

ÜBUNGEN ZUR GRAPHENTHEORIE

Aufgabe A: (Charakteristisches Polynom)

Sei M eine $(n \times n)$ -Matrix und $p(t) = \sum_{i=0}^n p_i t^i$ das charakteristische Polynom von M . Geben Sie eine Formel an, welche die Koeffizienten p_i mit Hilfe von Unterdeterminanten von M ausdrückt.

Nehmen Sie nun zusätzlich an, daß sich p vollständig faktorisieren läßt. Geben Sie eine Formel an, welche die Koeffizienten p_i mit Hilfe von Eigenwerten von M ausdrückt.

(Tip: Die Formeln für p_0 und p_{n-1} werden Ihnen wohl am bekanntesten sein.)

Aufgabe B: (Kantenzüge)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ und l die Anzahl der (nicht notwendigerweise ecken- oder kantendisjunkten) Kantenzüge **der Länge** k zwischen u und v . Geben Sie eine Formel an, welche l mit Hilfe der Adjazenzmatrix A von G ausdrückt! (Beweis?)

Wie kann man demnach folgende Größen (geometrisch/graphentheoretisch) interpretieren:

- i)* $(A^2)_{u,u}$? *ii)* $\text{Spur}(A^2)$? *iii)* $(A^3)_{u,u}$? *iv)* $\text{Spur}(A^3)$?
v) $\text{Spur}(A^4)$? (Vorsicht!)

Aufgabe C: (Schranken an das Spektrum)

Sei \tilde{B} die Inzidenzmatrix (über \mathbb{R}) von G , wobei G ohne Orientierung angenommen wird und damit alle Einträge von \tilde{B} nicht-negativ sind. Ist $\tilde{B}^t \tilde{B}$ positiv semidefinit? (Begründung / Wiederlegung?)

Sei $A_{L(G)} = \tilde{B}^t \tilde{B} - 2I_m$ die Adjazenzmatrix des Kantengraphen $L(G)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deren Eigenwerte. Gibt es eine von G unabhängige untere Schranke für die Menge $\{\Re \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$? (Begründung / Wiederlegung?) Hier bezeichnet \Re den Realteil.

Aufgabe D: (Spektrum vom Matrixprodukt)

Sei M_1 eine beliebige $(n \times m)$ -Matrix und M_2 eine beliebige $(m \times n)$ -Matrix. Beweisen Sie:

$$\det(I_n - M_1 M_2) = \det(I_m - M_2 M_1).$$

Folgern Sie: Die Matrizen $M_1 M_2$ und $M_2 M_1$ haben dieselben nicht-verschwindenden Eigenwerte.

Falls Sie Fragen zu der Vorlesung oder den Übungen haben, wenden Sie sich bitte an:

Ivan Veselić

ivan.veselic@mathematik.tu-chemnitz.de

0371-531-2708

Weitere Informationen und Unterrichtsmaterialien finden Sie unter:

<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schroedinger/lehre.php>