftarrow$
2	u_2	0	-1	1	0	0	1	0	3	/	
3	u_3	0	0	1	0	0	0	1	4	/	
4	/	/	-1	-1	1	0	0	0	-1		
			$\uparrow$								
1	x_1	0(1)	1	1	-1	/	0	0	1	/	
2	u_2	0(0)	0	2	-1	/	1	0	4	/	
3	u_3	0(0)	0	1	0	/	0	1	4	/	
4	/	/	0	0	0	/	0	0	0		
$4'$	/	/	0	0	-1	/	0	0	1		
					$\uparrow$						

Der Zielfunktionswert der LOA wächst unbeschränkt.

b) Man müsste überall in der LOA die Variable x_1 durch die Differenz zweier nichtnegativer Variablen ersetzen: $x_1 = x_1' - x_1''$. Nach Lösung der Aufgabe ist diese Transformation wieder rückgängig zu machen.

Zusatz. Bei Minimierung ändern sich lediglich die Vorzeichen der Zielfunktionskoeffizienten. Deshalb ändert sich in der obigen Tabelle nur die 3. Kopfzeile und als Folge die allerletzte Zeile.

			x_1	x_2	u_1	v_1	u_2	u_3			
			0	0	0	−1	0	0			
Nr.	BV	c_B	−1	−1	0	/	0	0	x_B	θ_i	
1	v_1	−1	1	1	−1	1	0	0	1	$\boxed{1}$	←
2	u_2	0	−1	1	0	0	1	0	3	/	
3	u_3	0	0	1	0	0	0	1	4	/	
4	/	/	−1	−1	1	0	0	0	−1		
			↑								
1	x_1	0(1)	1	1	−1	/	0	0	1	/	
2	u_2	0(0)	0	2	−1	/	1	0	4	/	
3	u_3	0(0)	0	1	0	/	0	1	4	/	
4	/	/	0	0	0	/	0	0	0		
4″	/	/	0	0	1	/	0	0	−1		

Der optimale Zielfunktionswert beträgt (nach Rücktransformation) $z^* = 1$. Eine optimale Lösung lautet: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$.

4A. a) $20000 = 5000 + r \cdot (12 + 5,5 \cdot 0,06) \cdot \dfrac{1,06^3 - 1}{1,06^3 \cdot 0,06} \quad \Longrightarrow \quad r = 455,12$ €

b) $1000 \cdot 1,07 \cdot \dfrac{1,07^{20} - 1}{0,07} = A \cdot \dfrac{1,05^{10} - 1}{1,05^9 \cdot 0,05} \quad \Longrightarrow \quad A = 5410,22$ €

4B. a) $K \cdot (1+i)^{10} = 3K \quad \Longrightarrow \quad 1 + i = \sqrt[10]{3} \quad \Longrightarrow \quad i = \sqrt[10]{3} - 1 = 0,1161 =$ $11,61\,\%$

b) $K \cdot 1,06^n = 3K \quad \Longrightarrow \quad 1,06^n = 3 \quad \Longrightarrow \quad n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1,06} = 18,85 \approx 19$ Jahre

c) $10000 \cdot 1,06^3 = S \cdot 1,005^{36} \quad \Longrightarrow \quad S = 9952,67$ €

d) Hier wirkt sich der Zinseszinseffekt positiv aus, so dass das zu verzinsende Kapital kleiner sein kann.

5A. a) Der Weg ist durchführbar, sofern die zu A inverse Matrix existiert; es gilt dann $C = A^{-1}B$.

b) Die Berechnung der inversen Matrix zu A kann am besten mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus erfolgen, indem man neben A die Einheitsmatrix desselben Typs schreibt. Wird dann A in die Einheitsmatrix umgeformt, so entsteht aus E gerade A^{-1} (die Inverse kann auch mittels Taschenrechner berechnet werden):

1	3	1	1	0	0	1	0	4/7	1/7	3/7	0
2	−1	1	0	1	0	0	1	1/7	2/7	−1/7	0
1	1	1	0	0	1	0	0	2/7	−3/7	−2/7	1
1	3	1	1	0	0	1	0	0	1	1	−2
0	−7	−1	−2	1	0	0	1	0	1/2	0	−1/2
0	−2	0	−1	0	1	0	0	1	−3/2	−1	7/2

Mit der berechneten Inversen A^{-1} gilt nun

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & -1 & 7/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -7/2 & 9/2 \end{pmatrix},$$

und mittels des aus der Matrizengleichung $A^{-1}B = C$ resultierenden Vergleichs aller Elemente erhält man $b = 1$.

c) Eine solche Matrizengleichung kann auch unlösbar sein, im vorliegenden Fall etwa dann, wenn in $C = A^{-1} \cdot B$ das Element $c_{11} = 2$ lauten würde, da sich dann die widersprüchlichen Beziehungen $b = 2$ und $b = 1$ ergäben.

