Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Luderer

Februar 2007

Klausur Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler (Bachelor)

- **Arbeitszeit: 90 Minuten**
- Füllen Sie diese Seite sorgfältig aus. Legen Sie am Ende die sortierten Lösungsblätter in diese Mappe.
- Schreiben Sie jede Aufgabe auf ein separates Blatt; mehrere Blätter pro Aufgabe sind möglich.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut leserlich** Ihren Namen sowie die Aufgabennummer.
- Der Lösungsweg muss stets erkennbar sein.

Vorname Name

Ich habe außer dieser Mappe ☐ Blätter abgegeben.

Bitte bewerten Sie die folgenden angekreuzten Aufgaben (bei Wahlmöglichkeit jeweils nur eine):

	1	
	2	
3A	oder	**3B**
4A	oder	**4B**
5A	oder	**5B**
6A	oder	**6B**
	Zusatz	

1. (Kurze Fragen – kurze Antworten)

a) Was ist eine reguläre bzw. eine singuläre Matrix?

b) Ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle von null verschieden sind, invertierbar? (Begründung!)

c) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem unlösbar sein? In welchem Fall besitzt es genau eine Lösung?

d) Was versteht man unter der (quadratischen) Taylorapproximation einer Funktion?

e) Was versteht man unter den Niveaulinien einer Funktion (zweier Veränderlicher)? **2+2+2+2+2 P.**

. . . .

2. (Ungleichungen) a) Man ermittle alle Lösungen der Ungleichung $\frac{x+4}{x^2} > 5$.

b) Man zeige: Wenn die Ungleichung $a < b$ gilt und die Zahlen a und b gleiches Vorzeichen besitzen, so dreht sich bei den Kehrwerten dieser Zahlen das Relationszeichen um, d. h. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. **6+4 P.**

. . . .

3 A (Matrizenmultiplikation) In einem zweistufigen Produktionsprozess werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Halbfabrikaten H_1, H_2 und H_3 und diese wiederum aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei folgende Mengeneinheiten (ME) aufgewendet werden müssen:

	je ME P_1	je ME P_2	je ME P_3
H_1	1	2	3
H_2	4	5	6
H_3	7	8	9

	R_1	R_2	R_3
je ME H_1	3	2	1
je ME H_2	4	9	8
je ME H_3	5	6	7

a) Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden für die Produktion von 300 ME an P_1, 200 ME an P_2 und 100 ME von P_3 benötigt?
b) Wie viel kosten diese Rohstoffe insgesamt, wenn für 100 € genau 120 ME R_1 geliefert werden und R_2 sowie R_3 für denselben Preis erhältlich sind?
c) Berechnen Sie die Gesamtaufwandsmatrix für diesen Produktionsprozess. **5+2+3 P.**

oder

3 B (Lineares Gleichungssystem)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem **(von Hand!)**:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & 5 \\ x & + & 2y & - & 3z & + & w & = & 7 \\ 2x & & & + & 3z & + & 2w & = & 21 \\ 4x & & & + & 3z & + & 4w & = & 33 \end{array}$$

b) Gibt es eine spezielle Lösung, deren Komponenten alle größer oder gleich 2 sind? (Wenn ja, Beispiel angeben, wenn nein, beweisen.) **7+3 P.**

4 A. (Funktionen einer Veränderlichen)

Der mittlere Verbrauch v von Süßwaren einer Familie in Abhängigkeit vom monatlichen Familieneinkommen x (beide Größen gemessen in €/Monat) werde durch die folgende Funktion beschrieben:

$$v = f(x) = 63,41 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1963}{x}+0,59}\,.$$

a) Welchem Wert strebt der Süßwarenverbrauch für (unbeschränkt) wachsendes Einkommen zu?

b) Berechnen Sie die Elastizität der Funktion f in einem beliebigen Punkt x.

c) In welchem Wert werden Süßwaren verbraucht, wenn das monatliche Familieneinkommen 4500 € beträgt?

d) Berechnen Sie unter Nutzung der Elastizität, um wie viel Prozent sich näherungsweise der Süßwarenverbrauch ändert, wenn sich das Familieneinkommen aus c) um 2 % erhöht. **3+3+1+3 P.**

oder

4 B. (Taylorapproximation)

a) Für 1000 Yen gibt es x sfr (Schweizer Franken). Wie viel Yen werden dann für einen Schweizer Franken gezahlt?

