1 A. (Lineares Gleichungssystem – Gauß'scher Algorithmus)

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem **von Hand** mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 14 \\ -x & - & y & - & z & = & -7 \end{array}$$

b) Geben Sie mindestens zwei spezielle Lösungen an oder begründen Sie, dass dies nicht möglich ist.

c) Für welche Werte von a hat das folgende LGS keine Lösung?

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & ay & = & 4 \end{array}$$

5+2+3 P.

. . . .

2. (Matrizenrechnung)

Gegeben seien die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie **von Hand** folgende Matrizen (sofern möglich; falls nicht möglich, Begründung angeben!):

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad B^\top \cdot A, \quad A^{-1}, \quad B^{-1}, \quad A \cdot A^{-1}.$$

8 P.

. . . .

3. (Differenzial und Elastizität)

Der Body Mass Index (BMI), erlaubt eine Einteilung des Grades an Über- bzw. Untergewicht von erwachsenen Frauen und Männern. Er berechnet sich nach der Formel

$$\text{BMI} = f(G, K) = \frac{G}{K^2} = \frac{\text{Gewicht [in kg]}}{(\text{Körpergröße [in m]})^2}.$$

Untersuchen Sie (bei fixierter Körpergröße $\overline{K}$), um wie viel

a) sich der BMI absolut verändert, wenn sich das Gewicht um ΔG ändert (Nutzen Sie das Differenzial!),

b) sich der BMI prozentual verändert, wenn sich das Gewicht um 1 % verringert (Nutzen Sie die Elastizität!). Ist der BMI elastisch?

c) das Gewicht G verringert werden muss, damit sich der BMI um eins verringert.

Hinweis: Betrachten Sie zur Vereinfachung die Funktion $g(G) = f(G, \overline{K})$. **3+3+3 P.**

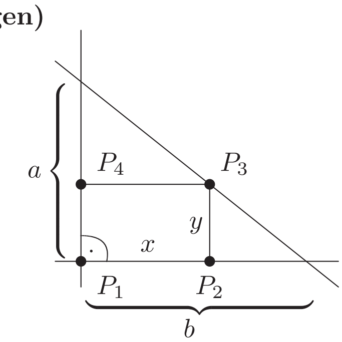
4 A (Extremwerte ohne Nebenbedingungen)

Berechnen Sie alle Extrema der Funktion $g(x,y) = x^3 - y^3 + 5axy$, wobei a ein (unbekannter) Parameter ist.
Hinweise: Unterscheiden Sie verschiedene Fälle für a. Sollten Sie bei einem stationären Punkt keine Aussage hinsichtlich der Art des Extremums erhalten, so können Sie zur Entscheidung Punkte aus der Umgebung des berechneten Punktes untersuchen. **10 P.**

oder

4 B. (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

Ein dreieckiges Grundstück soll mit einem Gebäude von maximaler rechteckiger Grundfläche bebaut werden. Das Grundstück ist an einer rechtwinkligen Wegkreuzung gelegen, s. Abb.; die Seitenlängen a und b sind gegeben.



a) Für welche Seitenlängen x und y ergibt sich eine maximale Grundfläche? (Hinweis: Bestimmen Sie eine Gleichung, der die Koordinaten des Punktes P_3 genügen müssen, indem Sie ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in P_1 einführen und beachten, dass P_3 auf der schrägen Geraden liegt.)
b) Wie groß ist die maximale Gebäudegrundfläche, wenn die Seitenlängen des Grundstücks $a = 16\,\text{m}$ und $b = 24\,\text{m}$ betragen? **8+2 P.**

. . . .

5 A. (Methode der kleinsten Quadratsumme)

Die monatlichen Absatzzahlen (in Mill. €) einer Unternehmung haben sich in den vergangenen Monaten wie folgt entwickelt:

Monat	Februar	März	April	Mai	Juni
Absatz	40,4	32,9	25,7	19,3	14,8

a) Berechnen Sie mit Hilfe der MKQ eine quadratische Trendfunktion.

b) Sagen Sie den voraussichtlichen Wert für Oktober voraus und unterziehen Sie diesen einer kritischen Wertung. Wäre auch ein linearer Ansatz sinnvoll? **5+2 P.**