5B. Mit der Variablendefinition

x_1 – Anzahl an produzierten Bohrmaschinen (in Stück)
x_2 – Anzahl an produzierten Fräsmaschinen (in Stück)
x_3 – Menge an produziertem Kleinmaterial (in t)

ergibt sich folgendes Modell:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 450x_1 & + & 410x_2 & + & 30x_3 & \longrightarrow & \min \\ 1,2x_1 & + & 1,5x_2 & + & 1,3x_3 & \leq & 100 \\ 5,8x_1 & + & 4,9x_2 & + & 3,0x_3 & \leq & 500 \\ 5,0x_1 & + & 6,5x_2 & & & \geq & 200 \\ -0,05x_1 & - & 0,025x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$
$$x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 25,\ x_3 \geq 0 \quad (x_1, x_2 \text{ ganzzahlig}).$$

6A. a) Zur Ermittlung aller Lösungen der Ungleichung $|x-1| \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ hat man für $z = x - 1$ die beiden Fälle $z \geq 0$ und $z < 0$ zu unterscheiden (im ersteren Fall gilt $|z| = z$, im letzteren $|z| = -z$).

Fall 1: $z \geq 0 \iff x \geq 1 \implies |x-1| = x-1$: Hieraus folgen die Beziehungen

$$x - 1 \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \implies \frac{3}{2}x \leq \frac{5}{2} \implies x \leq \frac{5}{3},$$

woraus sich die Teillösungsmenge $L_1 = \{x \,|\, 1 \leq x \leq \frac{5}{3}\} = [1, \frac{5}{3}]$ ergibt.

Fall 2: $z < 0 \iff x < 1 \implies |x - 1| = -(x - 1)$: Aus der ursprünglichen

Ungleichung erhält man in diesem Fall

$$-(x-1) \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x \implies x \geq -1$$

und somit die Teillösungsmenge $L_2 = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$.

Endgültiges Ergebnis: $L_{\text{ges}} = L_1 \cup L_2 = \left[-1, \frac{5}{3}\right]$.

b)

6B. a) $w_n = \dfrac{c(1+s)^n s}{b + c(1+s)^n}$

b) Streng monotones Wachstum bedeutet $w_n < w_{n+1} \;\; \forall\, n$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu den folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{c(1+s)^n s}{b + c(1+s)^n} &< \frac{c(1+s)^{n+1} s}{b + c(1+s)^{n+1}} \\
b + c(1+s)^{n+1} &< b(1+s) + c(1+s)^{n+1} \\
b &< b(1+s)\,.
\end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist aber wegen $s > 0$ erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

a) $w_n = s - \dfrac{bs}{b + c(1+s)^n}$

b) Wegen $s > 0$ ist $1 + s > 1$ und folglich $(1+s)^{n+1} > (1+s)^n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
Damit ist der Nenner in w_{n+1} größer, somit der Bruch kleiner und folglich die Differenz größer als in w_n.

Wiederholungsklausur Algebra August 2004

1. (Kurze Fragen, schnelle Antworten)

a) Wann sind zwei Matrizen verkettbar?

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass sich die Matrizenprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ bilden lassen, aber nicht gleich sind.

c) Was versteht man unter unterjähriger Verzinsung? Welche Arten der unterjährigen Verzinsung gibt es? **2+3+3 P.**

2. (Matrizenmultiplikation)

