EIN EINHEITLICHER ZUGANG ZUM PRICING VON SWAPS

BERND LUDERER und OLAF ZUCHANKE

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Deutschland
Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik,
Postfach 100920, 04009 Leipzig, Deutschland

Summary: A unified approach for the pricing of swaps is given. Starting from the study of cross-currency swaps being as general as possible with respect to time (maturity date), principal and interest rates, a number of special swap constructions is priced, among them interest-rate swaps and basis swaps. Several examples demonstrate the formulas derived.

Key words: Financial mathematics, financial products, swaps, pricing, investment banking, interest rate, fair price

Mathematics Subject Classification: 91 B 28

1 Einleitung

In den letzten Jahren traten die Zinsmärkte zunehmend aus dem Schatten der Aktienmärkte hervor. Der private Investor hat längst realisiert, daß der Begriff Rentenpapier nicht mehr automatisch eine sichere Anlageform darstellt, falls vor Endfälligkeit ein Liquiditätsbedarf entsteht. Kursschwankungen von Zinspapieren konnten in den vergangenen Jahren durchaus mit denen der Aktienmärkte mithalten. Aufgrund dieser Volatilität suchen wiederum institutionelle Investoren immer intensiver nach Finanzierungsmöglichkeiten und Anlageformen, die auf ihre Bedürfnisse in Hinblick auf Rendite und Risiko exakt zugeschnitten sind. In diesem Zusammenhang haben sich viele Banken und Investmenthäuser aufgemacht, immer wieder neue strukturierte Finanzprodukte zu entwickeln. Ein professionelles Handling dieser High-Tech-Geschäfte setzt besonderes Know-How voraus, welches von Betriebswirten, Händlern, Mathematikern und Informatikern getragen werden muß. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem speziellem Produkt – dem *Swap*.

In den achtziger Jahren expandierten die Euromärkte durch neue DM-Euroanleihen sehr stark, dominiert von den amerikanischen Banken. Diese boten ihren Kunden eine Technik an, die es ihnen erlaubte, nicht nur in der gewünschten Währung zu emittieren, sondern alle am Euromarkt möglichen

Währungen auf eine Emissionsmöglichkeit hin zu untersuchen. Diese Technik wurde erstmals zwischen IBM und der Weltbank angewandt und am Kapitalmarkt eingeführt. Dieses Geschäft ist als erster Währungsswap in die Annalen eingegangen.

Die Struktur eines Swap-Geschäftes kann mit folgendem Beispiel erklärt werden. Der Emittent ist mit einem Mann vergleichbar, der bestens mit Hemden eingedeckt ist, da er im Geschäft seines Bruders in New York einen großen Preisnachlaß erhält. Er benötigt nun dringend eine neue Hose. Anstatt in ein Hosengeschäft zu gehen, sucht er einen Freund auf, der derzeit ein neues Hemd benötigt, dessen Schwester ein Hosengeschäft in Frankfurt besitzt und von der er Sonderkonditionen erhält. Sinnvoll wäre nun ein Tausch der Sonderkonditionen, ein Swap. Das Tauschgeschäft sieht folgendermaßen aus. New York tauscht Dollar in DM und beauftragt Frankfurt mit diesem Betrag eine Hose mit Preisnachlaß zu kaufen. Gleichzeitig verpflichtet New York sich, mit den in Dollar getauschten DM für Frankfurt ein Hemd mit Preisnachlaß zu erwerben. Anschließend sollen die Produkte getauscht werden. Das Geschäft kommt zustande, wenn beide Partner profitieren, das heißt, wenn der jeweilige Preisvorteil größer ist, als die durch Tausch und Transport entstandenen Kosten.

Auf die Finanzwelt übertragen sind Swaps Tauschgeschäfte zwischen zwei Partnern auf Bankprodukte verschiedenster Art, deren Motivation im Austausch von relativen Kapitalmarktvorteilen (z.B. Refinanzierungskosten) zum Nutzen beider Tauschpartner begründet ist.

Wir werden uns mit sogenannten *Zins-Swaps* beschäftigen, bei denen zukünftige Zinszahlungen getauscht werden. Ein Zins-Swap kommt zustande, wenn zwei Partner annehmen, durch den Tausch der Zinszahlungen einen Nutzen zu erzielen. Das Tauschgeschäft wird als *im Gleichgewicht* oder *fair* bezeichnet, wenn die Barwerte der zukünftigen Zinszahlungen bei Geschäftsabschluß übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so kann man durch Abänderung bestimmter Barwertparameter einen fairen Swap erzeugen. Das Überführen eines Swaps in einen fairen Swap nennt man *Pricing*.

Je nachdem, wie die zukünftigen Zinszahlungen ausgestaltet sind, unterscheidet man folgende Swap-Grundkonstruktionen:

- *Interest-Rate-Swap* (IRS) oder auch Kuponswap, bei dem ein fester Zinssatz gegen einen variablen Zinssatz (Referenzzinssatz z.B. der 6-Monats-LIBOR) getauscht wird. Ein IRS wird auch als *Generic-Swap*, *Straight-Swap* oder *Plain-Vanilla-Swap* bezeichnet.

- *Basisswap*, bei dem variable Zinsen getauscht werden.

- *Cross-Currency-Swap* (CCS), bei dem feste (variable) Zinsen in einer Währung gegen feste (variable) Zinsen einer anderen Währung ausgetauscht werden.

Im Gegensatz zu IRS und Basisswap werden beim CCS zusätzlich zu den Zinszahlungen auch die zugrundeliegenden Nominalbeträge zu Beginn und bei Fälligkeit des Swaps getauscht.

Neben dem Normalfall eines gleichbleibenden Nominalbetrages sind auch steigende (*Step-Up-Swap*) oder fallende (*Step-Down-Swap*) Nominalbeträge möglich. Bei einem IRS sind neben dem festen Zinssatz auch aufsteigende oder fallende Zinssätze möglich. Zudem lassen sich Auf- und Abschläge (*Spreads*) auf die variablen Zinsen vereinbaren. Des weiteren kann man Sonderzahlungen zu Beginn der Laufzeit (sogenannte *Up-Front-Payments*) oder am Ende des IRS aushandeln.

Liegt der Startzeitpunkt eines Swaps in der Zukunft, ist es möglich, *Forward-Swaps* auf einen zukünftigen Zinszeitraum abzuschließen.

Egal, ob eine Bank als Swap-Partner oder als Vermittler eines Swap-Geschäftes auftritt, muß sie stets in der Lage sein, auch *komplexeste* Strukturen zukünftiger Zinszahlungen und entsprechende Swap-Wünsche einem Pricing zu unterziehen. Dieser Anforderung Rechnung tragend, besteht das Ziel dieser Arbeit darin, das Pricing von Zins-Swaps mathematisch exakt zu beschreiben, *ohne* die Konstruktionsmöglichkeiten der Zinszahlungen einschränken und zu müssen. Bei diesem Ansatz bleiben insbesondere die Laufzeiten ohne Beschränkungen frei wählbar, so daß wir en passant die Theorie des Forward-Swap-Pricing mit abdecken.

Wir werden im ersten Teil der Arbeit Swaps als Cross-Currency-Geschäfte diskutieren. Betrachtet man lediglich sogenannte Einwährungsswaps, das heist, Tauschgeschäfte relativer Kapitalmarktvorteile innerhalb *einer* Währung, grenzt man die Menge möglicher Tauschpartner stark ein. Zudem ist ein Ausnutzen von Kapitalmarktvorteilen auf Teilmärkte beschränkt. Einwährungsswaps können natürlich als Spezialfälle von Cross-Currency-Swaps betrachtet werden. Für beliebig konstruierte Cross-Currency-Swaps erfolgt ein exaktes Pricing durch die Ermittlung von sogenannten Pricing-Parametern. Im zweiten Teil werden wir diese Parameter auf konkrete Swapkonstruktionen innerhalb einer Währung einstellen und handliche Formeln für die jeweiligen Parameter erhalten. Im dritten Teil der Arbeit wird anhand einiger Beispiele erläutert, wie die theoretischen Ergebnisse Anwendung finden können.

Zins-Swaps sind auch wichtige Instrumente des Zinsrisikomanagements. Es sei erwähnt, daß das Pricing lediglich der Beurteilung einer Swap-Vereinbarung aus der Sicht eines Swap-Partners auf Basis einer Zerozinskurve entspricht. In diesem Zusammenhang läßt sich das Pricing von Zins-Swaps als Steuerungsmittel des Zinsrisikomanagements begreifen. Legen zwei Swap-Partner ihren Berechnungen unterschiedliche Zerozinskurven zugrunde, so erhalten sie naturgemäß unterschiedliche Pricing-Parameter. Die tatsächlich ausgehandelten Tauschkonditionen richten sich nicht nach den theoretisch fairen Parametern, sondern nach Angebot und Nachfrage auf dem Kapitalmarkt.

