

## Seminar Finite Elemente Implementierung der linearen Elastizitätsgleichungen in Matlab

### Einführung in die lineare Elastizität

Dieses Kapitel soll eine kurze Einführung in die Elastizitätstheorie geben, um danach auf die Lösung der auftretenden Differentialgleichungen eingehen zu können.

Der Körper nehme in der Ruhelage das Gebiet  $\Omega$  ein. Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  ist dann eine Funktion  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wir gehen nun im folgenden immer von *kleinen Verschiebungen* aus.

**Verzerrungen** Große Verschiebungen korrespondieren nun aber nicht immer mit großen Belastungen des Körpers. Ist eine Starrkörperbewegung  $\mathbf{u} = (R - I)x + T$  gegeben, wobei  $R$  eine Rotationsmatrix ( $R^T R = I$ ) und  $T$  ein beliebiger Verschiebungsvektor ist, so liegt keine Verzerrung des Körpers vor. Es zeigt sich, dass das richtige Maß für die *Verzerrung* durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}), \quad \text{mit } \nabla \mathbf{u} = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right)_{i,j=1}^3$$

gegeben ist. Nimmt man nun an, dass der Gradient  $\nabla \mathbf{u}$  klein ist (kleine Verschiebungen), erhält man den linearen Zusammenhang

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

**Spannungen** Auf den Körper wirken im Allgemeinen (innere) *Volumenkräfte*  $\mathbf{f}$  (z.B. Schwerkraft) und (äußere) *Flächenlasten*  $\mathbf{g}$  (z.B. Kräfte durch äußere Einwirkungen). Damit sich nun ein Körper im *Kräftegleichgewicht* befindet, muss sich auch jedes Teilgebiet des Körpers im Gleichgewicht befinden. Wenn wir gedanklich ein Teilgebiet  $G$  des Körpers *freischneiden*, so erhalten wir die Kräftebilanz

$$\int_G \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial G} \mathbf{t}(x, \mathbf{n}) \, dA = 0,$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor in  $x$  darstellt. Die Kraft  $\mathbf{t}(x, \mathbf{n})$  die entsteht, wenn man den Körper an der Stelle  $x$  „aufschneidet“, wobei die Schnittebene senkrecht auf  $\mathbf{n}$  steht. Es kann gezeigt werden, dass die Kräfte  $\mathbf{t}$  linear von  $\mathbf{n}$  abhängen und man setzt

$$\mathbf{t}(\cdot, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \left( \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \right)_{i=1}^3,$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  den (Cauchyschen) *Spannungstensor*, welcher symmetrisch ist, darstellt. Zusammen mit dem Gaußschen Integralsatz folgt

$$\int_G \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial G} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_G \mathbf{f} \, dV + \int_G \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV = 0,$$

wobei  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right)_{i=1}^3$  Der Grenzübergang  $|G| \rightarrow 0$  liefert schließlich

$$-\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega.$$

Am Rand  $\partial\Omega$  erhält man noch den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}. \quad (1)$$

**Materialgesetz** Es fehlt nun eine Beziehung zwischen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , die beschreibt, wie ein Körper (insbesondere das Material) auf Deformationen reagiert. Wir wollen von einem *homogenen und linearen Materialgesetz* ausgehen, dass heißt

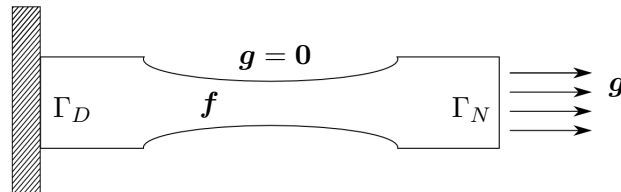
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

und  $\mathbb{C}$  ist unabhängig vom Ort. Hier ist  $\mathbb{C}$  ein Tensor vierter Stufe. Dieser kann als eine lineare Abbildung verstanden werden, die symmetrische  $3 \times 3$ -Matrizen wieder auf symmetrische  $3 \times 3$ -Matrizen abbildet. Nimmt man nun noch die *Isotropie* des Materials an („es reagiert in alle Richtungen gleich“), so bleiben noch 2 Parameter in  $\mathbb{C}$  unbestimmt. Mit den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  erhält man den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I},$$

wobei mit  $\operatorname{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}$  die Spur von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bezeichnet wird.