(Am 17.11.06 erhielt man für 1000 Yen den Gegenwert von 10,575 sfr.)

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1000}{x}$ an der Stelle $x_0 = 10$ in eine Taylorreihe $q(x)$ bis zum quadratischen Glied.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der in b) gewonnenen Taylorentwicklung den sfr-Yen-Kurs für $x = 11$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

d) Ein erfahrener Devisenhändler rechnet das sfr-Yen-Verhältnis zumeist (näherungsweise) im Kopf aus. Mit welcher möglichst einfachen Formel wird er rechnen (Hinweis: lineare Näherung)? Welches Ergebnis erhält er für $x = 11$? **1+4+2+3 P.**

Zusatz. Warum funktioniert die Näherungsmethode aus d) mit der dort verwendeten Formel schlecht, wenn 1000 Yen ca. 5 sfr wert sind?

1 ZP.

. . . .

5 A. (Methode der kleinsten Quadratsumme)

Die monatlichen Absatzzahlen (in Mill. Dollar) einer Unternehmung haben sich in den vergangenen Monaten wie folgt entwickelt:

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai
Absatz	40,4	32,9	25,7	19,3	14,8

a) Berechnen Sie mit Hilfe der MKQ eine quadratische Trendfunktion.

b) Sagen Sie den voraussichtlichen Wert für September voraus und unterziehen Sie diesen einer kritischen Wertung. Wäre auch ein linearer Ansatz sinnvoll? **6+4 P.**

oder

5 B. (Kurvendiskussion)

Gegeben sei die von der Zeit abhängige Funktion

$$y = f(t) = \frac{1000}{23 + 2 \cdot \mathrm{e}^{-t}}\,.$$

Man führe für $f(t)$ eine Kurvendiskussion durch (Definitionsbereich, Nullstellen, Achsenabschnitt auf der y-Achse, Extremstellen, Grenzverhalten für $t \to \pm\infty$, grafische Darstellung, Wertebereich). **10 P.**

....

6 A. (Extremwerte mit Nebenbedingungen)

Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy}$ unter der Nebenbedingung $2x - y = 3$. Handelt es sich um Maxima oder Minima?

Hinweis: Verwenden Sie die Eliminationsmethode. **10 P.**

oder

6 B. (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 3xy - 6x + \frac{3}{2}y^3 + 3y.$$

b) Wählen Sie unter diesen mithilfe hinreichender Kriterien diejenigen aus, in denen lokale Extrema vorliegen und bestimmen Sie deren Art. **6+4 P.**

....

Zusatz.

Der Sprecher der PDSS (Partei Deutscher Steuer-Senker) schlägt im Rahmen der permanenten Steuerreform einen neuen und sehr einfachen Tarif vor. Und zwar soll der Grenzsteuersatz (das ist der Steuersatz auf den „letzten verdienten Euro“, gemessen in Prozent) wie folgt aussehen:

$$s(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 30 \\ 20, & 30 < x \end{cases}$$

Hierbei ist x das Jahreseinkommen (in Tausend Euro, abgekürzt: Teuro).