2 Swap-Pricing

Wir bezeichnen beliebig kontruierte Zins-Swaps zwischen zwei verschiedenen Währungen als *Cross-Currency-Swaps* (CCS). Seien W_1 und W_2 zwei unterschiedliche konvertible Währungen. Bei einem CCS werden zukünftige Zinszahlungen in Währung W_1 gegen zukünftige Zinszahlungen in Währung W_2 getauscht. Des weiteren werden die dem CCS zugrunde liegenden Kapitalbeträge zu Beginn und bei Fälligkeit des CCS mit demselben Wechselkurs getauscht. Es bezeichne F den zum Swapstart gültigen Umrechnungsfaktor/Wechselkurs von W_1 in W_2. Sei N_1 bzw. N_2 ein Kapitalbetrag der Währung W_1 bzw. der Währung W_2. Wir sagen, N_1 und N_2 sind *äquivalent bzgl.* F, falls

$$N_1 = \frac{N_2}{F}\,.$$

Man bezeichnet einen CCS als *im Gleichgewicht* oder *fair*, wenn die Barwerte der zu leistenden Zahlungen äquivalent bzgl. F sind. Die hieraus resultierende Gleichung nennen wir *Pricing-Bedingung*.

2.1 Pricing-Bedingung

Werden bei einem CCS die Kapitalbeträge zu Beginn und bei Fälligkeit getauscht, so impliziert dies, daß die den Zinszahlungen zugrundeliegenden Nominalbeträge zeitlich konstant sind. Dies schränkt die Menge möglicher Swap-Konstruktionen ein. So kann etwa kein Step-Up-Swap mit steigenden Nominalbeträgen vereinbart werden. Gemäß dem Ziel dieser Arbeit, Swaps „den Erfordernissen entsprechend“ ohne Einschränkungen zu diskutieren, werden wir an dieser Stelle einen allgemeineren Zugang entwickeln.
Wir nutzen folgende **Tauschvereinbarung**:

Seien W_1 und W_2 zwei unterschiedliche konvertible Währungen. Es bezeichne F den zum Swapstart gültigen Umrechnungsfaktor/Wechselkurs von W_1 in W_2. Die Laufzeit des CCS sei den Anforderungen der Swap-Partner entsprechend in Zinsperioden unterteilt. Zu Beginn jeder Zinsperiode von Swap-Partner 1 tauscht Swap-Partner 1 Kapital in W_2. Den W_2-Betrag erhält Swap-Partner 2, damit dieser mit der ihm zur Verfügung stehenden Zinsstruktur Zinszahlungen generiert. Am Ende der Periode werden Kapital zuzüglich Zinsen zum selben Kurs in W_1 zurückgetauscht und an Swap-Partner 1 zurückgegeben. Dies geschieht für jede Zinsperiode neu. Umgekehrt tauscht zu jeder Zinsperiode von Swap-Partner 2 Swap-Partner 2 Kapital in Währung W_1. Den W_1-Betrag erhält Swap-Partner 1, damit dieser mit der ihm zur Verfügung stehenden Zinsstruktur Zinszahlungen generiert. Am Ende der Periode werden Kapital zuzüglich Zinsen zum selben Kurs in W_2 zurückgetauscht und an Swap-Partner 2 zurückgegeben. Dies geschieht für jede Zinsperiode neu.

Der Fall zeitlich konstanter Kapitalbeträge mit Tausch zu Beginn und bei Fälligkeit des Swaps bettet sich nahtlos in diese Tauschkonvention ein. Der gleichzeitige Hin- und Rücktausch desselben Betrages zum selben Kurs am Ende der Zinsperioden hebt sich auf. Übrig bleibt der Tausch zu Beginn und bei Fälligkeit des Swaps. Um nun die Pricing-Bedingung exakt formulieren zu können, ist es notwendig, zunächst den Barwert der zukünftigen Zahlungen exakt zu beschreiben. Hierfür sind Vorüberlegungen und die Einführung einiger Begriffe notwendig. Sei u eine Zinsmethode oder auch Marktusance $\left(u \in \left\{\frac{30}{360}, \frac{act}{360}, \frac{act}{act}, \ldots\right\}\right)$. Seien t_1 und t_2 zwei Beobachtungszeitpunkte derart, daß $t_1 \leq t_2$. Dann bezeichne

$$\tau_u(t_1, t_2) := \frac{\text{Tagedifferenz von } t_1 \text{ nach } t_2 \text{ gemäß } u}{\text{Tagebasis gemäß } u}$$

den *Tagefaktor* oder *Jahresanteil* von Zeitpunkt t_1 nach Zeitpunkt t_2 gemäß u. Im weiteren werden wir folgende Verzinsungskonvention nutzen:

unterjährig $\quad (\tau_u(t_1, t_2) \leq 1) \quad \Rightarrow \quad$ lineare Verzinsung (Geldmarkt)
überjährig $\quad (\tau_u(t_1, t_2) > 1) \quad \Rightarrow \quad$ exponentielle Verzinsung (Bondmarkt).

Es bezeichne t die Laufzeit eines Zerobonds. Angenommen, es gibt für t einen liquiden Zerobondmarkt. Aus dem am Markt quotierten Preisen könnte man dann für eine Marktusance u den Zerozins $z_u(t)$ bestimmen. Es sei $ZB(t)$ der am Markt quotierte Preis für einen Zerobond mit Laufzeit t, Nominalwert 1 und Tilgung zu pari. Dann gilt bei Beachtung der Verzinsungskonvention

$$z_u(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{ZB(t)} - 1\right] \tau_u(0,t)^{-1} & , \tau_u(0,t) \leq 1 \\ \left[\frac{1}{ZB(t)}\right]^{\frac{1}{\tau_u(0,t)}} - 1 & , \tau_u(0,t) > 1 \end{cases} . \tag{1}$$

$z_u(t)$ heißt auch *Spot-Rate* der Laufzeit t gemäß u.

Für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit nehmen wir an, daß für *jede* Währung eine Zerozinskurve $(z_u(t))_{t \geq 0}$ existiert[1]. Sei v eine weitere Marktusance. Dann ist mit $(z_u(t))_{t \geq 0}$ auch die Zerozinskurve $(z_v(t))_{t \geq 0}$ eindeutig bestimmt. Für $t \geq 0$ gilt nämlich

$$z_v(t) = \begin{cases} \frac{\tau_u(0,t)}{\tau_v(0,t)} z_u(t) & , \tau_u(0,t), \tau_v(0,t) \leq 1 \\ (1 + \tau_u(0,t) z_u(t))^{\frac{1}{\tau_v(0,t)}} - 1 & , \tau_v(0,t) > 1 \geq \tau_u(0,t) \\ \frac{(1+z_u(t))^{\tau_u(0,t)} - 1}{\tau_v(0,t)} & , \tau_u(0,t) > 1 \geq \tau_v(0,t) \\ (1 + z_u(t))^{\frac{\tau_u(0,t)}{\tau_v(0,t)}} - 1 & , \tau_u(0,t), \tau_v(0,t) > 1 \end{cases} . \tag{2}$$

Wir haben demnach nicht zu unterscheiden, zu welcher Marktusance die Zerozinskurve gegeben ist.

[1] Wir nehmen also an, daß für jede Laufzeit ein liquider Zerobondmarkt existiert. Zur Problematik dieser Annahme siehe [1]: Zinskurven, S. 17.

Der Preis eines Zerobonds läßt sich als Diskontfaktor interpretieren. Sei t wieder die Laufzeit eines Zerobonds. Es bezeichne $d(t)$ den *Diskontfaktor* zur Laufzeit t. Dann ist $ZB(t)$ der Barwert des in t sicher gezahlten Nominalbetrages 1 diskontiert mit Diskontfaktor $d(t) = ZB(t)$. Sei weiter u Marktusance. Wegen (1) gilt dann

$$d(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+\tau_u(0,t)z_u(t)} & , \tau_u(0,t) \leq 1 \\ \left(\frac{1}{1+z_u(t)}\right)^{\tau_u(0,t)} & , \tau_u(0,t) > 1 \end{cases} . \tag{3}$$

Bei Spot-Rate-Betrachtungen startet die Laufzeit in 0, also heute. Wir wollen nun den Preis des Zerobonds mit Laufzeit t zu einem zukünftigen Zeitpunkt s $(0 \leq s \leq t)$ bestimmen. Der heutige Preis eines Zerobonds mit Laufzeit t muß gleich sein dem Preis des Zerobonds mit Restlaufzeit $t - s$ in s, welcher auf heute abgezinst wird. Bezeichnet $d(s,t)$ den Diskontfaktor für den Zeitraum $[s,t]$, so läßt sich dies schreiben als

$$d(t) = d(s)d(s,t) . \tag{4}$$

Es bezeichne $f_u(s,t)$ den zum Diskontfaktor $d(s,t)$ gehörigen Zinssatz gemäß u. Dann gilt wegen (3) und (4)

$$f_u(s,t) = \begin{cases} \left[\frac{d(s)}{d(t)} - 1\right] \tau_u(s,t)^{-1} & , \tau_u(s,t) \leq 1 \\ \left[\frac{d(s)}{d(t)}\right]^{\frac{1}{\tau_u(s,t)}} - 1 & , \tau_u(s,t) > 1 \end{cases} . \tag{5}$$

$f_u(s,t)$ bezeichnet man als *Forward-Rate* von s nach t gemäß u.