Wir betrachten nun den Fall, dass an einem Teil des Randes  $\Gamma_D$  der Körper fest eingespannt wird ( $\mathbf{u} = 0$ ), an dem Rest des Randes  $\Gamma_N$  ist hingegen die Flächenkraft  $\mathbf{g}$ , die nicht in normale Richtung wirken muss, vorgegeben:



Wir erhalten nun das System der linearen Elastizität

$$\begin{aligned} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma_N \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) && \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

## Variationsproblem

In diesen Gleichungen werden nun eine oder zwei Variablen eliminiert und das Problem in ein Variationsproblem überführt.

**Der reine Verschiebungsansatz** Eliminiert man  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$ , so erhält man mit der Definition  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)$  das reduzierte System

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Testet man nun die erste Gleichung mit  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3 : \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$  und integriert partiell (formal), so erhält man das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dA \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega). \quad (3)$$

Dies wird später der Ausgangspunkt für unsere Implementation sein.

**Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner** Bei dem Hellinger-Reissner-Prinzip bleiben die Verschiebungen und die Spannungen im Ansatz, die Verzerrungen werden hingegen eliminiert. Man erhält

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma_N \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Testet man nun die erste Gleichung mit  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega)$  und die letzte mit  $\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$ , so erhält man nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\tau} \, dV &= 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}) \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dA && \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4)$$

mit  $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$  und  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega)$ .

Eine alternative Raumwahl ist  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\operatorname{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}) : \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)\}$ ,  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Bei diesem Ansatz muss die Nebenbedingung  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$  direkt gefordert werden (sie wird zu einer wesentlichen Randbedingung) und mit  $\mathcal{H}_N(\operatorname{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\operatorname{div}, \Omega) : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N\}$  erhält man (nach partieller Integration und Einsetzen von  $\mathbf{u} = 0$  auf  $\Gamma_D$  - natürliche Randbedingung) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dV &= 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}_N(\operatorname{div}, \Omega) \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{v} \, dV &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV && \text{für alle } \mathbf{v} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (5)$$

Welche der beiden Formulierungen besser geeignet ist, hängt unter anderem von den Randbedingungen ab, da bei dem zweiten Ansatz die Dirichlet-Randbedingung zur wesentlichen Randbedingung und die Neumann-Randbedingung zur natürlichen Randbedingung wird.

**Die gemischte Methode nach Hu und Washizu** Hier bleiben alle Größen in den Gleichungen erhalten und es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\eta} \, dV &= 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\eta} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}) \\ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\tau} \, dV &= 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}) \\ - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dA && \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}_D^1(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Auch dies ist wieder ein Sattelpunktproblem.

Obwohl die gemischten Formulierungen sowohl schwerer in der mathematischen Behandlung als auch in der Implementierung (mehr Freiheitsgrade!) sind, werden sie (besonders das Hellinger-Reissner-Prinzip) bevorzugt genutzt, da die Spannungen, von denen hohe Genauigkeit benötigt wird, direkt berechnet werden und nicht durch Differenzieren gebildet werden.

Eine Einführung in die verschiedenen Formulierungen bietet [Bra97, Kap. VI.3], diese enthält aber einige (Vorzeichen-)Fehler, oder [Sin09, Kap. 3.2].

## Implementierung in Matlab

In diesem Abschnitt soll nun dargestellt werden, wie das Variationsproblem (3) in Matlab implementiert werden kann. Dazu soll die PDE-Toolbox verwendet werden.