In einer Keksfabrik werden täglich 20 kg der Sorte K_1, 30 kg der Sorte K_2 und 100 kg der Sorte K_3 hergestellt. Die Produktion erfolgt in der Weise, dass in einer ersten Produktionsstufe zwei Teig-Grundmischungen T_1 und T_2 zubereitet werden, aus denen dann unter Zugabe von Zucker bzw. Glasur die Endprodukte gefertigt werden. Die Teigmischungen bestehen aus Mehl (M), Zucker (Z), Fett (F), Eiern (E) sowie Kakaopulver (K). Die Maßeinheiten für die Backzutaten seien Gramm (für Mehl, Zucker, Fett und Kakao), Milliliter (für die Glasur) und Stück (Eier). Als Einheit für die Endprodukte K_i bzw. Teigmischungen T_i wird Kilogramm verwendet. Schließlich betragen die Einstandspreise für die täglich zu beschaffenden Zutaten:

Mehl	Zucker	Fett	Kakaopulver	Glasur	Eier
0,60 €/kg	0,65 €/kg	1,- €/kg	6,- €/kg	7,50 €/l	0,09 €/Stck

Die benötigten Mengen an Backzutaten sind folgenden Tabellen zu entnehmen:

	je Einheit	
	T_1	T_2
M	450	350
Z	250	300
F	250	300
E	2	1
K	0	25

		T_1	T_2	Z	G
je	K_1	$0,450$	$0,500$	30	20
Ein-	K_2	$0,800$	$0,150$	0	50
heit	K_3	$0,200$	$0,750$	50	0

a) Welche Mengen an Backzutaten werden täglich benötigt?
b) Wie hoch sind die Beschaffungskosten für die Backzutaten und was kostet durchschnittlich ein Kilogramm Kekse hinsichtlich des Materialeinsatzes? **7+3 P.**

3 A. (Lineares Gleichungssystem)

Geben Sie die allgemeine Lösung des nebenstehenden linearen Gleichungssystems an **(Handrechnung!):**

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\
4x_1 & & & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 42 \\
2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 10
\end{array}
$$

8 P.

oder

3 B. (Modellierung) Die Eisbecher-Neukreation eines berühmten Chemnitzer Eiskonditors soll den nachstehenden Bedingungen genügen:
Die Herstellungskosten sollen so gering wie möglich sein. Der prozentuale Fettgehalt des Eisbechers soll höchstens 17 % und der Kaloriengehalt höchstens 900 kcal betragen. Als Bestandteile sind Eis, Nüsse, Grenadillen, Mangos und Diät-Gummibärchen vorgesehen. Das Gesamtgewicht des Bechers soll zwischen 300 g und 400 g liegen. Der Grenadillen-Anteil soll gerade doppelt so groß wie der Anteil an Nüssen sein, während der Eisanteil mindestens so groß sein soll wie der der übrigen Bestandteile zusammen. Bekannt sind folgende Daten:

	Eis	Nüsse	Grenadillen	Mangos	Gummibärchen
Fettanteil (in %)	12	15	3	0	2
Kalorien (kcal/100 g)	200	800	70	40	50
Preis (Euro/kg)	2	5	6	3	4

Stellen Sie das Modell einer linearen Optimierungsaufgabe auf, die das Problem des Eiskonditors beschreibt **(keine rechnerische Lösung!)**. **8 P.**

....

4 A. (Ungleichung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{x^2+2}{x-3} > x-1$. **8 P.**

oder

4. B (Ungleichung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $2|x-2| \leq x+2$. **8 P.**

....

5. A (Finanzmathematik)
Ein Sparer schließt mit der Sparkasse folgenden Vertrag: Wenn er ein bestimmtes Kapital 8 Jahre lang nicht zurückfordert, wird es mit 6 % jährlich verzinst; zuzüglich erhält er nach 8 Jahren einen Bonus von 20 % seines eingesetzten Kapitals.
a) Welchen Endbetrag erzielt er?
b) Welche Rendite erzielt er? **4+3 P.**

oder

5 B. (Finanzmathematik)
Beim Verkauf eines Gebrauchtwagens erhält der Verkäufer zwei Angebote:
Angebot A: 3000 € sofort und 6000 € in 10 Monaten;

Angebot B: 2100 € in 6 Monaten und 7000 € in 1 Jahr.
Welches Angebot soll er annehmen, wenn er sein Geld jederzeit zu 5 % p. a. anlegen kann? Kommentieren Sie Ihr Ergebnis. **7 P.**

. . . .

