

Handout im Seminar *Finite Elemente* WS
2009/2010

Das Nédélec-Element für
 $H(\textit{curl})$ -elliptische Aufgaben

Judith Will

25. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Das Nédélec-Element	2
2.1	Wiederholung	2
2.2	Einführung des Nédélec-Elements und notwendige Definitionen	2
2.3	Transformationen und $H(\textit{curl})$ -Konformität	4
3	Das Raviart-Thomas-Element	6
4	Die Verbindung zwischen den Räumen H^1, $H(\textit{curl})$ und $H(\textit{div})$	7
5	Ergebnisse und Ausblick	7

1 Einleitung

In elektromagnetischen Anwendungen kommen PDEs der Form

$$\nabla \times (\mu^{-1}(\nabla \times A)) - i\sigma\omega A = J$$

vor, wobei μ die magnetische Permeabilität, σ die elektrische Leitfähigkeit und J die Stromdichte repräsentieren. A ist die gesuchte Lösung der PDE. Eine ausführliche Diskussion dazu findet sich in [5]. Aufgrund der $H(\text{curl})$ -Elliptizität dieser Aufgabe sind Lagrange-Elemente zur Lösung mittels FEM ungeeignet, da mit diesen der Raum $H(\text{curl})$ nicht vollkommen ausgeschöpft werden kann. Den Grundlagen aus [2] folgend, wird im Vortrag ein Element vorgestellt, welches $H(\text{curl})$ -Konformität ermöglicht. Es wurde 1980 von J.-C. Nédélec eingeführt [4] und ist nach ihm benannt, das sogenannte Nédélec-Element. Nach ausführlicher Erörterung der Besonderheiten dieses Elements inklusive seiner Freiheitsgrade, Formfunktionen und Transformationsseigenschaften, wird ein weiteres Element, das Raviart-Thomas-Element, beschrieben. Dieses findet Anwendung in der Strömungsmechanik, da es $H(\text{div})$ -Konformität ermöglicht. Schließlich erhalten wir ein interessantes Resultat, das die Verbindung von H_0^1 , $H_0(\text{curl})$ und $H_0(\text{div})$ beschreibt.

2 Das Nédélec-Element

2.1 Wiederholung

Bevor wir das Nédélec Element als solches betrachten, werden wir zu Erinnerung einige Begriffe und Grundlagen wiederholen [3].

Definition 2.1 *Ein Tripel (K, P, Σ) heißt Finites Element, wenn*

- (a) $K \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompaktes Polyeder (Schnitt endlich vieler Halbräume) ist mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. K heißt Zelle/Elementgebiet/Element. Die Teile der Oberfläche des Elements ∂K , welche jeweils auf einer Hyperebene liegen, heißen Facetten, z.B. Kanten im Zwei- und Flächen im Dreidimensionalen.
- (b) P ein (normierter) Vektorraum endlicher Dimension $s \geq 1$ von Funktionen, meist Polynomen, $p : K \mapsto \mathbb{R}^m$ ist. P heißt Ansatzraum.
- (c) $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ eine Basis des Dualraums P^* ist. Die Elemente $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ heißen (lokale) Freiheitsgrade oder Knotenvariablen. Die Elemente p_1, \dots, p_s von P mit $\sigma_i(p_j) = \delta_{ij}$ heißen (lokale) Formfunktionen oder die nodale Basis von P .

2.2 Einführung des Nédélec-Elements und notwendige Definitionen

Aufbauend auf dieser allgemeinen Beschreibung gehen wir nun konkret zu dem finiten Element über, welches hier Gegenstand der Untersuchungen sein soll.

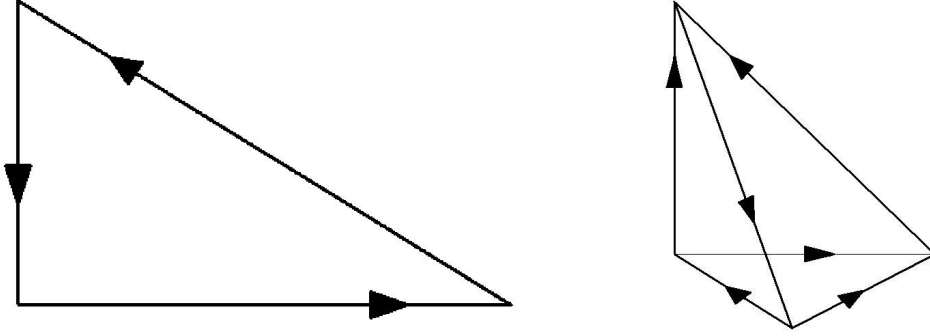


Abbildung 1: Freiheitsgrade des Nédélec-Elements in 2D und 3D

Definition 2.2 Sei K ein Simplex im \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$. Weiterhin sei \mathbb{N}_0 ein Polynomraum der Dimension $\dim(\mathbb{N}_0) = \frac{1}{2}d(d+1)$, im Zweidimensionalen konkret