Ermitteln Sie eine Funktion g, die die jährliche steuerliche Belastung in Abhängigkeit vom Jahreseinkommen beschreibt und berechnen Sie die zu zahlenden Steuern bei einem Jahreseinkommen von 25 000 € bzw. 55 000 €. **5 ZP.**

Lösungen zur Klausur Mathematik I 2/07

$\boxed{1}$

a) Eine quadratische Matrix ist regulär, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind (sie den vollen Rang hat, ihre Determinante ungleich null ist). Eine quadratische Matrix ist singulär, wenn ihre Spalten linear abhängig sind (sie nicht den vollen Rang hat, ihre Determinante gleich null ist).

b) Ja, weil die Determinante einer Diagonalmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente und damit im vorliegenden Fall von null verschieden ist.

c) Da der Vektor $(0, 0, \ldots, 0)^\top$ stets Lösung eines homogenen LGS ist (triviale Lösung), kann es nicht unlösbar sein. Falls die Koeffizientenmatrix regulär ist, ist dies auch die einzige Lösung.

d) Die Taylorapproximation einer Funktion in einem gegebenen Punkt x_0 ist ein Polynom, das in diesem Punkt den gleichen Funktionswert, die gleiche erste Ableitung, die gleiche zweite Ableitung etc. besitzt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Bei einer quadratischen Approximation erfolgt die Summierung bis $k = 2$.

e) Die Niveaulinien von Funktionen mehrerer Veränderlicher sind Mengen von Punkten mit gleichem Funktionswert. Für Funktionen zweier Veränderlicher lassen sie sich in der x_1, x_2-Ebene als Kurven darstellen.

$\boxed{2}$

a) Wegen $x^2 \geq 0$ ist der Nenner stets positiv (für $x = 0$ ist der Quotient nicht definiert).
Nach Multiplikation mit dem Nenner folgt $x + 4 > 5x^2$, d. h. $5x^2 - x - 4 < 0$. Untersucht man zunächst die Gleichung $5x^2 - x - 4 = 0$, so erhält man die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{4}{5}$. Da der Graph von $f(x) = 5x^2 - x - 4$ nach oben gekrümmt ist, gilt $f(x) < 0$ für $x \in (-\frac{4}{5}, 1)$. Die Lösungsmenge lautet somit $L = (-\frac{4}{5}, 1) \setminus \{0\}$.

b) Multipliziert man eine Ungleichung mit einer positiven Zahl, bleibt das Relationszeichen erhalten, multipliziert man mit einer negativen Zahl, dreht sich das Ungleichungszeichen um.

Ferner erhält man gerade die Kehrwerte der Zahlen a und b, wenn man die ursprüngliche Ungleichung $a < b$ mit dem Faktor $\frac{1}{ab}$ multipliziert. Es kommt also darauf an, welches Vorzeichen das Produkt ab besitzt.

Endgültige Antwort: Haben a und b gleiches Vorzeichen (woraus $ab > 0$ folgt), so gilt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, haben sie unterschiedliches Vorzeichen, dreht sich die Ungleichung um.

$\boxed{\textbf{3A}}$ Bezeichnet man die zur linken Tabelle gehörige Matrix mit A, die der rechten Tabelle entsprechende Matrix mit B, mit $p = (300,\ 200,\ 100)^\top$ den Vektor zu produzierender Produkte P_i sowie mit h und r die Vektoren zu fertigender Mengen an Halbfabrikaten bzw. einzusetzender Ausgangsstoffe, so gelten die Matrizengleichungen $r = B^\top \cdot h$ und $h = A \cdot p$. Daraus erhält man zunächst den Vektor $h = (1\,000,\ 2\,800,\ 4\,600)^\top$ (für die Halbfabrikate) und mit dessen Hilfe den gesuchten Vektor an Ausgangsstoffen $r = (37\,200,\ 54\,800,\ 55\,600)^\top$.

b) Die Rohstoffe kosten $(r_1 + r_2 + r_3) \cdot \dfrac{100}{120} = 123\,000$ €.

c) Eine weitere Berechnungsmöglichkeit besteht in der Nutzung der Beziehung $r = B^\top \cdot A \cdot p$, für die man als erstes die Gesamtaufwandsmatrix

$$G = B^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 54 & 66 & 78 \\ 80 & 97 & 114 \\ 82 & 98 & 114 \end{pmatrix}$$

und daraus den gesuchten Vektor bereitzustellender Ausgangsstoffe ermittelt: $r = G \cdot p = (37\,200,\ 54\,800,\ 55\,600)^\top$.