6 A. (Grafische Lösung einer LOA)

Lösen Sie die nebenstehende lineare Optimierungsaufgabe grafisch oder stellen Sie deren Unlösbarkeit fest: **8 P.**

$$\begin{array}{rcrcr} -x & - & 2y & \to & \min \\ -x & + & y & \leq & 3 \\ x & - & y & \leq & 3 \\ -x & - & y & \leq & -2 \\ x & + & y & \leq & 5 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

oder

6 B. (Simplexmethode)

Finden Sie mit Hilfe der Simplexmethode **(Handrechnung!)** eine optimale Lösung der nebenstehenden linearen Optimierungsaufgabe oder stellen Sie deren Unlösbarkeit fest: **8 P.**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & \to & \min \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & = & 6 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

. . . .

Zusatzaufgabe. Eine modebewusste junge Dame möchte sich Sommerhosen kaufen. Die angebotenen 3/4-Hosen sind für ihren Geschmack zu kurz, die modischen 7/8-Hosen jedoch zu lang. Welche Länge müsste die Textilindustrie fertigen, damit unsere junge Dame zufrieden gestellt wird? **3 P.**

Lösungen zur Klausur Algebra 8/2004:

1.

a) Die Spaltenzahl von A muss gleich der Zeilenzahl von B sein, damit $A \cdot b$ gebildet werden kann.

b) Man kann am einfachsten (2,2)-Matrizen betrachten.

c) Unterjährige Verzinsung erfolgt mehrfach innerhalb der ursprünglichen Zinsperiode. Man unterscheidet relative und äquivalente unterjährige Verzinsung.

2.

Wir erweitern die gegebenen Tabellen (bzw. Matrizen) in geeigneter Weise bzw. transponieren sie:

$A =$

	T_1	T_2	Z	G
M	450	350	0	0
Z	250	300	1	0
F	250	300	0	0
E	2	1	0	0
K	0	25	0	0
G	0	0	0	1

$B =$

	K_1	K_2	K_3
T_1	$0,450$	$0,800$	$0,200$
T_2	$0,500$	$0,150$	$0,750$
Z	30	0	50
G	20	50	0

Ferner führen wir den Vektor der Endprodukte $e = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix}$ ein.

Dann ergeben sich die Gesamtproduktionsmatrix aus $G = A \cdot B$ und der gesuchte Backzutaten-Mengenvektor als $a = G \cdot e$:

$$a = G \cdot e = \begin{array}{c|ccc} & K_1 & K_2 & K_3 \\ \hline M & 377,50 & 412,5 & 352,5 \\ Z & 292,5 & 245 & 325 \\ F & 262,5 & 245 & 275 \\ E & 1,4 & 1,75 & 1,15 \\ K & 12,5 & 3,75 & 18,75 \\ G & 20 & 50 & 0 \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55175 \\ 45700 \\ 40100 \\ 195,5 \\ 2237,5 \\ 1900 \end{pmatrix}$$

Die Keksproduktion erfordert täglich 55,175 kg Mehl, 45,7 kg Zucker, 40,1 kg Fett, 195,5 Stück Eier, 2,24 kg Kakaopulver und 1,9 l Glasur. Dafür sind insgesamt 148,18€ aufzuwenden, was einem durchschnittlichen Materialeinsatz von 0,99€/kg Keks entspricht.

3 A.

x_1	$x-2$	x_3	x_4	re.S.
1	2	-3	1	7
4	0	6	4	42
2	-4	6	2	10
1	2	-3	1	7
0	-8	18	0	14
0	-8	12	0	-4
1	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{21}{2}$
0	1	$-\frac{9}{4}$	0	$-\frac{7}{4}$
0	0	-6	0	-18
1	0	0	1	6
0	1	0	0	5
0	0	1	0	3

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$ beliebig

3 B. Bezeichnen $x_1, \ldots, x_5$ die eingesetzten Mengen an Eis, Nüssen, Grenadillen, Mangos und Gummibärchen (jeweils in g), so ergibt sich das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{1000} \cdot (2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_5) & \to & \min & \\
12x_1 + 15x_2 + 3x_3 + 2x_5 & \leq & 17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) & [\% \cdot \text{g}] \\
2x_1 + 8x_2 + 0,7x_3 + 0,4x_4 + 0,5x_5 & \leq & 900 & [\text{kcal}] \\
300 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 400 & [\text{g}]) \\
x_3 & = & 2x_2 & [\text{g}] \\
x_1 & \geq & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & [\text{g}] \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 &
\end{array}$$

4. A: 1. Fall: $x > 3$

Aus $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x - 1$ folgt $x^2 + 2 > x^2 - 4x + 3$, d. h. $4x > 1$ bzw. $x > \dfrac{1}{4}$
Damit erhalten wir in diesem Fall die Lösungsmenge $L_1 = (3, \infty)$.

