Lösungen zur Klausur Mathematik II 02/2010

$\boxed{1.}$

a) Der Barwert ist der Wert einer Zahlung (bzw. eines Zahlungsstroms) zum Zeitpunkt $t = 0$, der Endwert der Wert zum Ende einer finanziellen Vereinbarung (oft: $t = n$) und der Zeitwert der Wert zu einem beliebigen Zeitpunkt t. Im Grunde genommen sind alle drei Zeitwerte.

b) Ja, das stimmt. Wenn mit einem höheren Kalkulationszinssatz abgezinst wird, wird durch größere Zahlen dividiert, so dass sich kleinere Werte ergeben.

c) Ja, das ist möglich. Grafisch entspricht das z. B. im Zweidimensionalen einer ganzen Strecke.

d) Wenn der Integrand keine Stammfunktion besitzt oder deren Berechnung sehr kompliziert ist, kann das Integral nicht analytisch berechnet werden, sondern man muss auf numerische Methoden zurückgreifen.

$\boxed{2.}$

Setzt man $x_3 = x_3' - x_3''$, so ergibt sich die umgeformte Aufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
-3x_1 & - & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & - & x_4 & & & & & \to & \max \\
2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3' & + & 3x_3'' & + & x_4 & - & u_1 & & & = & 30 \\
4x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & + & 5x_4 & & & + & u_2 & = & 20 \\
\multicolumn{15}{r}{x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, u_1, u_2 \geq 0}
\end{array}$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	u_1	u_2	x_B	θ_i
			-3	-1	1	-1	-1	0	0		
1	x_2	-1	2	1	-3	3	1	-1	0	30	$\boxed{10}$ $\leftarrow$
2	u_2	0	4	0	1	-1	5	0	1	20	/
3	/	/	1	0	2	-2	0	1	0	-30	
						$\uparrow$					
1	x_3''	-1	$2/3$	$1/3$	-1	1	$1/3$	$-1/3$	0	10	
2	u_2	0	$14/3$	$1/3$	0	0	$16/3$	$-1/3$	1	30	
3	/	/	$7/3$	$2/3$	0	0	$2/3$	$1/3$	0	-10	

Optimale Lösung: $x_1^* = x_2^* = 0$, $x_3^* = x_3'^* - x_3''^* = 0 - 10 = -10$, $x_4^* = 0$; $u_1^* = 0, u_2^* = 30$; $\quad z^* = 10$

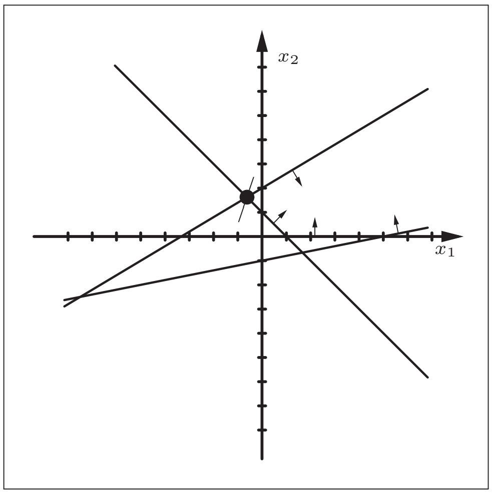
Anderer Lösungsweg (Einführung einer künstlichen Variablen):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
& & & & & & & & & & & & & - & v_1 & \to & \max \\
3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3' & + & 3x_3'' & + & x_4 & - & u_1 & & & + & v_1 & = & 30 \\
4x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & + & 5x_4 & & & + & u_2 & & & = & 20 \\
\multicolumn{17}{c}{x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, u_1, u_2, v_1 \geq 0}
\end{array}$$

Nr.	BV	c_B	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	u_1	u_2	v_1	x_B	θ_i
			0	0	0	0	0	0	0	-1		
			-3	-1	1	-1	-1	0	0	/		
1	v_1	-1	2	1	-3	3	1	-1	0	1	30	$\boxed{10}$ $\leftarrow$
2	u_2	0	4	0	1	-1	5	0	1	0	20	/
3	/	/	-2	-1	3	-3	-1	1	0	0	-30	
						$\uparrow$						
1	x_3''	$0(-1)$	2/3	1/3	-1	1	1/3	$-1/3$	0	/	10	
1	u_2	0 (0)	14/3	1/3	0	0	16/3	$-1/3$	1	/	30	
3	/	/	0	0	0	0	0	0	0	/	0	
$3'$	/	/	7/3	2/3	0	0	2/3	1/3	0	/	-10	

Optimale Lösung: siehe oben.

3.



a) $x^* = -\frac{5}{8}, \quad y^* = \frac{13}{8},$
$z^* = 3,5;$

b) $z^* = -\infty$

4A. $20000 = 5000 + r(12+5,5\cdot 0,06)\cdot \dfrac{1,06^3-1}{1,06^3\cdot 0,06} \implies r = 455,12$ €

4B. $1000\cdot 1,07\cdot \dfrac{1,07^{20}-1}{0,07} = A\cdot \dfrac{1,05^{10}-1}{1,05^9\cdot 0,05} \implies A = 5410,22$ €

5A.

a) $K\cdot(1+i)^{10} = 3K \implies 1+i = \sqrt[10]{3} \implies i = \sqrt[10]{3} - 1 = 0,1161 = 11,61\,\%$

b) $K\cdot 1,06^n = 3K \implies 1,06^n = 3 \implies n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1,06} = 18,85 \approx 19$ Jahre

$\boxed{\textbf{5B.}}$ Berechnung der Annuität:

$$A = S_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 200\,000 \cdot \frac{1,06^{15} \cdot 0,06}{1,06^{15} - 1} = 20592,55.$$

Nein, er ist nicht in der Lage, das Darlehen innerhalb von 15 Jahren vollständig zu tilgen. Weitere Lösungswege:

- Berechnung der Zeitdauer bis zur vollständigen Tilgung bei einer Annuität von $A = 19000$: $n = 17,14$.
- Berechnung der Restschuld nach 15 Jahren: $S_{15} = 37068$
- Aufstellen eines Tilgungsplans (aufwändig!)
- Berechnung der Darlehenshöhe S_0 bei $A = 19000$, $i = 0,06$ und $n = 15$

$\boxed{\textbf{6.}}$

Es sei x_i der Anteil des i-ten Wertpapiers im Portfolio, $i = 1, 2, 3$. Dann ergibt sich folgendes Modell:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
0,08x_1 & + & 0,15x_2 & + & 0,02x_3 & \to & \max \\
0,15x_1 & + & 0,35x_2 & + & 0,05x_3 & \leq & 0,2 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$\boxed{\textbf{7.}}$

a) $C = 92,9764 \cdots \approx 92,98$

b) $q = 1,062753$, $i_{\text{eff}} = 6,28\,\%$

$\boxed{\textbf{ZUSATZ.}}$

Bei einem Zinssatz von $i = 0$ Prozent muss x mindestens 90 000 GE betragen; ist der Kalkulationszinssatz höher, muss x ebenfalls größer werden. So ergint sich z. B. bei $i = 1\,\%$ die Bedingung

$$-100000 + \frac{20000}{1,01} + \frac{30000}{1,01^2} + \frac{x - 40000}{1,01^3} \geq 0.$$

Dies bedeutet $x \geq 92328,1$.