$\boxed{\textbf{3B}}$

x	y	z	w	re. Seite
1	−2	3	1	5
1	2	−3	1	7
2	0	3	2	21
4	0	3	4	33
1	−2	3	1	5
0	4	−6	0	2
0	4	−3	0	11
0	8	−9	0	13
1	0	0	1	6
0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	3	0	9
0	0	3	0	9
1	0	0	1	6
0	1	0	0	5
0	0	1	0	3
0	0	0	0	0

a) Allgemeine Lösung: $(x,\ y,\ z,\ w) = (6,\ 5,\ 3,\ 0) + t \cdot (-1,\ 0,\ 0,\ 1)$; hierbei ist $t \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.

b) Eine spezielle Lösung, in der alle Komponenten größer oder gleich 2 sind, muss den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{rclcll} 6 - t & \geq & 2 & \Longrightarrow & t \leq 4 & \text{(1. Komponente)} \\ 0 + t & \geq & 2 & \Longrightarrow & t \geq 2 & \text{(4. Komponente).} \end{array}$$

(Die 2. und die 3. Komponente sind automatisch größer als 2.) Damit genügen alle Lösungen mit Parameterwerten $2 \leq t \leq 4$ der geforderten Bedingung.

$\boxed{\textbf{4A}}$ a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 63,41 \cdot \mathrm{e}^{0,59} = 114,39$ [€/Monat]

b) $f'(x) = \dfrac{124473,83}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1963}{x}+0,59}$;

$$\varepsilon_{f,x}(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{124473,83}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1963}{x}+0,59} \cdot \frac{x}{63,41 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1963}{x}+0,59}} = \frac{1963}{x}$$

c) $f(4500) = 73,95$ [€/Monat]

d) Mit $\varepsilon_{f,x}(4500) = \frac{1963}{4500}$ ergibt sich für die näherungsweise Änderung des Verbrauchs $\frac{\Delta f}{f} \approx \varepsilon_{f,x} \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{1963}{4500} \cdot 2\,\% \approx 0,87\,\%$.

Dies entspricht einem Anstieg von 73,95 € um etwa 0,64 € auf 74,59 €.

$\boxed{\textbf{4B}}$ a) $\frac{1000}{x}$

b) $f(x) = \frac{1000}{x}$, $f'(x) = -\frac{1000}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2000}{x^3}$;

$f(10) = 100$, $f'(10) = -10$, $f''(10) = 2$

Taylorapproximation: $q(x) = 100 - 10(x-10) + \frac{2}{2}(x-10)^2 = 300 - 30x + x^2$

c) $q(11) = 100 - 10 \cdot 1 + 1^2 = 91$; $\quad f(11) = \frac{1000}{11} = 90,91$

Die Näherung ist recht gut.

d) Lineare Näherung: $l(x) = 100 - 10 \cdot (x-10) = 100 - 10\Delta x = 200 - 10x$; speziell für $x = 11$ ergibt sich: $l(11) = 200 - 110 = 90$

Zusatz. Die Größe Δx muss „klein" sein. Daher würde sich im vorliegenden Fall eine schlechte Näherung ergeben: $l(5) = 150$, $f(5) = \frac{1000}{5} = 200$

$\boxed{\textbf{5A}}$ a) Wir ordnen dem Monat März den Variablenwert $x = 0$ zu und erhalten $y = f(x) = 0,4857x^2 - 6,48x + 25,649$.

b) Dem Monat September entspricht der Wert $x = 6$. Damit ergibt sich die Prognose $f(6) = 4,25$. Der quadratische Ansatz approximiert die gegebenen Werte hinreichend gut. Ein linearer Ansatz hingegen würde (da der Anstieg offensichtlich negativ ist) nach einer gewissen Zeit einen negativen Absatz liefern, was ökonomisch wenig sinnvoll erscheint.