Zusatz Ermitteln Sie unter Nutzung der errechneten Prognosefunktion den Zeitpunkt, an dem voraussichtlich die „Talsohle" beim Absatz erreicht sein wird, sowie den Monat, in dem erstmals wieder das Niveau des im Februar erzielten Absatzes erreicht sein wird. **4 ZP**

oder

5 B. (Funktionen zweier Veränderlicher)

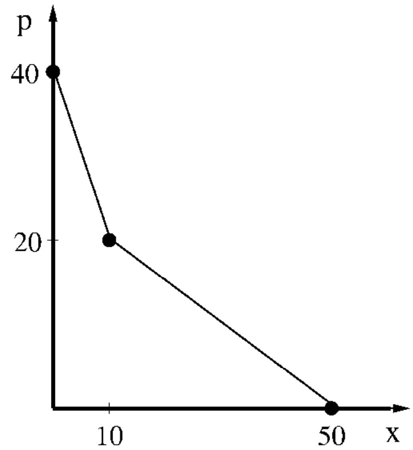
a) In der Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = 5 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ beschreibe x_i die Menge des i-ten Inputfaktors (gemessen in ME_i) und y den Output (gemessen in ME). Man ermittle die Gleichungen der Isoquanten (= Linien gleichen Outputs) für $y = 5$, $y = 10$ und $y = 15$ und stelle diese grafisch dar.

b) Gegeben sei die Nutzenfunktion $U = g(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2$. Wie ändert sich der Nutzen U, wenn man – ausgehend von einer bestimmten Güterkombination $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ – die Mengen nutzenstiftender Güter beide verdoppelt? **5+2 P.**

. . . .

6 A. (Preis-Absatz-Funktion)

Gegeben sei eine (geknickte) Preis-Absatz-Funktion $p = f(x)$ (siehe Abb.).



a) Geben Sie die mathematische Darstellung für $f(x)$ an (Achtung: Die Funktion ist abschnittsweise definiert!)

b) Geben sie die mathematische Darstellung der Erlösfunktion $E = g(x)$ an.

c) Die Gesamtkostenfunktion des Monopolisten sei $K(x) = 100 + 4x$. Man ermittle die Gewinnzone des Monopolisten. **3+2+5 P.**

oder

6 B. (Taylorapproximation)

a) Approximieren Sie mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung die Funktion $f(x) = 2 + \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ durch eine lineare Funktion $l(x)$ bzw. durch eine quadratische Funktion $q(x)$.

b) Stellen Sie f, l und q in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

Berechnen Sie für $\bar{x} = 1,01$ die Funktionswerte $f(\bar{x})$, $l(\bar{x})$ und $q(\bar{x})$ und vergleichen Sie diese kritisch miteinander. **5+3+2 P.**

. . . .

Zusatz. Gina möchte schrecklich gern abnehmen und stellt sich daher täglich zur selben Zeit auf die Waage, nur mit ihrem Handy bekleidet, das sie nie ablegt. Die (sehr genaue) Waage wiegt intern auf 1 g genau, zeigt aber nur auf 100 g genau an (d. h. eine Nachkommastelle). Gestern wog Gina 58,7 kg, heute sind es 58,6. „100 g abgenommen“, simst Gina an Tino, ihren Freund. Ist diese Aussage korrekt? **3 P.**

Lösungen Mathematik I Wdh. Bachelor 8/2007

$\boxed{1}$

a)

x	y	z	re. Seite
1	1	-1	-2
2	-1	3	14
-1	-1	-1	-7
1	1	-1	-2
0	-3	5	18
0	0	-2	-9
1	0	$2/3$	4
0	1	$-5/3$	$-18/3$
0	0	-2	-9
1	0	0	1
0	1	0	$3/2$
0	0	1	$9/2$

Einzige (eindeutige) Lösung:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

b) Das ist nicht möglich, da die Lösung eindeutig ist, denn es gibt keine Restmatrix bzw. keine Nichtbasisvariablen.

c)

x	y	re. Seite
1	1	3
1	$-a$	4
1	1	3
0	$-a-1$	1

Wenn gilt $-a-1=0$, d. h. $a=-1$, so gibt es keine Lösung.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ lässt sich nicht bilden

$$B^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, B^{-1} existiert nicht

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die inverse Matrix A^{-1} ist **von Hand** zu berechnen.