$$\mathbb{N}_0 := [\mathbb{P}_0]^2 \oplus (\mathcal{R}(x)\mathbb{P}_0).$$

Hierbei ist $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\mathcal{R}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. Im Dreidimensionalen wählen wir

$$\mathbb{N}_0 := [\mathbb{P}_0]^3 \oplus (x \times [\mathbb{P}_0]^3).$$

Sei nun n_e die Anzahl der Kanten von K , $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n_e}$ die Menge dieser Kanten und t_i einer der zwei Einheitsvektoren parallel zur Kante e_i . Für $p \in \mathbb{N}_0$ werden die lokalen Freiheitsgrade σ_i als das Integral der Tangentialkomponente von p entlang der Kanten von K gewählt (siehe Abb. 1), d.h. für $1 \leq i \leq n_e$ ist

$$\sigma_i(p) = \int_{e_i} p \cdot t_i.$$

Das Tripel $(K, \mathbb{N}_0, \Sigma := \{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n_e})$ ist ein finites Element, genannt Nédélec-Element.

Nun definiert man die lokalen Formfunktionen auf dem Element K in Abhängigkeit von den baryzentrischen Koordinaten.

Definition 2.3 Seien a_l , $1 \leq l \leq 3$ (bzw. 4) die Eckpunkte von K , λ_l die baryzentrischen Koordinaten in K und $e(l, k)$ der Index der Kante zwischen a_l und a_k . Der Vektor $t_{e(l, k)}$ sei der Einheitsvektor parallel zu dieser Kante und zeige von a_l nach a_k . Dann sind die lokalen Formfunktionen eines Nédélec-Elements definiert als

$$\theta_{e(l, k)} = \lambda_l \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_l$$

und es gilt

$$\sigma_j(\theta_i) = \int_{e_j} \theta_i t_j = \delta_{ij}.$$

Die Tangentialkomponente der lokalen Formfunktionen ist konstant entlang der zugehörigen Kante und verschwindet entlang der anderen Kanten. Für die Diskretisie-

ung benötigen wir nun noch folgende Definition.

Definition 2.4 Der lokale Interpolationsoperator I_K^N für das Nédélec-Element ist definiert als

$$I_K^N : V(\text{curl}; K) \ni v \mapsto I_K^N v = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{e_i} v \cdot t_i \right) \theta_i \in \mathbb{N}_0,$$

wobei

- $V(\text{curl}; K) = \{v = (v_1, v_2) \in [L^p(K)]^2; \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 \in L^p(K)\}$ für $p > 2$, $d = 2$, bzw.
- $V(\text{curl}; K) = \{v \in [H^s(K)]^3; \nabla \times v \in [L^p(K)]^3\}$ für $s > \frac{1}{2}$, $p > 2$ und $d = 3$.

Für mehr Informationen siehe [1].

2.3 Transformationen und $H(\text{curl})$ -Konformität

Numerische Aspekte bezüglich der Effizienz der Algorithmen motivieren nun, dass der FEM Ansatz auf einem sogenannten Referenz-Element ausgeführt wird. Von diesem Element ausgehend, transformiert man dann sowohl die Geometrie als auch die Formfunktion auf die anderen Elemente des Gitters.

Definition 2.5 Für das Referenz-Element $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ und ein weiteres Nédélec-Element (K, P, Σ) sei die Geometrietransformation T_K gegeben als die bijektive affine Abbildung

$$T_K : \hat{K} \ni \hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K \in K,$$

wobei B_K eine reguläre 2×2 -Matrix und $b_K \in \mathbb{R}^2$ ist.

