

**1 (Lineares Gleichungssystem)**

a) Besitzt das nachstehende lineare Gleichungssystem eine (eindeutige oder mehrdeutige) Lösung? Falls ja, wie lautet diese?

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 6z + 8w &= 16 \\ 3x - y + 4z &= 6 \\ 7x + 7y - 8z + w &= 8 \end{aligned}$$

b) Gibt es eine Lösung mit ausschließlich nichtnegativen Komponenten?

**Rechnung von Hand!**

**6+2 P.**

.....

**2 A (Mengenlehre)**

Gegeben seien die drei Mengen  $A = \mathbb{R}_+^2 = \{x = (x_1, x_2)^\top \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ,  $B = \{x = (x_1, x_2)^\top \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  und  $C = \{x = (x_1, x_2)^\top \mid x_1 \leq \frac{1}{2}\}$ .

Stellen Sie die folgenden beiden Mengen grafisch dar:

a)  $M_1 = A \cap B \cap C$ ,

b)  $M_2 = A \setminus B$ .

**3+2 P.**

**oder**

**2 B (Logik)**

Man beweise die Richtigkeit der folgenden Aussagenverbindung mithilfe einer Wahrheitstabelle:

$$(p \implies q) \implies (\bar{q} \implies \bar{p}).$$

**5 P.**

.....

**3 A (Betragsungleichung)**

Man finde alle Lösungen der Ungleichung

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2}x + 1.$$

**6 P.**

**oder**

**3 B (Monotonie)**

Man weise mittels Definition der Monotonie nach, dass die Funktion

$$f(x) = 10 - \frac{2}{x}$$

für  $x > 0$  streng monoton wachsend ist.

**Hinweis:** Der Nachweis mittels 1. Ableitung bringt keine Punkte!

**6 P.**

**4 (Teilverflechtung – Leontief-Modell)** In einem Unternehmen werden aus Rohstoffen  $R_1, R_2$  die Endprodukte  $E_1, E_2$  hergestellt. Insgesamt sollen 300 Mengeneinheiten (ME) von  $E_1$  und 200 ME von  $E_2$  ausgeliefert werden. Wie viele Rohstoffe (in ME) werden benötigt, wenn bei der Produktion die links stehenden Verbräuche (Matrix  $A$ ) bzw. Eigenverbräuche gemäß der rechten Tabelle (Matrix  $B$ ) auftreten?

Bedarf (in ME)	je ME	
	$E_1$	$E_2$
$R_1$	3	4
$R_2$	5	7

Bedarf (in ME)	je ME	
	$E_1$	$E_2$
$E_1$	2/5	0
$E_2$	0	1/5

6 P.

.....

**5 A (Eigenschaften einer Funktion)** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 80 - \frac{160}{x+2},$$

die den Verbrauch an Kosmetik (in Euro) eines Durchschnittsbürgers in Abhängigkeit von seinem Einkommen  $x$  (in Tsd. Euro) beschreibt.

- Skizzieren Sie die Funktion  $f$  für  $x \geq 0$ .
- Berechnen Sie den Verbrauch an Kosmetik bei einem Einkommen von 2000 €.
- Welcher Verbrauch ergibt sich bei unbeschränkt wachsendem Einkommen?
- Ist der Verbrauch mit wachsendem Einkommen streng monoton wachsend?
- Das Einkommen von  $x = 2$  ( $\hat{=}$  2000 €) soll um 1% wachsen. Um wie viel ändert sich der Verbrauch an Kosmetik? Hinweis: Nutzen Sie die Elastizität oder das Differenzial.

2+1+2+3+2

oder

**5 B (Kurvendiskussion)** Es werde die Funktion  $f(x) = \frac{20}{1+4e^{-x}}$  betrachtet.

- Wie lautet der Funktionswert für  $x = 0$ ?
- Ist die Funktion monoton wachsend oder fallend?
- Besitzt die Funktion Wendepunkte? Hinweis:  $f''(x) = \frac{80e^{-x}(4e^{-x}-1)}{(1+4e^{-x})^3}$ . Die  
3. Ableitung muss nicht überprüft werden.
- Berechnen Sie die Grenzwerte von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .
- Geben Sie Definitions- und Wertebereich von  $f$  an.