$\boxed{\textbf{5B}}$ a) $f(t) = \dfrac{1\,000}{23 + 2\mathrm{e}^{-t}}$, $f'(t) = \dfrac{2\,000\mathrm{e}^{-t}}{(23 + 2\mathrm{e}^{-t})^2}$, $f''(t) = \dfrac{2\,000\mathrm{e}^{-t}(2\mathrm{e}^{-t} - 23)}{(23 + 2\mathrm{e}^{-t})^3}$

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$, da Nenner $\neq 0 \ \forall t$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 40$

Nullstellen: Da der Zähler nicht null werden kann, existieren keine.

Extremstellen: Wegen $2000\mathrm{e}^{-t} \neq 0 \ \forall \ t$ existieren keine.

Grenzverhalten: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \frac{1000}{23} = 43,5$; $\quad \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$

Wertebereich: $W(f) = \left(0, \frac{1\,000}{23}\right)$

$\boxed{\textbf{6A}}$ Auflösen der Nebenbedingung nach $y = 2x - 3$ und Einsetzen in die Zielfunktion führt auf

$$\tilde{f}(x) = f(x, 2x-3) = \mathrm{e}^{-x(2x-3)} = \mathrm{e}^{-2x^2+3x}$$

mit $\tilde{f}'(x) = (-4x+3)\,\mathrm{e}^{-2x^2+3x}$ und $\tilde{f}''(x) = \left[-4 + (-4x+3)^2\right]\,\mathrm{e}^{-2x^2+3x}$.
Bestimmung stationärer Punkte: $\tilde{f}'(x) \stackrel{!}{=} 0$. Da e^{-z} stets größer als null ist, muss gelten $-4x+3=0$, also $\bar{x} = \frac{3}{4}$, wozu $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = -\frac{3}{2}$ gehört. Damit gibt es als einzigen stationären Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$. Wegen $\tilde{f}''(\bar{x}) < 0$ handelt es sich hierbei um eine lokale Maximumstelle.

$\boxed{\textbf{6B}}$

Für die betrachtete Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 3xy - 6x + \frac{3}{2}y^3 + 3y$ lauten die notwendigen Bedingungen für Extrema:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x - 3y - 6 &&= 0 \\ f_y(x,y) &= -3x + \tfrac{9}{2}y^2 + 3 &&= 0\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Beziehung mit 2 und addiert beide Gleichungen, erhält man $9y^2 - 3y = 3y(3y-1) = 0$. Ein Produkt ist null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. Dies führt zu einer Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{lll} 1) \;\; y_1 = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 1\,; \\ 2) \;\; y_2 = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & x_2 = \frac{7}{6}\,. \end{array}$$

Damit gibt es zwei stationäre Punkte: $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{7}{6}, \frac{1}{3})$.

Hinreichende Bedingungen: Die zweiten partiellen Ableitungen $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = -3$ und $f_{yy} = 9y$ liefern den Ausdruck

$$\mathcal{A} = \det H_f(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = 54y - 9.$$

Einsetzen von $(\bar{x}, \bar{y})$: $\mathcal{A}\big|_{(\bar{x},\bar{y})} = -9 \implies$ es liegt kein Extremum vor.
Einsetzen von $(\tilde{x}, \tilde{y})$: $\mathcal{A}\big|_{(\tilde{x},\tilde{y})} = 18 - 9 > 0 \implies$ es liegt ein Extremum vor; wegen $f_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 6 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

$\boxed{\textbf{Zusatz.}}$

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}1x, & 0 \le x \le 30 \qquad \text{(speziell gilt: } g(30) = 3) \\ 3 + 0{,}2(x - 30), & 30 < x \end{cases}$$

Für die konkreten Werte an zu versteuerndem Einkommen ergibt sich:

$g(25) = 2{,}5$ (entspricht 2 500 € Steuern),

$g(55) = 8$ (entspricht 8 000 € Steuern).