Arbeitet man z.B. mit Langrange-Elementen, so werden die lokalen Formfunktionen mit der äquivalenten Transformation

$$\tilde{\psi}_K : V(K) \ni v(x) \mapsto \hat{v}(\hat{x}) = v \circ T_K(\hat{x}) \in V(\hat{K}) \quad (1)$$

übertragen. Da diese Transformation aber nicht wie gewünscht die lokalen Formfunktionen des Elements K auf die des Elements \hat{K} abbildet, werden die lokalen Formfunktionen des Nédélec-Elements wie folgt transformiert:

$$\psi_K : V(\text{curl}, K) \ni v(x) \mapsto \psi_K(v)(\hat{x}) = \hat{v}(\hat{x}) = B_K^T [v \circ T_K(\hat{x})] \in V(\text{curl}, \hat{K}). \quad (2)$$

Abbildung 2 zeigt die globale Formfunktion zur gemeinsamen Kante der beiden Elemente bei Verwendung der Transformation (1). Zu sehen ist, dass das Integral der Tangentialkomponente der Formfunktion auf dem rechten Element über die gemeinsame Kante nicht eins ist. Abbildung 3 zeigt dieselbe globale Formfunktion bei Verwendung der korrekten Transformation (2).

Betrachtet man den sogenannten Nédélec-Approximationsraum

$$R_h = \{v_h \in [L^1(\Omega_h)]^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{N}_0, \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \llbracket v_h \times n \rrbracket_F = 0, \}$$

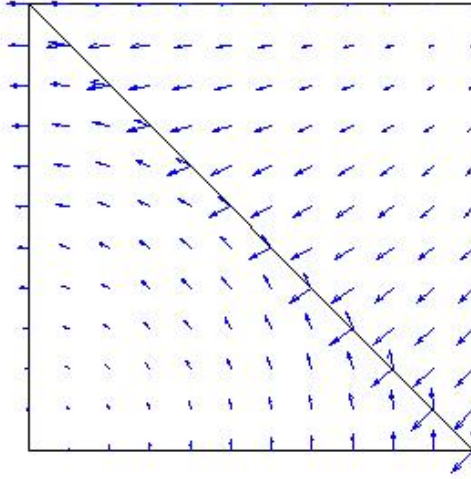


Abbildung 2: Globale Formfunktion mit nicht korrekter Transformation (1).

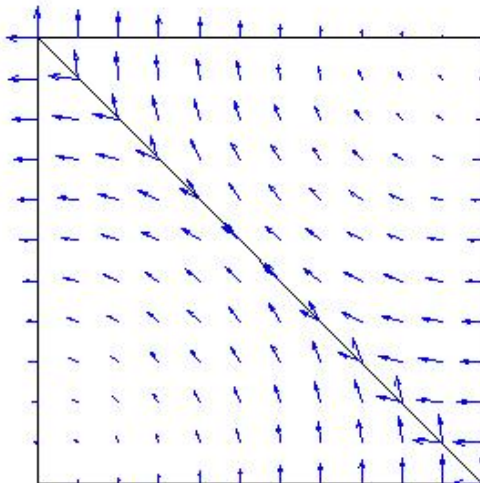


Abbildung 3: Globale Formfunktion mit korrekter Transformation (2).

wobei $\llbracket v_h \times n \rrbracket_F$ den Sprung der Tangentialkomponente von v_h über die Facette F bezeichnet, so erhält man

$$R_h \subset H(\text{curl}; \Omega_h) = \{v \in [L^2(\Omega_h)]^3; \nabla \times v \in [L^2(\Omega_h)]^3\}, \quad (3)$$

also **H(curl)-Konformität**. Wie kann $\llbracket v_h \times n \rrbracket_F = 0$ realisiert werden?

Satz 2.6 *Sei $F = K_1 \cap K_2$ die gemeinsame Facette der Elemente K_1 und K_2 und v_h mit $v_h|_{K_1} \in \mathbb{N}_0$, $v_h|_{K_2} \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\llbracket v_h \times n \rrbracket_F = 0$ äquivalent zu*

$$\int_e v_h|_{K_1} t_e = \int_e v_h|_{K_2} t_e,$$

für alle Kanten e von F .

Wir erhalten also $H(\text{curl})$ -Konformität durch die Identifikation von Freiheitsgraden.

3 Das Raviart-Thomas-Element

Zur Lösung von $H(\text{div}; K)$ -elliptischen PDEs ist das Nédélec-Element nicht geeignet. Daher führen wir ein weiteres ähnliches Finites Element ein.