1+3+2+2+2

.....

**6 A (Methode der kleinsten Quadratsumme)** Die Gewinnentwicklung eines Unternehmens in den Jahren 2003–2007 zeigt folgende Ergebnisse:

Jahr	2003	2004	2005	2006	2007
Gewinn (in Mill. €)	50	51	52	54	58

Mit welchen Gewinnen darf das Unternehmen 2008 bzw. 2010 rechnen, wenn unveränderte wirtschaftliche Rahmenbedingungen unterstellt werden?

- a) Nutzen Sie die Methode der kleinsten Quadrate für Ihre Antwort und wählen Sie einen linearen Ansatz.
- b) Der Vorstand des Unternehmens möchte die erhaltenen Resultate für eine Prognose über den Gewinn im Jahre 2016 nutzen. Welche Schätzung erhält er und wie verlässlich ist diese?

6+2 P.

oder

**6 B (Extremwertrechnung)**

Der Juniorchef eines mittelständischen Unternehmens möchte eine Erweiterungsinvestition vornehmen und hat dafür die Produktionsfunktion

$$P = f(A, K) = A^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$

als zutreffend ermittelt ( $A$  – in Arbeitskräfte,  $K$  – in Maschinen und Ausrüstungen investiertes Kapital,  $P$  – Produktionsoutput). Er möchte das ihm zur Verfügung stehende Kapital von 1 Mill. € so aufteilen, dass die Ausbringungsmenge  $P$  maximal wird. Sein Vater meint, eine gleichmäßige Aufteilung in  $K = A = \frac{1}{2}$  sei noch immer das beste gewesen. Ein Unternehmensberater der Firma „Schneller Rat“ empfiehlt  $K = \frac{1}{4}$ ,  $A = \frac{3}{4}$ , ein als Praktikant tätiger Absolvent der Chemnitzer Wiwi-Fakultät hingegen  $K = \frac{3}{4}$ ,  $A = \frac{1}{4}$ .

- a) Vergleichen Sie die Ausbringungsmengen in den drei Fällen miteinander.
- b) Dem Juniorchef ist keine der drei Empfehlungen gut genug. Weisen Sie (z. B. mit Hilfe einer Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen) nach, dass die vom Chemnitzer Absolventen vorgeschlagene Aufteilung bereits optimal ist. (Der Nachweis der Maximumeigenschaft kann entfallen.)

2+6 P.

.....

**7 (Kurze Fragen, kurze Antworten)** Antworten Sie kurz und mit eigenen Worten:

- a) Was versteht man unter einer Höhenlinie der Funktion  $y = f(x_1, x_2)$ ?
- b) Welcher Unterschied besteht zwischen einer lokalen und einer globalen Minimumstelle?
- c) Betrachtet werde die Funktion  $f(x)$ . Das Argument  $x = x_0$  ändere sich um (die „kleine“ Größe)  $\Delta x$  auf  $x_0 + \Delta x$ . Was ist bzw. beschreibt das *Differenzial*?
- d) Können drei Vektoren im  $\mathbb{R}^4$  linear unabhängig sein? (Begründung!)

2+2+2+2 P.

.....

**Zusatz.** Ein Schuhgeschäft wirbt mit folgendem Angebot: „Beim Kauf von zwei Paar Schuhen erhalten Sie das billigere Paar für 50%; beim Kauf von drei Paar Schuhen gibt es das billigste Paar umsonst.“ Wie viel kann Frau S. Näppchen-Jäger maximal sparen?

3 ZP.

## Lösungen zur Klausur Mathematik I 2/2008

**1**

$x$	$y$	$z$	$w$	r.S.
2	4	-6	8	16
3	-1	4	0	6
7	7	-8	1	8
1	2	-3	4	8
0	-7	13	-12	-18
0	-7	13	-27	-48
1	0	$5/7$	$4/7$	$20/7$
0	1	$-13/7$	$12/7$	$18/7$
0	0	0	-15	-30
$x$	$y$	$w$	$z$	
1	0	$4/7$	$5/7$	$20/7$
0	1	$12/7$	$-13/7$	$18/7$
0	0	-15	0	-30
1	0	0	$5/7$	$12/7$
0	1	0	$-13/7$	$-6/7$
0	0	1	0	2