Seien t_B und t_E zwei Zeitpunkte/Tage derart, daß $t_B \leq t_E$. Dann stehe $[t_B, t_E]$ für das Tage-Intervall von t_B nach t_E. Do bezeichnet beispielsweise das Intervall $[21.01.00, 23.01.00]$ den Zeitraum vom 21.01.2000 bis einschließlich 23.01.2000. Die Elemente dieses Intervalls sind der 21.01.2000, der 22.01.2000 und der 23.01.20000. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Z}_m := ([t_{B,s}, t_{E,s}])_{s=1}^m$ eine Folge von Tage-Intervallen. Dann nennen wir $\mathcal{Z}_m$ eine *Zerlegung von* $[t_B, t_E]$, wenn die Tage-Intervalle aufeinanderfolgen und aneinandergrenzen, das heißt, wenn für $s \in \{1, \ldots, m\}$

$$t_B \leq t_{B,s} \leq t_{E,s} \leq t_E$$

und für $t \in \{1, \ldots, m-1\}$

$$t_{E,t} = t_{B,t+1} \tag{6}$$

erfüllt ist, und wenn das gesamte Intervall $[t_B, t_E]$ ausgeschöpft wird, das heißt, wenn gilt

$$[t_B, t_E] = \bigcup_{s=1}^{m} [t_{B,s}, t_{E,s}] .$$

Seien t_B der Start- und t_E der Endzeitpunkt der Laufzeit eines Zinsengagements (Cross-Currency-Swap), $m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Z}_m = ([t_{B,s}, t_{E,s}])_{s=1}^m$ eine Zerlegung von $[t_B, t_E]$ in m Zinsperioden. Ferner seien $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und es bezeichne

N_s	den Nominalbetrag der s-ten Zinsperiode
z_s	den Zinssatz der s-ten Zinsperiode.

Weiter seien

$$\mathbf{n}_m := \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

und

$$\mathbf{z}_m := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Die Zinszahlungen erfolgen *nachschüssig* am Ende der zugehörigen Zinsperiode. Bei gegebener Marktusance sind die zukünftigen Zinszahlungen durch die Angabe von $\mathbf{n}_m$ und $\mathbf{z}_m$ eindeutig bestimmt. Wir nennen das Paar $(\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m)$ *Zinszahlungsstrom* der Zerlegung $\mathcal{Z}_m$. Sei u Marktusance. Für den Barwert eines Zinszahlungsstroms $(\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m)$ gilt dann

$$PV((\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m)) = \sum_{s=1}^{m} N_s z_s \tau_u \left(t_{B,s}, t_{E,s}\right) d\left(t_{E,s}\right) .$$

Seien nun $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{Z}_{m_1}$ und $\mathcal{Z}_{m_2}$ zwei Zerlegungen einer CCS-Laufzeit $[t_B, t_E]$. Weiter sei $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$. (Mit dem jeweiligen Index identifizieren wir die Termzugehörigkeit zum jeweiligen Swap-Partner bzw. zur jeweiligen Zerlegung.) Berücksichtigen wir nun die dem CCS zugrunde liegende Tauschvereinbarung, so ergibt sich für den Barwert der Zahlungen von Swap-Partner i

$$\underbrace{\sum_{s=1}^{m_i} N_s^i (d^i(t_{E,s}^i) - d^i(t_{B,s}^i))}_{\text{Tausch der Kapitalbeträge}} \quad + \quad \underbrace{\sum_{s=1}^{m_i} N_s^i z_s^j \tau_{u_j}(t_{B,s}^i, t_{E,s}^i) d^i(t_{E,s}^i)}_{\text{Zinszahlungen}} . \tag{9}$$

Wir wollen (9) in eine handlichere Form überführen. Seien $i, j \in \{1, 2\}$ und u_i Marktusance. Weiterhin führen wir folgende Matrizen ein:

$$\mathbb{T}_{u_i,m_j} := \begin{pmatrix} \tau_{u_i}\left(t^i_{B,1}, t^i_{E,1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_{u_i}\left(t^i_{B,2}, t^i_{E,2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_{u_i}\left(t^i_{B,m_j}, t^i_{E,m_j}\right) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbb{D}^i_{m_j} := \begin{pmatrix} d^i\left(t^i_{E,1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d^i\left(t^i_{E,2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d^i\left(t^i_{E,m_j}\right) \end{pmatrix} \quad (11)$$

und

$$\mathbf{d}^i_{m_j} = \begin{pmatrix} d^i\left(t^i_{E,1}\right) - d^i\left(t^i_{B,1}\right) \\ d^i\left(t^i_{E,2}\right) - d^i\left(t^i_{B,2}\right) \\ \vdots \\ d^i\left(t^i_{E,m_j}\right) - d^i\left(t^i_{B,m_j}\right) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Für den Barwert der Zahlungen von Swap-Partner i folgt dann aus (7)-(12)

$$\left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbf{d}^i_{m_i} + \left[\mathbf{n}^i_m\right]^\top \mathbb{D}^i_{m_i}\, \mathbb{T}_{u_j,m_i} \mathbf{z}^j_{m_i}\,. \quad (13)$$

Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{u_j,m_i} : \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^\top \mathbb{D}^i_{m_i}\, \mathbb{T}_{u_j,m_i} \mathbf{y}\,. \quad (14)$$

$\mathbb{D}^i_{m_i}$ und $\mathbb{T}_{u_j,m_i}$ sind Diagonalmatrizen mit positiven Diagonalelementen, das heißt, $\mathbb{D}^i_{m_i}$ und $\mathbb{T}^i_{u_j,m_i}$ sind positiv definit. Demzufolge ist auch $\mathbb{D}^i_{m_i}\, \mathbb{T}_{u_j,m_i}$ positiv definit und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{u_j,m_i}$ definiert ein Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^{m_i}$.

Wir sind nun in der Lage, die Pricing-Bedingung für einen beliebig konstruierten CCS zu formulieren. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{Z}_{m_1}$ und $\mathcal{Z}_{m_2}$ zwei Zerlegungen einer Laufzeit $[t_B, t_E]$. Weiter seien $\mathbf{n}^1_{m_1}$ und $\mathbf{n}^1_{m_2}$ zwei Nominalbetragsvektoren, $\mathbf{z}^1_{m_2}$ und $\mathbf{z}^2_{m_1}$ zwei Zinsvektoren und F der Umrechnungsfaktor/Wechselkurs von Währung W_1 in Währung W_2 bei Vertragsabschluß. Der CCS soll dann den Zinszahlungsstrom $(\mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1})$ gegen den Zinszahlungsstrom $(\mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2})$ entsprechend der Tauschvereinbarung tauschen. Aus (13) und (14) folgt die Pricing-Bedingung

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} + \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1}\rangle_{u_2,m_1} = \frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}\right]. \quad (15)$$

Die Vektoren der zukünftigen Zinssätze $\mathbf{z}^1_{m_2}$ und $\mathbf{z}^2_{m_1}$ können bei Swapvereinbarungen fixiert werden. Bei variabel vereinbarten Zinszahlungen ist $\mathbf{z}^1_{m_2}$ und/oder $\mathbf{z}^2_{m_1}$ an die zukünftige Entwicklung eines Referenzzinssatzes (z.B. LIBOR, IRS-Rate) geknüpft und folglich nicht bekannt. In diesem Fall ist $\mathbf{z}^1_{m_2}$ und/oder $\mathbf{z}^2_{m_1}$ ein Zufallsvektor, welcher möglichst exakt geschätzt werden muß. Ist der Referenzzinssatz ein Geldmarktsatz, nutzt man hierfür Forward-Rates. Seien $i, j \in \{1, 2\}$ und u_j Marktusance und

$$\mathbf{f}_{u_j,m_i} := \begin{pmatrix} f_{u_j}\left(t^i_{B,1}, t^i_{E,1}\right) \\ f_{u_j}\left(t^i_{B,2}, t^i_{E,2}\right) \\ \vdots \\ f_{u_j}\left(t^i_{B,m_i}, t^i_{E,m_i}\right) \end{pmatrix} . \tag{16}$$