$\boxed{3}$ a) Es sei $g(G) = f(G, \overline{K})$. Dann gilt $\mathrm{d}g = g'(\overline{G}) \cdot \Delta G = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \Delta G$.

b) $\varepsilon = g'(G) \cdot \dfrac{G}{g(G)} = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \dfrac{G}{\frac{1}{\overline{K}^2} \cdot G} = 1.$ Wenn sich G um 1 % verringert, so verringert sich der BMI ebenfalls um 1 %. Der BMI ist 1-elastisch (bei fixierter Körpergröße).

c) $B = g(G) = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot G, \quad \overline{B} = \dfrac{1}{\overline{K}^2} \cdot \overline{G}, \quad B_{\text{neu}} = \overline{B} - 1$

$$\Longrightarrow \quad G_{\text{neu}} = \overline{K}^2 \cdot B_{\text{neu}} = \overline{K}^2 \left(\overline{B} - 1\right) = \overline{K}^2 \left(\frac{\overline{G}}{\overline{K}^2} - 1 \right) = \overline{G} - \overline{K}^2$$

Oder: $\Delta B = -1 = \dfrac{\overline{G} - \Delta G}{\overline{K}^2} - \dfrac{\overline{G}}{\overline{K}^2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta G = \overline{K}^2$. Das Gewicht muss um $\overline{K}^2$ [kg] verringert werden.

$\boxed{\textbf{4 A}}$ Es gilt $f_x = 3x^2 + 5ay, \quad f_y = -3y^2 + 5ax, \quad H_f = \begin{pmatrix} 6x & 5a \\ 5a & -6y \end{pmatrix}$.

Im Weiteren werden die beiden Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ unterschieden.

Fall 1: $a = 0$: Einziger stationärer Punkt ist $(x, y) = (0, 0)$. Auf Grund von $\mathcal{A} = \det H_f = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$ kann zunächst keine Aussage über die Art des Extremums getroffen werden. Eine Untersuchung von benachbarten Punkten zeigt jedoch, daß im Punkt $(0, 0)$ kein Extremum vorliegt, denn die Funktion f wächst in x-Richtung und fällt in y-Richtung.

Fall 2: $a \neq 0$: Aus $f_x = 0$ folgt $y = -\frac{3x^2}{5a}$. Nach Einsetzen in die Gleichung $f_y = 0$ ergibt sich $-3 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{x^4}{a^2} + 5ax = 0$ bzw. $x \cdot \left(1 - \frac{27}{125a^3} x^3\right) = 0$. Hieraus erhält man die beiden stationären Punkte $(x_1, y_1) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = \left(\frac{5a}{3}, -\frac{5a}{3}\right)$. Im Punkt (x_1, y_1) ist $\mathcal{A} = -25a^2 < 0$, so dass kein Extremum vorliegt. Für (x_2, y_2) ist $\mathcal{A} = 10a \cdot 10a - 25a^2 = 75a^2 > 0$, so dass ein Extremum vorliegt. Bei $a > 0$ ist dies wegen $f_{xx} = 6 \cdot \frac{5a}{3} > 0$ ein lokales Minimum, bei $a < 0$ infolge $f_{xx} = 6 \cdot \frac{5a}{3} < 0$ ein lokales Maximum.

$\boxed{\textbf{4 B}}$ a) Als Erstes ist die Gleichung der Geraden zu finden, auf der P_3 liegt (woraus die Nebenbedingung des Problems resultiert). Diese Gerade verläuft durch die Punkte $(b, 0)$ und $(0, a)$ und besitzt somit die Gleichung $y = a - \frac{a}{b}x$. Damit ergibt sich die Extremwertaufgabe mit Gleichungsnebenbedingung

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \cdot y & &\longrightarrow \max \\ g(x, y) &= y - a + \tfrac{a}{b} \cdot x & &= 0, \end{aligned}$$

wobei die zu bestimmenden optimalen Größen x und y sinnvollerweise nichtnegativ sein müssen. Einsetzen der nach y aufgelösten Nebenbedingung in die Zielfunktion liefert $\tilde{f}(x) = x \cdot \left(a - \frac{a}{b}x\right) = ax - \frac{a}{b}x^2$ mit $\tilde{f}'(x) = a - \frac{2a}{b}x$. Aus der Forderung $\tilde{f}' \overset{!}{=} 0$ folgt $x_E = \frac{b}{2}$, $y_E = \frac{a}{2}$. Auf Grund der Beziehung $\tilde{f}''(x_E) = -\frac{2a}{b} < 0$ liegt ein Maximum vor.

b) Mit $a = 16\,\mathrm{m}$ und $b = 24\,\mathrm{m}$ ergibt sich $F_{\max} = 96\,\mathrm{m}^2$.