2. Fall: $x < 3$

Aus $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x - 1$ folgt $x^2 + 2 < x^2 - 4x + 3$, d. h. $4x < 1$ bzw. $x < \dfrac{1}{4}$. Somit gilt $L_2 = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$. Gesamt-Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \setminus \left[\dfrac{1}{4}, 3\right]$.

4. B:

1. Fall: $x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 4 \leq x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 6$

Damit ist $L_1 = [2, 6]$.

2. Fall: $x < 2 \quad \Longrightarrow \quad -2x + 4 \leq x + 2 \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq 3x \quad \Longrightarrow \quad x \geq \dfrac{2}{3}$

Damit ist $L_2 = \left[\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

Gesamt-Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \left[\dfrac{2}{3}, 6\right]$.

Bemerkung: Selbstverständlich ist auch eine Fallunterscheidung $x > 2$, $x \leq 2$ oder auch $x \geq 2$, $x \leq 2$ möglich. Beide führen auf das dasselbe Resultat.

5 A.

Gegeben: K_0 – (unbekanntes) Kapital; $i = 0,06$

a) Gesamtendwert: $K_{\text{ges}} = K_0 \cdot (1+i)^8 + \text{Bonus} = K_0 \cdot 1,06^8 + 0,2K_0 = 1,7938 \cdot K_0$

Er verfügt über das 1,79-Fache des eingesetzten Kapitals.

b) Der Ansatz $K_0\,(1 + i_{\text{eff}})^8 = 1,7938K_0$ liefert $i_{\text{eff}} = 7,58\,\%$.

5. B

a) Barwertvergleich: $B_A = 3000 + \dfrac{6000}{1 + 0,05 \cdot \frac{10}{12}} = 8760$

$$B_B = \frac{2100}{1 + 0,05 \cdot \frac{6}{12}} + \frac{7000}{1 + 0,05 \cdot 1} = 8715,44$$

b) Trotz geringerer Gesamtsumme sollte er sich für das erste Angebot entscheiden.

6 A.

$x^* = 1$
$y^* = 4$
$z^* = -9$

6 B. Ersatzaufgabe

$$\begin{array}{rcl} - v_1 - v_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 - x_3 + u_1 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + \quad + v_1 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 + \quad + v_2 & = & 6 \\ x_i, u_1, v_i & \geq & 0 \end{array}$$

			x_1	x_2	x_3	u_1	v_1	v_2			
Nr.	BV	c_B	0	0	0	0	-1	-1	x_B	Θ	
1	u_1	0	1	1	-1	1	0	0	3	3	
2	v_1	-1	$\boxed{1}$	3	-9	0	1	0	1	$\boxed{1}$	$\leftarrow$
3	v_2	-1	1	-1	7	0	0	1	6	6	
4	/	/	$\boxed{-2}$	-2	2	0	0	0	-7		
			$\uparrow$								
1	u_1	0	0	-2	$\boxed{8}$	1	/	0	2	$\boxed{1/4}$	$\leftarrow$
2	x_1	0	1	3	-9	0	/	0	1	/	
3	v_2	-1	0	-4	16	0	/	1	5	5/16	
4	/	/	0	4	$\boxed{-16}$	0	/	0	-5		
					$\uparrow$						
1	x_3	0	0	$-1/4$	1	1/8	/	0	1/4		
2	x_1	0	1	3/4	0	9/8	/	0	13/4		
3	v_2	-1	0	0	0	-2	/	1	1		
4	/	/	0	0	0	2	/	0	-1		

Die 1. Phase ist beendet, aber die künstliche Variable v_2 befindet sich noch mit einem positiven Wert in der Basis $\Longrightarrow$ die ursprüngliche lineare Optimierungsaufgabe besitzt keine zulässige Lösung.

Zusatz. Der Handel könnte z. B. Hosen mit einer Länge anbieten, die in der Mitte von $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$ liegen: $l = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{6+7}{8} = \frac{13}{16}$. Der neueste Schrei werden also demnächst 13/16-Hosen sein.