Allgemeine Lösung: 
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ -6/7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5/7 \\ 13/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Die Forderungen  $\frac{12}{7} - \frac{5}{7}t \geq 0$  bzw.  $-\frac{6}{7} + \frac{13}{7}t \geq 0$  liefern  $t \leq \frac{12}{5}$  sowie  $t \geq \frac{6}{13}$ ; für die 3. Komponente ergibt sich  $t \geq 0$ , die 4. Komponente ist für beliebiges  $t$  positiv. Ja, es gibt Lösungen mit ausschließlich nichtnegativen Komponenten, und zwar für  $t \in [\frac{6}{13}, \frac{12}{5}]$ .

**2 A**

**2 B**

$p$	$q$	(1) : $p \implies q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	(2) : $\bar{q} \implies \bar{p}$	(1) $\implies$ (2)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Es liegt eine Tautologie vor, die Aussage ist also richtig.

**3 A** **Fall 1:**  $x \geq 1$ :

$$\text{Es ergibt sich: } |x - 1| = x - 1 \leq \frac{1}{2}x + 1 \implies \frac{1}{2}x \leq 2 \implies x \leq 4$$

Lösungsmenge:  $L_1 = [1, 4]$

**Fall 2:**  $x < 1$ :

$$\text{Man erhält: } |x - 1| = -x + 1 \leq \frac{1}{2}x + 1 \implies -\frac{1}{2}x \leq 0 \implies x \geq 0$$

Lösungsmenge:  $L_2 = [0, 1)$

Gesamtlösungsmenge:  $L_{ges} = L_1 \cup L_2 = [0, 4]$

**3 B** Zu zeigen ist: Aus  $0 < x_1 < x_2$  folgt  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Aus  $0 < x_1 < x_2$  folgt  $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$  bzw.  $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ , so dass auch  $-\frac{2}{x_1} < -\frac{2}{x_2}$  sowie  $10 - \frac{2}{x_1} < 10 - \frac{2}{x_2}$  gilt. Letzteres bedeutet  $f(x_1) < f(x_2)$ , was zu zeigen war.

**4**

$$y = A \cdot (E - B)^{-1}e, \quad E - B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad (E - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 4250 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$y = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ \frac{25}{3} & \frac{35}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 4250 \end{pmatrix}$$

**5 A** a) Skizze:

b)  $f(2) = 40$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 80$  (da der 2. Summand gegen null geht)

d)  $f'(x) = \frac{160}{(x+2)^2} > 0$ ; ja,  $f$  ist für beliebiges  $x > 0$  streng monoton wachsend

e) Elastizität:  $\varepsilon = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{160}{(x+2)^2} \cdot \frac{x}{80 - \frac{160}{x+2}}$

speziell gilt:  $\varepsilon(2) = \frac{160}{16} \cdot \frac{2}{80 - 40} = 0,5$

Bei Wachstum von  $x$  um 1% wächst der Verbrauch an Kosmetikerzeugnissen um etwa 0,5%.

Differenzial:  $df = f'(x) \cdot \Delta x = f'(2) \cdot 0,02 = 10 \cdot 0,02 = 0,2 \hat{=} 0,05\%$

**5 B**

a)  $f(0) = 4$

b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{80e^{-x}}{(1+4e^{-x})^2}.$$

Wegen  $e^{-x} > 0 \forall x$  und  $(1+4e^{-x})^2 > 0$  gilt  $f'(x) > 0 \forall x$ , d. h.,  $f$  ist streng monoton wachsend.

c) Aus  $f''(x) = 0$  ergibt sich  $4e^{-x} = 1$ , d. h.  $x = -\ln \frac{1}{4} = \ln 4 = 1,386$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} = 20$  (wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ )

$\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$  (wegen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ )

e)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $W(f) = (0, 20)$

**6 A** Da die Stützstellen äquidistant sind, bietet sich zur Rechenvereinfachung die Transformation  $t' = t - 2005$  an. Damit ergeben sich die folgenden Werte:

	$t'_i$	$y_i$	$t_i'^2$	$t'_i y_i$
	-2	50	4	-100
	-1	51	1	-51
	0	52	0	0
	1	54	1	54
	2	58	4	116
$\sum$ :	0	265	10	19

a) Beim linearen Ansatz  $y_1 = f(t) = a_2 t + a_1$  hat man zur Bestimmung der Parameter  $a_1$  und  $a_2$  das Normalgleichungssystem

$$\begin{aligned} 10a_2 &= 19 \\ 5a_1 &= 265 \end{aligned}$$

zu betrachten, das die Lösung  $a_2 = \frac{19}{10}$ ,  $a_1 = 53$  besitzt. Hieraus resultiert die lineare Approximationsfunktion  $y_1 = f(t) = \frac{19}{10} \cdot (t - 2005) + 53$ , mit der man für 2008 den Wert  $y = f(2008) = 58,7$  und für 2010 den Wert 62,5 [Mill. €] voraussagen kann.

b) Für das Jahr 2016 erhält man als Prognosewert 73,9 [Mill. €]. Dieser Wert ist wegen des relativ großen Vorhersagezeitraums, wenigen statistischen Daten und fehlenden (Hintergrund-) Informationen über die Art der zukünftigen Entwicklung mit Vorsicht zu genießen.

**6 B**

a) Die Ratschläge der drei führen zu folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \text{Vater:} & \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,5; \\ \text{Unternehmensberater:} & \quad f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 0,3290; \\ \text{Wiwi-Absolvent:} & \quad f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 0,5699. \end{aligned}$$

Das beste Ergebnis wird erzielt, folgt man dem Rat des Chemnitzer Absolventen der Wirtschaftswissenschaften.

b) Zu lösen ist die Extremwertaufgabe  $P = f(A, K) = A^{1/4} K^{3/4} \longrightarrow \min$   
 $A + K = 1.$

Eliminiert man  $A$  durch Auflösen der Nebenbedingung nach  $A$ , d. h.  $A = 1 - K$ , so ergibt sich die neue Zielfunktion  $P = \tilde{f}(K) = (1 - K)^{1/4} K^{3/4}$ , die nur noch von  $K$  abhängt. Aus der notwendigen Maximumbedingung

$$\tilde{f}'(K) = -\frac{1}{4}(1 - K)^{-3/4} K^{3/4} + \frac{3}{4}(1 - K)^{1/4} K^{-1/4} \stackrel{!}{=} 0$$

erhält man (nach Multiplikation mit  $K^{1/4}(1 - K)^{3/4}$  und kurzer Umformung) die extremwertverdächtigen Werte  $K = \frac{3}{4}$  und  $A = \frac{1}{4}$ .

(2 Zusatzpunkte):

Wegen

$$\tilde{f}''(x) = -\frac{3}{16} \left[ (1-K)^{-\frac{7}{4}} K^{\frac{3}{4}} + 2(1-K)^{-\frac{3}{4}} K^{-\frac{1}{4}} + (1-K)^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{5}{4}} \right]$$

ergibt sich  $\tilde{f}''(\frac{3}{4}) < 0$  (denn jeder Summand in der eckigen Klammer ist positiv), so dass ein Maximum vorliegt. Der Vorschlag des Chemnitzer Wiwi-Absolventen liefert also die optimale Lösung.

Bemerkung: Man beachte, dass die Aufteilung des Kapitals gerade in dem Verhältnis zu erfolgen hat, in dem die Exponenten zueinander stehen.

**7**

- a) Höhenlinie: Alle Punkte  $(x_1, x_2)$  mit gleichem Funktionswert
- b) In  $x_0$  kleinster Funktionswert, wobei
  - bei lokaler Minimumstelle: Vergleichspunkte aus  $U_\varepsilon(x_0) \cap D(f)$  kommen und
  - bei globaler Minimumstelle: Vergleichspunkte aus  $D(f)$  kommen.
- c) Differenzial  $df = f'(x_0) \cdot \Delta x$  ist der Hauptanteil der Funktionswertänderung (absolute Größe).
- d) Ja, wenn es eine Teilmatrix des Typs (3,3) gibt, die regulär ist (deren Determinante also ungleich null ist).

**Zusatz**

Die maximale Einsparung liegt bei 33%, wenn man drei Paar gleich teurer Schuhe kauft.