5 A

a) Wir ordnen dem Monat April den Variablenwert $x = 0$ zu und erhalten $y = f(x) = 0,4857x^2 - 6,48x + 25,649$.

b) Dem Monat Oktober entspricht der Wert $x = 6$. Damit ergibt sich die Prognose $f(6) = 4,25$. Der quadratische Ansatz approximiert die gegebenen Werte hinreichend gut. Ein linearer Ansatz hingegen würde (da der Anstieg offensichtlich negativ ist) nach einer gewissen Zeit einen negativen Absatz liefern, was ökonomisch wenig sinnvoll erscheint.

Zusatz Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 6,671 \approx 7$, so dass also die Talsohle vermutlich im November erreicht sein wird. Aus der Forderung

$$0,4857x^2 - 6,48x + 25,649 = 40,4$$

ergibt sich als einzige positive (und damit für die Zukunft relevante) Lösung $x = 15,324 \approx 15$. Der Produktionsstand vom Februar dürfte mithin im Juli des nächsten Jahres wieder erreicht werden. Dieser Wert ist jedoch sehr unzuverlässig, da der Vorhersagezeitraum relativ lang ist.

5 B. a) Setze $f(x_1, x_2) = \text{const} = K$ für $K = 5, 10, 15$:

(1) $5 \cdot \sqrt{x_1 x_2} = 5 \quad \Longrightarrow \quad x_1 x_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{1}{x_1}$

(2) $5 \cdot \sqrt{x_1 x_2} = 10 \quad \Longrightarrow \quad x_1 x_2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{4}{x_1}$

(3) $5 \cdot \sqrt{x_1 x_2} = 15 \quad \Longrightarrow \quad x_1 x_2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{9}{x_1}$

Skizze:

b) $U(2x_1, 2x_2) = (2x_1)^{1/2} \cdot (2x_2) = 2^{3/2} \cdot x_1 x_2 = 2,8284 \cdot g(x_1, x_2)$

Bei Verdoppelung der Güter wächst der Nutzen stärker, nämlich um das 2,83-Fache.

$\boxed{\textbf{6 A}}$

a) $p = f(x) = \begin{cases} 40 - 2x, & 0 \le x \le 10, \\ 25 - \frac{1}{2}x, & 10 \le x \le 50 \end{cases}$

b) $E(x) = x \cdot p = x \cdot f(x) = \begin{cases} 40x - 2x^2, & 0 \le x \le 10, \\ 25x - \frac{1}{2}x^2, & 10 \le x \le 50 \end{cases}$

c) $G(x) = E(x) - K(x) = \begin{cases} -2x^2 + 36x - 100, & 0 \le x \le 10, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 21x - 100, & 10 \le x \le 50 \end{cases}$

Skizze:

Bestimmung der Nullstellen im 1. Teil:
$x^2 - 18x + 50 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{31}$
$x_1 \approx 3,4$, ($x_2 \approx 14,6$ entfällt, da im anderen Bereich liegend)

Bestimmung der Nullstellen im 2. Teil:
$x^2 - 42x + +200 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = 21 \pm \sqrt{241}$
($x_1 \approx 5,5$, entfällt, da im anderen Bereich liegend), $x_2 \approx 36,5$

Der Gewinn ist im Bereich $[3,4;\ 36,5]$ nichtnegativ.

6 B Es gilt $x_0 = 1$ sowie

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_=)^2.$$

Mit $\quad f(x) = 2 + \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

und $\quad f(x_0) = 2, \quad f'(x_0) = 1, \quad f''(x_0) = -1$

erhalten wir

$$l(x) = 2 + 1 \cdot (x - 1) = x + 1,$$

$$q(x) = 2 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}.$$

b) Skizze:

c) Für $\overline{x} = 1,01$ ergibt sich:

$$f(\overline{x}) = 2,0099503; \quad l(\overline{x}) = 2,01; \quad q(\overline{x}) = 2,0099500.$$

Beide Näherungen sind sehr gut, die quadratische besser als die lineare. Allerdings ist auch $\Delta x = 0,01$ sehr klein.

Zusatz Die Aussage ist nicht korrekt, denn die Gewichtsdifferenz kann zwischen 1 g und 199 g liegen.