Definition 3.1 *Sei K ein Simplex im \mathbb{R}^d . Weiterhin sei \mathbb{RT}_0 ein Polynomraum der Dimension $\dim(\mathbb{RT}_0) = d + 1$, konkret*

$$\mathbb{RT}_0 := [\mathbb{P}_0]^d \oplus (x \cdot \mathbb{P}_0).$$

Sei nun n_i der äußere Normaleneinheitsvektor der Facette F_i . Für $p \in \mathbb{RT}_0$ werden die lokalen Freiheitsgrade σ_i als das Integral der Normalenkomponente von p über die Facetten von K gewählt, d.h. für $1 \leq i \leq d + 1$ ist

$$\sigma_i(p) = \int_{F_i} p \cdot n_i.$$

Das Tripel $(K, \mathbb{RT}_0, \Sigma := \{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq d+1})$ ist ein finites Element, genannt Raviart-Thomas-Element (RT-Element).

Die lokalen Formfunktionen des RT-Elements sind definiert als

$$\theta_i(x) = \frac{1}{d|K|}(x - a_i), \quad 1 \leq i \leq d + 1,$$

wobei a_i die Eckpunkte von K sind, und es gilt

$$\sigma_j(\theta_i) = \int_{F_j} \theta_i n_j = \delta_{ij}.$$

Das bedeutet beim RT-Element ist die Normalenkomponente der lokalen Formfunktionen konstant auf der jeweils zugehörigen Facette. Nach [2] erhält man Konformität für den Raum

$$H(\text{div}; \Omega_h) = \{v \in [L^2(\Omega_h)]^d; \nabla \cdot v \in L^2(\Omega_h)\},$$

wenn der Sprung der Normalenkomponente von v_h über alle inneren Facetten F null ist.

4 Die Verbindung zwischen den Räumen H^1 , $H(\text{curl})$ und $H(\text{div})$

Es gibt eine interessante Beziehung zwischen den Räumen H_0^1 , $H_0(\text{curl}, \Omega) := \{v \in H(\text{curl}; \Omega) \mid v \times n|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $H_0(\text{div}; \Omega) := \{v \in H(\text{div}; \Omega) \mid v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$. Dafür benötigt man die folgende Definition.

Definition 4.1 Für Räume E_j und Abbildungen h_j , $j \in J$ und J eine Indexmenge heißt die Sequenz

$$\dots \xrightarrow{h_{j-1}} E_j \xrightarrow{h_j} E_{j+1} \xrightarrow{h_{j+1}} E_{j+2} \xrightarrow{h_{j+2}} \dots$$

exakte Sequenz, wenn für jedes $j \in J$ mit $j+2 \in J$ gilt

$$\ker(h_{j+1}) = \text{im}(h_j).$$

Satz 4.2 Sei i die kanonische Abbildung und m der Mittelungsoperator auf dem Gebiet Ω . Wenn Ω einfach zusammenhängend und der Rand des Gebietes $\partial\Omega$ zusammenhängend ist, so ist die Sequenz

$$\{0\} \xrightarrow{i} H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H_0(\text{curl}; \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} H_0(\text{div}; \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega) \xrightarrow{m} \text{span}\{1\}$$

eine exakte Sequenz.

5 Ergebnisse und Ausblick

Die in Abschnitt 4 beschriebene exakte Sequenz kann zur Konstruktion der Basisfunktionen höherer Ordnung genutzt werden, siehe [5]. Da das Nédélec-Element im Rahmen des Programmierpraktikums implementiert wurde, wird die Lösung von $H(\text{curl}; \Omega)$ -elliptischen Problemen angestrebt. Leider war eine Umsetzung bis zum heutigen Zeitpunkt nicht möglich, in naher Zukunft sollen damit allerdings zufriedenstellende Ergebnisse berechnet werden. Auch eine Implementierung des Raviart-Thomas-Elements und somit das Lösen $H(\text{div}; \Omega)$ -elliptischer Probleme ist geplant.

Literatur

- [1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9):823–864, 1998.
- [2] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer–Verlag, Berlin, 2004.
- [3] R. Herzog. Vorlesungsskript Numerik Partieller Differentialgleichungen, SS2009. Technische Universität Chemnitz.
- [4] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in R³. *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.
- [5] S. Zaglmayr. *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz, 2006.