Dann erfolgt die Schätzung[2]

$$\mathbf{z}^j_{m_i} = \mathbf{f}_{u_j,m_i} . \tag{17}$$

Da wir als Referenzzinssatz einen Geldmarktsatz zugrundegelegt haben, betrachten wir unterjährige Zinsperioden. Für $s \in \{1, \ldots, m_i\}$ gilt

$$\tau_{u_j}\left(t^i_{B,s}, t^i_{E,s}\right) \leq 1 .$$

Hieraus sowie aus (5), (10), (11) und (12) folgt dann

$$\mathbf{f}_{u_j,m_i} = \mathbb{T}^{-1}_{u_j,m_i}\left[\mathbb{D}^j_{m_i}\right]^{-1}\left(-\mathbf{d}^j_{m_i}\right) = -\mathbb{T}^{-1}_{u_j,m_i}\left[\mathbb{D}^j_{m_i}\right]^{-1}\mathbf{d}^j_{m_i} . \tag{18}$$

Aus (17) und (18) folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}^i_{m_i}, \mathbf{z}^j_{m_i} \rangle_{u_j,m_i} &= \langle \mathbf{n}^i_{m_i}, \mathbf{f}_{u_j,m_i} \rangle_{u_j,m_i} \\ &= \left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbb{D}^i_{m_i}\, \mathbb{T}_{u_j,m_i} \mathbf{f}_{u_j,m_i} \\ &= \left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbb{D}^i_{m_i}\, \mathbb{T}_{u_j,m_i}\left(-\mathbb{T}^{-1}_{u_j,m_i}\left[\mathbb{D}^j_{m_i}\right]^{-1}\mathbf{d}^j_{m_i}\right) \\ &= -\left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbb{D}^i_{m_i}\left[\mathbb{D}^j_{m_i}\right]^{-1}\mathbf{d}^j_{m_i} . \end{aligned} \tag{19}$$

(19) macht deutlich, daß bei gegebenen Zerozinskurven und Zerlegung $\mathcal{Z}_{m_i}$ der Barwert eines variabel nach Geldmarktreferenzsatz verzinsten Zinszahlungsstroms $(\mathbf{n}^i_{m_i}, \mathbf{z}^j_{m_i})$ lediglich vom Nominalbetragsvektor $\mathbf{n}^i_{m_i}$ abhängt. Die verwendete Marktusance spielt keine Rolle.

2.2 Methoden und Parameter des Swap-Pricing

In diesem Abschnitt werden wir Möglichkeiten aufzeigen, beliebig konstruierte CCS einem Pricing zu unterziehen. Wir nehmen wieder an, daß in den Währungen W_1 und W_2 Zerozinskurven existieren. Es gelten die oben eingeführten Bezeichnungen.

[2] Die Setzung (17) ist zwingend (Arbitragefreiheit). Die Schätzung liegt in der Konstruktion der $\mathbf{f}_{u_j,m_i}$ zugrunde liegenden Zerozinskurve $\left(z_{u_j}(t)\right)_{t\geq 0}$ in Währung W_j.

2.2.1 Up-Front-Payments

Unter einem *Up-Front-Payment* (UFP) verstehen wir eine bei Vertragsabschluß vereinbarte und bei Swapstart fällige (Voraus-)Zahlung eines Swap-Partners an den anderen. Das UFP wird bei Swapstart in t_B als Differenz der Barwerte der Zahlungsströme ermittelt und gezahlt. In diesem Kontext lassen sich *Forward-Rate-Agreements* (FRA) als einperiodige Forward-Swaps mit UFP-Vereinbarung begreifen (siehe Abschnitt 4.6, S. 22).

Sei t_B = heute. Dann gilt

$$UFP = \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} + \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{u_2,m_1} - \frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}\right]$$

und folgende Zahlungsvereinbarung wird getroffen:

$$\begin{aligned} UFP \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Partner 1 erhält } UFP \\ UFP < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Partner 1 zahlt } -F \cdot UFP\,. \end{aligned}$$

2.2.2 Swap-Pricing via Spreads

Unter einem *Spread* versteht man einen über die Laufzeit konstanten Auf- oder Abschlag zum jeweiligen Zins. Seien $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{1}_q := (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{q \text{ Einträge}})^\top$$

und $a \in \mathbb{R}$. Weiter sei mit obigen Bezeichnungen $(\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m)$ ein Zinszahlungsstrom bzgl. einer Zerlegung $\mathcal{Z}_m$. Dann heißt $(\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m + a\mathbf{1}_m)$ *Zinszahlungsstrom* $(\mathbf{n}_m, \mathbf{z}_m)$ *plus Spread* a. Das Pricing via Spreads erfolgt über die Festsetzung des Spread-Parameters bei einem der zu tauschenden Zahlungsströme. Die Pricing-Bedingung lautet

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} + \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} + a\mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1} = \frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}\right].$$

Aus der Tatsache, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle_{u_2,m_1}$ ein Skalarprodukt ist, folgt bei Beachtung von $\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1} \neq 0$ dann

$$a = \frac{\frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}\right] - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}}. \quad (20)$$

Ein Swap ist fair, wenn $(\mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1})$ plus Spread a gegen $(\mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2})$ mit a gemäß (20) getauscht wird.

2.2.3 Pricing von In-arrears-Swaps via Spreads

Bei einem *In-arrears-Swap* tauscht man einen beliebigen Zinszahlungsstrom gegen einen In-arrears-Zinszahlungsstrom. Letzterer zeichnet sich dadurch aus, daß die Zinszahlungen für eine Zinsperiode „in arrears“ berechnet werden. Dies bedeutet, daß die für eine Zinsperiode zu leistende Zinszahlung nicht mit dem Zinssatz dieser Periode, sondern mit dem Zinssatz der nächsten Periode berechnet wird. Die Zinssätze finden also „rückwärts“ Anwendung.

Das Pricing eines In-arrears-Swap erfolgt via Spreads. Es gelten die obigen Bezeichnungen. Weiter seien $z^2_{m_1+1}$ der für die letzte Zinsperiode vereinbarte „in arrears“-Zinssatz und

$$\mathbf{z}^{2+}_{m_1} := (z^2_2,\, z^2_3,\, \ldots,\, z^2_{m_1},\, z^2_{m_1+1})^\top . \tag{21}$$

Aus (20) und (21) folgt dann für den Spread

$$a = \frac{\frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}\right] - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^{2+}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}} . \tag{22}$$

2.2.4 Swap-Pricing via Swap-Rate

Es mögen die obigen Bezeichnungen gelten. Wir betrachten einen Swap, bei dem der Zinszahlungsstrom $(\mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1})$ einen zeitlich konstanten Zinssatz $S \in \mathbb{R}^+$ besitzt. Es gilt also

$$\mathbf{z}^2_{m_1} = S\mathbf{1}_{m_1} .$$

Ein Festzins S heißt *Swap-Rate* oder *Swapsatz*, wenn S die obige Pricing-Bedingung sicherstellt, das heißt, wenn gilt

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1} + \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, S\mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1} = \frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}\right] .$$

Aus der Tatsache, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_{u_2,m_1}$ ein Skalarprodukt ist, ergibt sich bei Beachtung von $\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1} \neq 0$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Swap ist fair.

(ii) S ist Swap-Rate.

(iii) Es gilt

$$S = \frac{\frac{1}{F}\left[\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}^2_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}\right] - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}^1_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}} . \tag{23}$$

Der Swap ist also fair, wenn $(\mathbf{n}^1_{m_1}, S\mathbf{1}_{m_1})$ gegen $(\mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2})$ mit S gemäß (23) getauscht wird. Vergleicht man (20) und (23) so erkennt man, daß S der Spread des Zahlungsstroms $(\mathbf{n}^1_{m_1}, 0 \cdot \mathbf{1}_{m_1})$ ist.

3 Pricing konkreter Swapkonstruktionen

In diesem Abschnitt werden wir die abstrakten Formeln für das Pricing von Cross-Currency-Swaps auf konkrete Swapkonstruktionen innerhalb einer Währung anwenden und handliche Formeln für die jeweiligen Parameter erhalten.

Sämtliche Berechnungen beruhen jetzt auf einer Zinsstruktur innerhalb einer Währung. Wir diskontieren also auf Grundlage einer gegebenen Zerozinskurve.

