

ANMERKUNGEN ZUR VORLESUNG STOCHASTISCHE PROZESSE VOM 16. MAI 2006

**Korollar/Bemerkung 2.3.4** (d). Sei  $(X_n)_n$  eine Markovkette mit Übergangsmatrix  $P$ .

(i) Für  $k \leq n$  gilt:

$$\mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = j, T_i = k) = p_{i,i}^{(n-k)}$$

(ii) Für  $A \subset I^n, i_n \in I, B \subset I^{m-n}$  gilt :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \end{aligned}$$

(iii) Sei  $\nu$  ein  $W$ -Maß auf  $I$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein  $W$ -Raum und  $X_n, Y_n: \Omega \rightarrow I, n \in \mathbb{N}_0$  Markovketten, beide mit  $\ddot{U}$ -Matrix  $P$ . Die Startverteilungen seien gegeben durch

$$\forall j \in I: \quad \mathbb{P}(X_0 = j) = \nu(j), \quad \mathbb{P}(Y_0 = j) = \delta_j(j)$$

Sei  $A \subset I^{n+1}$ . Dann gilt, falls  $\nu(i) > 0$

$$\mathbb{P}(X_{[0,n]} \in A \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(Y_{[0,n]} \in A) = \text{“} \mathbb{P}_i(X_{[0,n]} \in A) \text{”}$$

**Beweis :**

(i) Dies folgt aus Satz 2.1.5 und Korollar 2.1.10, wie in der Vorlesung gezeigt.

(ii) Korollar 2.1.6 besagt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A \mid X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = i_n) \end{aligned}$$

Multipliziere nun mit  $\mathbb{P}(X_n = i_n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A \mid X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = i_n) \mathbb{P}(X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[1,m-n]} \in B \mid X_0 = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}_{i_n}(X_{[1,m-n]} \in B) \end{aligned}$$

Nochmaliges multiplizieren mit  $\mathbb{P}(X_n = i_n)$  ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[1,m-n]} \in B, X_0 = i_n) \end{aligned}$$

Ebenso gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \\ = \mathbb{P}(X_{[0,n-1]} \in A \mid X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n) \end{aligned}$$

aber dies Gleichung ist nicht so nützlich.

(iii) Es gilt nach Satz 2.1.5

$$\mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) = \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i) &= \frac{\mathbb{P}(i_0 = X_0 = i, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0)} \\ &= \frac{\delta_i(i_0) \nu(i) p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}}{\nu(i)} \\ &= \delta_i(i_0) \cdot p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

Nun folgt durch disjunkte Zerlegung die Behauptung  $A \subset I^{n+1}$ .  $\square$

**Beweis -Schritt von Satz 2.3.5:**

Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit bzgl. des W-Maßes  $\mathbb{P}_j$  gilt für  $k \leq n$ :

$$\frac{\mathbb{P}_j(X_n = i, T_i = k)}{\mathbb{P}_j(T_i = k)} = \mathbb{P}_j(X_n = i \mid T_i = k) = \mathbb{P}_j(X_n = i \mid X_0 = j, T_i = k) = p_{i,i}^{(n-k)}$$

$\square$

**Satz 2.3.11 (b).** Seien  $i, j \in I$  beliebig. Dann folgt aus

$$i \rightsquigarrow j$$

schon

$$G(i) = \infty \Leftrightarrow G(j) = \infty$$

**Beweis :**

Es reicht  $G(i) = \infty \Rightarrow G(j) = \infty$  zu zeigen.

Da  $j$  von  $i$  aus erreichbar ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $p_{i,j}^{(N)} > 0$ . Somit

$$G(j) \geq \sum_{n=N}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} p_{j,i}^{(n-N)} p_{i,j}^{(N)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} p_{i,j}^{(N)} = f_{j,i} G(i) p_{i,j}^{(N)}$$

nach 2.3.10. Nun gilt  $p_{i,j}^{(N)} > 0$ ,  $f_{j,i} > 0$  und  $G(i) = \infty$ , somit  $G(j) = \infty$ .  $\square$

**Lemma 2.3.12.** Seien  $i, j \in I$  beliebig,  $i$  rekurrent,  $i \rightsquigarrow j$ . Dann folgt

$$(a) \quad j \rightsquigarrow i$$

**Alternativer Beweis von Daniel Lenz:**

Sei  $A$  das Ereignis  $\{T_j < T_i\}$ , daß die Kette vor dem ersten Besuch von  $i$  (nach der Zeit  $n = 0$ ) schon  $j$  besucht hat, und  $B$  dessen Komplement. Aus  $i \rightsquigarrow j$  folgt, daß es ein (kleinstes)  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $p_{i,j}^{(n)} > 0$ . Somit  $\mathbb{P}_i(A) > 0$ .

Wäre  $j \not\rightsquigarrow i$ , dann wäre  $A \subset \{T_i = \infty\}$ . Letzere Menge hat aber  $\mathbb{P}_i$ -Maß Null, weil  $i$  rekurrent ist.  $\square$

Ivan Veselić

ivan.veselic@mathematik.tu-chemnitz.de

0371-531-2708

<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schroedinger/lehre.php>