Für $i, j \in \{1, 2\}$ gilt wegen (11) und (12) dann

$$\mathbb{D}^i_{m_j} = \mathbb{D}^j_{m_j} = \mathbb{D}_{m_j}$$

und

$$\mathbf{d}^j_{m_j} = \mathbf{d}^i_{m_j} = \mathbf{d}_{m_j} .$$

Hieraus folgt mit (19) für den Barwert eines variabel nach Geldmarktreferenzsatz verzinsten Zinzzahlungsstroms $(\mathbf{n}^i_{m_i}, \mathbf{z}^j_{m_i})$

$$\langle \mathbf{n}^i_{m_i}, \mathbf{z}^j_{m_i} \rangle_{u_j, m_i} = - \left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbb{D}_{m_i} \mathbb{D}^{-1}_{m_i} \mathbf{d}_{m_i} = - \left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbf{d}_{m_i} . \tag{24}$$

Weiterhin ist $F = 1$. Die Pricing-Bedingung für Swaps in einer Währung lautet bei Beachtung von (15)

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1} + \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{u_2, m_1} = \left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1, m_2} .$$

Für die Pricing-Parameter ergibt sich

Pricing-Parameter	Formel
Spread	$\frac{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1, m_2} - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{u_2, m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2, m_1}}$
In-arrears-Spread	$\frac{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1, m_2} - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^{2+}_{m_1} \rangle_{u_2, m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2, m_1}}$
Swap-Rate	$\frac{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2} + \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1, m_2} - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2, m_1}}$

Bei Einwährungsswaps ist zu beachten, daß die zu tauschenden Kapitalbeträge gegeneinander aufgerechnet, das heißt „genettet“, werden. Unter gewissen Bedingungen kann man daher die Terme für den Tausch der Nominalbeträge in obiger Tabelle streichen. Wir bezeichnen die Nominalbetragsvektoren zweier Zinszahlungsströme als *zeitlich gleichverteilt*, wenn die Nominalbeträge bei sich überschneidenden Zinsperioden gleich sind.

Es seien $\mathbf{n}^1_{m_1}$ und $\mathbf{n}^2_{m_2}$ zeitlich gleichverteilte Nominalbetragsvektoren. Dann gilt

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1} = \left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}\,. \tag{25}$$

Wir zeigen dies exemplarisch für den Fall, daß auf beiden Seiten der gleiche zeitlich konstante Nominalbetrag N vereinbart wird. Sei $i \in \{1,2\}$. Wegen (12) und (6) ist $\mathbf{1}^\top_{m_i}\mathbf{d}_{m_i}$ eine sogenannte Teleskopsumme. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{n}^i_{m_i}\right]^\top \mathbf{d}_{m_i} &= N\mathbf{1}^\top_{m_i}\mathbf{d}_{m_i} \\
&= \sum_{s=1}^{m_i} N^i_s(d^i(t^i_{E,s}) - d^i(t^i_{B,s})) \\
&= N(-d(t^i_{B,1}) + d(t^i_{E,m_i})) \\
&= N(-d(t_B) + d(t_E))\,,
\end{aligned} \tag{26}$$

also

$$\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1} = N(-d(t_B) + d(t_E)) = \left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}\,.$$

Bei zeitlich gleichverteilten Nominalbetragsvektoren werden die zu tauschenden Kapitalbeträge genettet (vgl. (25)). Es werden *nur* die zukünftigen Zinszahlungen getauscht. Da dieser Fall bei den meisten Swapkonstruktionen vorliegt, ist im allgemeinen Sprachgebrauch ein Einwährungsswap gleichbedeutend mit dem Tausch der zukünftigen Zinszahlungen. Für die weiteren Betrachtungen gehen wir davon aus, daß die Nominalbetragsvektoren zeitlich gleichverteilt sind. Die Pricing-Bedingung vereinfacht sich wegen (25) zu

$$\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1}\rangle_{u_2,m_1} = \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}\,.$$

Für die Pricing-Parameter ergibt sich in diesem Fall

Pricing-Parameter	Formel
Spread	$\frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2},\mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1},\mathbf{z}^2_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1},\mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}$
In-arrears-Spread	$\frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2},\mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1},\mathbf{z}^{2+}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1},\mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}$
Swap-Rate	$\frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2},\mathbf{z}^1_{m_2}\rangle_{u_1,m_2}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1},\mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_2,m_1}}$

(27)

Die Formeln aus (27) werden nun für konkrete Swapkonstruktionen berechnet.

3.1 Pricing von Basisswaps

Beim Basisswap werden variable Zinsen gegeneinander getauscht. Die variablen zukünftigen Zinssätze werden zu Beginn der Zinsperioden an einen dann gültigen Referenzzinssatz angepaßt. Das Pricing von Basisswaps erfolgt via Spreads gemäß (27).

Im Normalfall versteht man unter einem Basisswap einen Geldmarktbasisswap. Ein Geldmarktbasisswap tauscht Geldmarktreferenzzinssätze unterschiedlicher Zinsperiodenlänge. Ein Beispiel für diese Konstruktion ist der Tausch von 3-Monats-EURIBOR gegen 6-Monats-EURIBOR. Aus (27), (24) und (25) folgt für den Spread eines Geldmarktbasisswaps bei zeitlich gleichverteilten Nominalbetragsvektoren

$$\begin{aligned} a &= \frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2} - \langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}} \\ &= \frac{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2} - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}} \\ &= \frac{0}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_2,m_1}} \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Es gilt also Spread $a = 0$, das heißt, Geldmarktbasisswaps sind automatisch im Gleichgewicht.

3.2 Pricing von Referenzzinssatz-in-arrears-Swaps

Ein Referenzzinssatz-in-arrears-Swap ist eine Kombination eines In-arrears-Swap mit einem Basisswap. Getauscht wird ein variabler Zinszahlungsstrom bzgl. eines Referenzzinssatzes gegen einen variablen Zinszahlungsstrom bzgl. des gleichen Referenzzinssatzes in arrears. Das Pricing erfolgt via Spread gemäß (27). Als Referenzzinssätze sind „den Erfordernissen entsprechend“ komplexe Kontruktionen möglich. Ein Beispiel wäre ein Referenzzinssatz, der zu bestimmten Zeiten an Swap-Rates angepaßt wird.

Wir betrachten jetzt (27) für Geldmarktreferenzzinssätze und werden zeigen, daß der Spread dann lediglich vom Vektor der Nominalbeträge und den gewählten Laufzeiten abhängt. Seien u eine Marktusance und $\mathcal{Z}_m$ eine Zerlegung der Laufzeit. Weiter sei $[t_{B,m+1}, t_{E,m+1}]$ das Tage-Intervall, auf das sich die Forward-Rate für die über die Laufzeit hinausgehende Zinsperiode bezieht und

$$\mathbf{f}^+_{u,m} = \begin{pmatrix} f_u\left(t_{B,2}, t_{E,2}\right) \\ f_u\left(t_{B,3}, t_{E,3}\right) \\ \vdots \\ f_u\left(t_{B,m}, t_{E,m}\right) \\ f_u\left(t_{B,m+1}, t_{E,m+1}\right) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Aus (27) und (29) folgt dann

$$\begin{aligned} a &= \frac{\langle \mathbf{n}_m, \mathbf{f}_{u,m} \rangle_{u,m} - \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{f}^+_{u,m} \rangle_{u,m}}{\langle \mathbf{n}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \\ &= \frac{-\mathbf{n}_m^\top \mathbf{d}_m - \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{f}^+_{u,m} \rangle_{u,m}}{\langle \mathbf{n}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Der Geldmarktzinssatz-in-arrears-Swap ist also fair, wenn ein Geldmarktzinssatz gegen einen Geldmarktzinssatz-in-arrears plus Spread gemäß (30) getauscht wird. Wegen (5) hängt der Spread bei gegebener Zerozinskurve nur vom Vektor der Nominalbeträge und den gewählten Laufzeiten ab. Wir nehmen nun an, daß ein konstanter Nominalbetrag N vereinbart wurde. Aus (30) folgt dann

$$\begin{aligned} a &= \frac{-N\mathbf{1}_m^\top \mathbf{d}_m - \langle N\mathbf{1}_m, \mathbf{f}^+_{u,m} \rangle_{u,m}}{\langle N\mathbf{1}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \\ &= \frac{-\mathbf{1}_m^\top \mathbf{d}_m - \langle \mathbf{1}_m, \mathbf{f}^+_{u,m} \rangle_{u,m}}{\langle \mathbf{1}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \\ &= \frac{d(t_B) - d(t_E) - \langle \mathbf{1}_m, \mathbf{f}^{+1}_{u,m} \rangle_{u,m}}{\langle \mathbf{1}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \\ &= \frac{d(t_B) - d(t_E) - \sum_{s=1}^{m} \left[d\left(t_{B,s+1}\right) - d\left(t_{E,s+1}\right) \right] \frac{\tau_u\left(t_{B,s}, t_{E,s}\right) d\left(t_{E,s}\right)}{\tau_u\left(t_{B,s+1}, t_{E,s+1}\right) d\left(t_{E,s+1}\right)}}{\sum_{s=1}^{m} \tau_u\left(t_{B,s}, t_{E,s}\right) d\left(t_{E,s}\right)} \,. \end{aligned} \tag{31}$$

Bei festem Nominalbetrag hängt der Spread demnach nur noch von den gewählten Laufzeiten und der verwendeten Money-Market-Usance u ab. Sei $A \in \{\mathbb{D}_m, \mathbb{T}_{u,m}, \mathbf{d}_m\}$. Dann bezeichne A^+ die aus A durch Verschieben einer Zinsperiode erzeugte Matrix (vgl. z.B. (29)). Dann läßt sich (31) umschreiben zu

$$a = \frac{\mathbf{1}_m^\top (\mathbf{d}_m - \mathbb{D}_m \left[\mathbb{D}_m^+\right]^{-1} \mathbb{T}_m \left[\mathbb{T}_m^+\right]^{-1} \mathbf{d}_m^+)}{\langle \mathbf{1}_m, \mathbf{1}_m \rangle_{u,m}} \,.$$

3.3 Pricing von Interest-Rate-Swaps

Ein *Interest-Rate-Swap* (IRS) ist dadurch gekennzeichnet, daß ein Zinszahlungsstrom einen über die Laufzeit konstanten Zinssatz hat. Das Pricing eines IRS erfolgt via Swap-Rate gemäß (27).

In der Praxis versteht man unter einem IRS den Austausch von einem Zinszahlungsstrom mit festen Zinssatz gegen einen Zinszahlungsstrom mit variablem Geldmarktreferenzzinssatz. Die Festseite wird mit $\frac{30}{360}$ einmal im Jahr abgerechnet. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Z}_{m_1}$ sowie $\mathcal{Z}_{m_2}$ Zerlegungen der

Laufzeit. Weiter sei 1 der Index des Partners, der Festzins empfängt und variabel gibt. Dann ist $u_2 = \frac{30}{360}$ und für $s \in \{1, \ldots, m_1\}$ gilt

$$\tau_{u_2}(t^1_{B,s}, t^1_{E,s}) = \tau_{\frac{30}{360}}(t^1_{B,s}, t^1_{E,s}) = 1\,,$$

das heißt, $\mathbb{T}_{\frac{30}{360},m_1}$ ist die $(m_1 \times m_1)$-dimensionale Einheitsmatrix. Die Marktusance der variablen Seite wurde bereits als für deren Barwert nicht relevant erkannt. Aus (27) und (24) folgt für den Tausch fest gegen variabel

$$S = \frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{\frac{30}{360},m_1}} = \frac{-\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{\frac{30}{360},m_1}} = \frac{-\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}}{\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbb{D}_{m_1} \mathbf{1}_{m_1}}\,. \tag{32}$$

Einen IRS mit wachsenden (fallenden) Nominalbeträgen bezeichnet man als Step-Up-Swap1 (Step-Down-Swap1). Geht man von zeitlich konstanten Nominalbeträgen aus, so vereinfacht sich (32) wegen (26) zu

$$S = \frac{d(t_B) - d(t_E)}{\sum\limits_{s=1}^{m_1} d(t^1_{E,s})}\,. \tag{33}$$

Die Swap-Rate S hängt bei gegebener Zerozinskurve nur vom Laufzeitintervall $[t_B, t_E]$ und der Zerlegung $\mathcal{Z}_{m_1}$ ab. Weder die Marktusance der variablen Seite noch die Zerlegung $\mathcal{Z}_{m_2}$ in Zinsperioden (z.B. 6-Monats-EURIBOR oder 3-Monats-EURIBOR) spielen eine Rolle.

Es gibt Vereinbarungen, bei denen der Zinsvektor der festen Seite nicht nach (32) bestimmt, sondern „den Erfordernissen entsprechend“ fixiert wird. Es ist sogar möglich, daß die Zinsvektorelemente variieren. Einen IRS mit wachsenden (fallenden) festen Zinssätzen bezeichnet man als Step-Up-Swap2 (Step-Down-Swap2). Das Pricing eines IRS mit frei gewähltem festen Zinsvektor $\mathbf{z}^2_{m_1}$ erfolgt via Spreads gemäß (27). Wird ein fester Zinssatz vereinbart, erhält die feste Seite nicht Geldmarktreferenzsatz, sondern Geldmarktreferenzsatz plus Spread. Aus (27) ergibt sich ein Spread von

$$\begin{aligned} a &= \frac{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{z}^2_{m_1} \rangle_{\frac{30}{360},m_1} - \langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{z}^1_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}}{\langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{1}_{m_2} \rangle_{u_1,m_2}} \\ &= \frac{\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbb{D}_{m_1} \mathbf{z}^2_{m_1} - \left(-\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}\right)}{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbb{D}_{m_2} \mathbb{T}_{u_1,m_2} \mathbf{1}_{m_2}} \\ &= \frac{\left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbb{D}_{m_1} \mathbf{z}^2_{m_1} + \left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}}{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbb{D}_{m_2} \mathbb{T}_{u_1,m_2} \mathbf{1}_{m_2}}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Für auf beiden Seiten gleiche und zeitlich konstante Nominalbeträge N folgt aus (34) und (26)

$$a = \frac{\left[N\mathbf{1}_{m_1}\right]^\top \mathbb{D}_{m_1} \mathbf{z}^2_{m_1} + \left[N\mathbf{1}_{m_2}\right]^\top \mathbf{d}_{m_2}}{N\mathbf{1}^\top_{m_2} \mathbb{D}_{m_2} \mathbb{T}_{u_1,m_2} \mathbf{1}_{m_2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{[\mathbf{1}_{m_1}]^\top \mathbb{D}_{m_1} \mathbf{z}^2_{m_1} + [\mathbf{1}_{m_2}]^\top \mathbf{d}_{m_2}}{\mathbf{1}^\top_{m_2} \mathbb{D}_{m_2} \mathbb{T}_{u_1,m_2} \mathbf{1}_{m_2}} \\
&= \frac{\sum\limits_{s=1}^{m_1} d(t^1_{E,s}) z_s^2 - d(t_B) + d(t_E)}{\sum\limits_{s=1}^{m_2} \tau_{u_1}\left(t^2_{B,s}, t^2_{E,s}\right) d(t^2_{E,s})}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

3.4 Pricing von Constant-Maturity-Swaps

Der Constant-Maturity-Swap ist ein spezieller Basisswap. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß der Referenzzinssatz der einen variablen Seite ein IRS-Swapsatz ist. Der Referenzsatz der anderen variablen Seite ist ein Geldmarktreferenzzinssatz. Der IRS-Referenzsatz wird zu bestimmten Zeitpunkten jährlich an eine vorher festgelegte und dann gültige Swap-Rate angepaßt. Das Pricing erfolgt via Spread auf der Geldmarktreferenzzinssatzseite nach (27).

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der IRS-Referenzsatz soll an den n-Jahres-Swapsatz angepaßt werden. Wir bestimmen den zugehörigen IRS-Zinsvektor, indem wir die Forward-n-Jahres-Swapsätze berechnen. Sei $s \in \{1, \ldots, m_2 - 1\}$ und $[t^2_{B,s}, t^2_{E,s}]$ die s-te Zinsperiode. In Anlehnung an die Symbolik der Forward-Rates bezeichnen wir mit $S_{\left(t^2_{B,s}, t^2_{B,s}+n\right)}$ den n-Jahres-Swapsatz der Laufzeit $[t^2_{B,s}, t^2_{B,s} + n]$. Wegen (33) gilt dann

$$
S_{\left(t^2_{B,s}, t^2_{B,s}+n\right)} = \frac{d(t^2_{B_s}) - d(t^2_{B,s} + n)}{\sum\limits_{w=1}^{n} d(t^2_{B,s} + w)}. \tag{36}
$$

Sei

$$
\mathbf{s}_{n,m_2} := \begin{pmatrix} S_{\left(t^2_{B,1}, t^2_{B,1}+n\right)} \\ \vdots \\ S_{\left(t^2_{B,m_2}, t^2_{B,m_2}+n\right)} \end{pmatrix}. \tag{37}
$$

Da die IRS-Swapsatzseite nach $\frac{30}{360}$ abgerechnet wird, ist $\mathbb{T}_{\frac{30}{360},m_2}$ die $(m_2 \times m_2)$-dimensionale Einheitsmatrix. Aus (27), (36) und (37) folgt dann

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{s}_{n,m_2} \rangle_{\frac{30}{360},m_2} - \left[\mathbf{n}^1_{m_1}\right]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_1,m_1}} \\
&= \frac{\langle \mathbf{n}^2_{m_2}, \mathbf{s}_{n,m_2} \rangle_{\frac{30}{360},m_2} + [\mathbf{n}_{m_1}]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_1,m_1}} \\
&= \frac{\left[\mathbf{n}^2_{m_2}\right]^\top \mathbb{D}_{m_2} \mathbf{s}_{n,m_2} + [\mathbf{n}_{m_1}]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{\langle \mathbf{n}^1_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1} \rangle_{u_1,m_1}}.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Vereinbart man nun einen auf beiden Seiten gleichen, zeitlich konstanten Nominalbetrag N, so vereinfacht sich (38) zu

$$\begin{aligned} a &= \frac{[N\mathbf{1}_{m_2}]^\top \mathbb{D}_{m_2}\mathbf{s}_{n,m_2} + [N\mathbf{1}_{m_1}]^\top \mathbf{d}_{m_1}}{N\langle \mathbf{1}_{m_1}, \mathbf{1}_{m_1}\rangle_{u_1,m_1}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{m_2} S_{\left(t^2_{B,t}, t^2_{B,t}+n\right)} d(t^2_{E,t}) - d(t_B) + d(t_E)}{\sum_{s=1}^{m_1} \tau_{u_1}\left(t^1_{B,s}, t^1_{E,s}\right) d(t^1_{E,s})}. \end{aligned}$$

3.5 Die Konsistenz von Swap-Rates und Spot-Rates

Spricht man in der Praxis vom Swapsatz oder Zinsswap des Laufzeitintervalls $[t_B, t_E]$, so meint man die gemäß (33) (mit t_B = heute) bestimmte Swap-Rate. Im Handelsblatt vom 30.08.2000 ist nun folgende Tabelle für Zins-Swaps (Euro-EURIBOR) der Laufzeit n-Jahre abgedruckt:

Jahre	*Geld*	*Brief*
1	*5,41*	*5,45*
2	*5,53*	*5,57*
3	*5,60*	*5,64*
4	*5,66*	*5,70*
⋮	⋮	⋮

Geld und Brief nach Schluß London:
Euros werden auf jährlicher Bond-Basis 30/360
gegen 6-Monats-EURIBOR quotiert
Ausnahme 1 Jahressatz gegen 3-Monats-EURIBOR.
Mitgeteilt von Garban Intercapital plc.

Die Money-Market-Usance wird nicht erwähnt. Dies deckt sich mit unseren Erkenntnissen, daß diese keinerlei Relevanz besitzt. Interessant ist die Unterscheidung zwischen der Laufzeit $n = 1$ mit Referenzzins 3-Monats-EURIBOR und $n > 1$ mit Referenzzins 6-Monats-EURIBOR. Nach (33) ist diese Unterscheidung doch nicht sinnvoll?

Die Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs liegt in der Unterscheidung der Swapsätze. In (33) steht der aus einer gegebenen Zerozinskurve errechnete Swapsatz der Laufzeit n. Die Handelsblatt-Erläuterung bezieht sich auf am Kapitalmarkt nach Angebot und Nachfrage quotierten Swapsätzen. Den 1-Jahressatz statt gegen 6-Monats-EURIBOR gegen 3-Monats-EURIBOR zu quotieren, könnte in einer höheren Liquidität begründet liegen.

Der Zusammenhang zwischen Spot-Rates und Swap-Rates soll jetzt detailiert aufgezeigt werden. Wegen (3) ist dies äquivalent mit der Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen Swap-Rates und Diskontfaktoren. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Laufzeit unserer Betrachtung in Jahren. Weiter sei $l \in \{1, \ldots, n\}$. Es bezeichne S_l die gemäß (33) berechnete Swap-Rate und $d(l)$ den Diskontfaktor

für die Laufzeit l Jahre. Wegen (33) gilt

$$S_l = \frac{1 - d(l)}{\sum_{s=1}^{l} d(s)}\,. \tag{39}$$

Steht uns eine Zerozinskurve zur Verfügung, so lassen sich die Swap-Rates via (39) und (3) aus den Spot-Rates berechnen.

Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$. Es bezeichne S_l^M den am Kapitalmarkt quotierten Swapsatz für die Laufzeit l Jahre. Beim Zugrundelegen der „richtigen“ Zerozinskurve muß gelten

$$S_l = S_l^M\,. \tag{40}$$

Aus (39) und (40) folgt

$$S_l^M = \frac{1 - d(l)}{\sum_{s=1}^{l} d(s)}\,. \tag{41}$$

Die Beziehung (41) läßt sich überführen in

$$\begin{aligned} 1 &= S_l^M \sum_{s=1}^{l} d(s) + d(l) \\ &= S_l^M \sum_{s=1}^{l-1} d(s) + (1 + S_l^M) d(l)\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\mathbb{S}_n^M := \begin{pmatrix} S_1^M + 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2^M & S_2^M + 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_3^M & S_3^M & S_3^M + 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n^M & S_n^M & S_n^M & \ldots & S_n^M + 1 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{d}_n := (d(1), d(2), \ldots, d(n))^\top$. läßt sich (42) formulieren als

$$\mathbb{S}_n^M \mathbf{d}_n = \mathbf{1}_n\,. \tag{43}$$

Als Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen ungleich 0 ist $\mathbb{S}_n^M$ invertierbar. Hieraus und aus (43) folgt dann

$$\mathbf{d}_n = \left[\mathbb{S}_n^M\right]^{-1} \mathbf{1}_n\,. \tag{44}$$

Wegen (44) und (3) lassen sich also Spot-Rates aus den am Kapitalmarkt quotierten Swap-Rates berechnen.

Es sei bemerkt, daß es sich bei (44) um ein „spezielles“ Bootstrapping-verfahren handelt. Beim Bootstrapping werden Spot-Rates aus den Kupons von *am Markt notierenden* Straight-Bonds iterativ berechnet.

4 Pricing-Parameter in Anwendungen

In diesem Abschnitt sollen die Parameter für konkrete Swapkonstruktionen an Beispielen berechnet werden. Wir nehmen hierfür die folgende Zerozinskurve, konstruiert nach Bond-Basis, als gegeben an.

Laufzeit	Zerosatz ×100	Diskont-faktor	Laufzeit	Zerosatz ×100	Diskont-faktor
0,5	3,3000	0,98377	3,5	4,4200	0,85952
1	3,4000	0,96712	4	4,7000	0,83217
1,5	3,5100	0,94957	4,5	4,9200	0,80563
2	3,6200	0,93135	5	5,1400	0,77832
2,5	3,8800	0,90922	5,5	5,3200	0,75195
3	4,1400	0,88542	6	5,5000	0,72525

4.1 Pricing eines IRS (Kupon-Swap)

Unter der gegebenen Zerozinskurve soll der Preis eines IRS via Swap-Rate ermittelt werden. Laufzeit 6 Jahre, Start heute, Nominalbetrag 100 Mio DM. Getauscht wird gegen 6-Monats-EURIBOR. Wegen (33) gilt

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-d(6)}{\sum_{s=1}^{6} d(s)} \\ &= \frac{1-0,72525}{0,96712+0,93135+0,88542+0,83217+0,77832+0,72525} \\ &= \frac{0,27475}{5,11963} \\ &= \underline{\underline{5,3666 \cdot 100^{-1}}}. \end{aligned}$$

4.2 Pricing eines Step-Up-Swap1

Es soll die Swap-Rate von Beispiel 1 mit dem Unterschied bestimmt werden, daß folgende Nominalvektoren zugrunde liegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{12}^1 &= 1000\,\text{Mio DM} \cdot (10,10,12,12,18,18,25,25,30,30,40,40)^\top \\ \mathbf{n}_6^2 &= 1000\,\text{Mio DM} \cdot (10,12,18,25,30,40)^\top . \end{aligned}$$

Wegen (32) gilt

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left[\mathbf{n}_{12}^1\right]^\top \mathbf{d}_{12}}{\left[\mathbf{n}_6^2\right]^\top \mathbb{D}_6\, \mathbf{1}_6} \\ &= \frac{1000\,\text{Mio DM} \cdot 6,65433}{1000\,\text{Mio DM} \cdot 109,9488} = \frac{6,65433}{109,9488} \\ &= \underline{\underline{6,0522 \cdot 100^{-1}}}. \end{aligned}$$

4.3 Pricing eines Step-Up-Swap2

Unter der gegebenen Zerozinskurve soll der Preis eines IRS mit steigendem fixierten Nominalzins und gleichbleibenden Nominalbetrag bestimmt werden. Getauscht wird gegen 6-Monats-EURIBOR. Gesamtlaufzeit 6 Jahre, Start heute. Bestimmt wird der Spread. Der fixierte Festzinsvektor sei

$$\mathbf{z}_6 = 100^{-1} \cdot (3.50\,,\ 4.5\,,\ 5.5\,,\ 5.75\,,\ 5.9\,,\ 6.25)^\top .$$

Wegen (35) gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{s=1}^{6} d(s)\,[\mathbf{z}_6]_s - 1 + d(6)}{\sum_{s=1}^{12} \tau_{\frac{act}{360}}\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}\right) d\left(\frac{s}{2}\right)} \\ &= \frac{100^{-1} \cdot 26,355683 - 1 + 0,72525}{\frac{182}{360} \cdot 10,3893} \\ &= \frac{-0,01119317}{5,25237} \\ &= \underline{\underline{-0,213107 \cdot 100^{-1}}}\,. \end{aligned}$$

4.4 Pricing eines EURIBOR-in-arrears-Swaps

Wir wollen einen Basisswap mit folgenden Merkmalen pricen. Laufzeit 2 Jahre, Start heute. Ein Swap-Partner erhält den 6-Monats-EURIBOR. Dafür zahlt er 6-Monats-EURIBOR arrears plus Spread. Wegen (31) gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 - d(2) - \sum_{s=1}^{4} \left[d\left(\frac{s}{2}\right) - d\left(\frac{s+1}{2}\right)\right] \frac{\tau_{\frac{act}{360}}\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}\right) d\left(\frac{s}{2}\right)}{\tau_{\frac{act}{360}}\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right) d\left(\frac{s+1}{2}\right)}}{\sum_{s=1}^{4} \tau_{\frac{act}{360}}\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}\right) d\left(\frac{s}{2}\right)} \\ &= \frac{1 - d(2) - \sum_{s=1}^{4} \left[d\left(\frac{s}{2}\right) - d\left(\frac{s+1}{2}\right)\right] \frac{d\left(\frac{s}{2}\right)}{d\left(\frac{s+1}{2}\right)}}{\sum_{s=1}^{4} \tau_{\frac{act}{360}}\left(\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}\right) d\left(\frac{s}{2}\right)} \\ &= \frac{1 - 0,93135 - 0,076056}{\frac{182}{360} \cdot 3,83181} \\ &= \underline{\underline{0,382306 \cdot 100^{-1}}}\,. \end{aligned}$$

4.5 Pricing eines Forward-Swaps

Der Treasurer einer Bank will einen Kredit in Höhe von DM 10 Mio absichern, der in zwei Jahren starten und in fünf Jahren enden wird. Dazu

schließt er einen Forward-IRS ab. Mit obigen Bezeichnungen gilt $[t_B, t_E] = [2, 5]$, das heißt, Start in 2 Jahren und Ende nach 5 Jahren. Wegen (33) gilt

$$S = \frac{d(2) - d(5)}{\sum_{s=3}^{5} d(s)} = \frac{0,15303}{2,49591} = \underline{\underline{6,1312 \cdot 100^{-1}}}.$$

4.6 Forward-Rate-Agreements als Forward-Swaps

Wir hatten festgestellt, daß sich FRA als einperiodige Forward-Swaps mit UFP-Vereinbarung verstehen lassen. Ein Beispiel soll dies veranschaulichen.

Ein Investor weiß bereits heute, daß er in 6 Monaten einen Liquiditätsbedarf von N für 3 Monate haben wird. Er möchte eine sichere Kalkulationsbasis haben und kauft ein 6×9-FRA. Sei P der ausgehandelte Preis des FRA in Prozent. Es bezeichne t_6 den Startpunkt bzw. t_9 das Ende der abzusichernden Periode. Marktgerecht bzw. fair wäre $P = f_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9)$. Sei E_3 der in t_6 tatsächlich gefixte 3-Monats-EURIBOR-Satz. Für den in t_6 zu zahlenden Ausgleichsbetrag A gilt dann

$$A = \frac{1}{1 + \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) E_3} \left[N(P - E_3) \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) \right].$$

Wir betrachten nun einen einperiodigen unterjährigen Forward-IRS mit dem Zinszeitraum $[t_6, t_9]$. Getauscht wird 3-Monats-EURIBOR variabel gegen P fest. Es wird UFP vereinbart. P orientiert sich an der Entwicklung eines unterjährigen Geldmarktsatzes. Man könnte den IRS daher auch als speziellen Geldmarktbasisswap interpretieren. Aus diesem Grund rechnen wir die feste Seite mit Money-Market-Usance ab. Für das UFP in t_6 ergibt sich

$$\begin{aligned} UFP &= N \frac{\tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9)}{1 + \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) E_3} P - N \frac{\tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9)}{1 + \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) E_3} E_3 \\ &= \frac{1}{1 + \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) E_3} \left[N(P - E_3) \tau_{\frac{act}{360}}(t_6, t_9) \right]. \end{aligned}$$

Somit gilt $UFP = A$. Ein FRA generiert also die gleichen Zahlungsströme wie ein Forward-IRS obiger Konstruktion. Unterschiede könnten daher lediglich in rechtlichen oder steuerlichen Sachverhalten liegen.

4.7 Pricing eines Asset-Swaps

Ein Investor muß am Markt einen Betrag N gegen EURIBOR aufnehmen. Gleichzeitig wird ihm folgender Bond angeboten

Laufzeit	:	4 Jahre
Kupon	:	5,00 Bond-Basis, jährlich
Tilgung	:	zu pari bei Laufzeitende
Preis	:	100,90.

Was ist zu tun? Zunächst muß er den Preis des Bonds mit seiner Zinskurve ermitteln. Es gilt

$$P = (5, 5, 5, 105)(d(1), d(2), d(3), d(4))^\top = 101,2973\,.$$

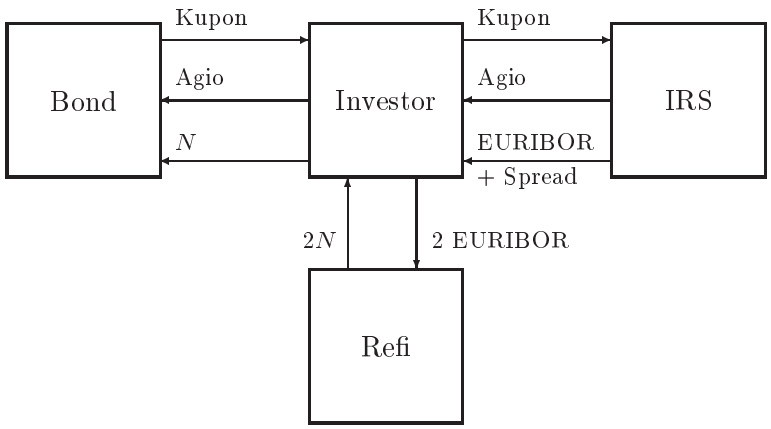
Der Bond wird also 39,73 Stellen unter Wert angeboten. Die Idee : Aufnahme von $2N$ gegen EURIBOR und Abschluß eines IRS mit Nominalbetrag N und Laufzeit 4 Jahre. Getauscht werden soll 5 Prozent fest gegen EURIBOR (Durchleiten des Bond-Kupons). Man erhält ein theoretisches Up-Front-Payment von

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{N}UFP &= 0,05 \sum_{s=1}^{4} d(s) - (1 - d(4)) \\
&= 0,05(0,96712+0,93135+0,88542+0,83217)-(1-0,83217) \\
&= 0,180803 - 0,16783 \\
&= \underline{\underline{0,012973}}\,.
\end{aligned}$$

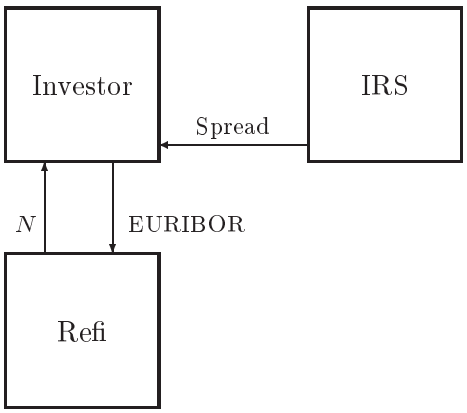
Der Investor sollte nun ein UFP in Höhe des Bond-Agio von $0,009N$ vereinbaren und die Differenz von $0,003973N$ als EURIBOR-Spread umlegen. Für den Spread ergibt sich

$$\begin{aligned}
a &= \frac{0,05 \sum_{s=1}^{4} d(s) - (1 - d(4)) - 0,009}{100 \sum_{s=1}^{8} \tau_{\frac{act}{360}} \left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right) d\left(\frac{s}{2}\right)} \\
&= \frac{0,003973}{\frac{182}{360} \cdot 7,31814} \\
&= \underline{\underline{0,107386 \cdot 100^{-1}}}\,.
\end{aligned}$$

Für N plus $0{,}009N$ Agio erwirbt er Bonds. Der IRS liefert EURIBOR + 10,7386 Basispunkte. Der aufzunehmende Betrag N kostet dann nur noch EURIBOR$-$10,7386 Basispunkte. Das folgende Diagramm soll die Struktur der Idee illustrieren:



Nach dem Netten aller Cash-Flows bleibt



also eine um 10,7386 Basispunkte günstigere Finanzierung. Probleme dieser Strategie:

- Ist es dem Investor möglich, statt N nun $2N$ aufzunehmen?
- Ist N eine handelbare Bondgröße?
- Großes N treibt den Bondpreis!

Literatur

[1] Biermann, B.: *Die Mathematik von Zinsinstrumenten : Preise, Kennzahlen, Risikomanagement und Anwendung von (derivaten) Zinsinstrumenten in der modernen Investmentpraxis*, München, Wien, Oldenbourg, 1999

[2] Grundmann, W.; Luderer, B.: *Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse*, Wiesbaden, 2001 (in Vorbereitung)

[3] Siebers, A.; Weigert, M.: *Börsenlexikon*, München, Wien, Oldenbourg, 1995