**Darstellung von Tensoren als Vektoren** Da die beiden Größen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  Tensoren 2. Stufe sind, die sich als symmetrische  $3 \times 3$ -Matrizen auffassen lassen, ist es zweckmäßig, diese als einen Vektor im  $\mathbb{R}^6$  zu speichern (damit wird der Tensor 4. Stufe  $\mathbb{C}$  zu einer Matrix). Bezeichnen wir die Vektordarstellungen mit  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  und  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , so ist eine wünschenswerte Eigenschaft

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^\top \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (7)$$

also die Invarianz des Skalarproduktes in der Vektordarstellung. Die linke Seite ist gerade das Skalarprodukt in  $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ , die doppelte Überschiebung  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ . Da die Nichtdiagonaleinträge in der Summe doppelt auftauchen, müssen sie in der Vektordarstellung skaliert werden. Bei den Ingenieuren ist die *Voigtsche Notation* üblich:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23})^\top, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23})^\top.$$

Alternativ könnte man auch in beiden Vektoren die Nichtdiagonaleinträge mit  $\sqrt{2}$  skalieren. Davon hängt auch die Darstellung von  $\mathbb{C}$  als Matrix  $C$  ab. Verwenden wir die

Voigtsche Notation, so erhalten wir  $\hat{\sigma} = C \hat{\varepsilon}$ , mit

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} = \frac{E}{1 + \nu} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

mit den alternativen Konstanten Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$ . Es bestehen die Zusammenhänge

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

**Vorbereitungen zum Nutzen der Matlab-Routinen** Nun schreiben wir für die Verschiebung  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^\top$ , damit wird der Gradient der Verschiebung ein langer Vektor

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{pmatrix},$$

damit ergibt sich

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \cdot \nabla \mathbf{u} = Q \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Dies benutzen wir um das Variationsproblem (3) wie folgt umzustellen. Zuerst betrachten wir die Bilinearform auf der linken Seite.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}(\mathbf{u})^\top C \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^\top Q^\top C Q \nabla \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^\top A \nabla \mathbf{v} \, dV,$$

mit

$$A = Q^\top C Q = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \\ \cdot & \mu & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda + 2\mu & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \mu & \cdot \\ \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

Will man nun 2-Dimensional rechnen, so muss man zusätzliche Annahmen treffen. Die beiden Möglichkeiten sind der *Ebene Spannungszustand* (ESZ) und der *Ebene Verzerungszustand* (EVZ). Wir wollen den ESZ nutzen (keine Behinderung der Verschiebung in  $z$ -Richtung). Man setzt

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Damit erhält man  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ . Wegen

$$0 = \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}$$

gilt

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Somit erhalten wir analog zum 3-Dimensionalen

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} & \cdot & \cdot & \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

mit  $\nabla \mathbf{u} = (\nabla u_1 \quad \nabla u_2)^\top$  und damit

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{C} \mathbf{Q} = \left( \begin{array}{cc|cc} \lambda + 2\mu + q & \cdot & \cdot & \lambda + q \\ \cdot & \mu & \mu & \cdot \\ \hline \cdot & \mu & \mu & \cdot \\ \lambda + q & \cdot & \cdot & \lambda + 2\mu + q \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right),$$

mit  $q = \frac{-\lambda^2}{\lambda + 2\mu}$ . Damit ergibt sich als Bilinearform

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i^\top A_{ij} \nabla v_j \, dV.$$

Analog können wir die rechte Seite berechnen

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dA = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dV + \int_{\Gamma_N} g_i v_i \, dA.$$

Wenn wir nun für  $u_j$  und  $v_i$  Ansatzfunktionen aus unserem FEM-Raum  $V_h$  einsetzen ( $\mathbf{u}$  ist damit aus  $V_h^2$ ), können wir die Steifigkeitsmatrix beziehungsweise die rechte Seite mit den Matlab-FEM-Routinen aus der PDE-Toolbox berechnen. Wir benötigen, da  $A_{12} = A_{21}$  gilt, drei Berechnungen einer Steifigkeitsmatrix und zwei Auswertungen der rechten Seite.

**Konsistentes Einheitensystem** Da man ohne Einheiten rechnet, bietet es sich an, ein konsistentes Einheitensystem zu verwenden. Dadurch haben dann alle Größen „automatisch“ die richtigen Einheiten. Wir verwenden als Grundlage Meter (m), Kilogramm (kg) und Sekunde (s) als Grundeinheiten.

**Der Quellcode** Mit diesem Quellcode kann die Verformung eines Quadrates unter dem Eigengewicht beziehungsweise unter Zug berechnet werden.

```

% Die Materialparameter:
E = 2.1e11 % in N/m^2
nu = 0.3 % dimensionslos
rho = 7850 % in kg/m^3
mu = E/2/(1+nu);
lambda = nu*E/(1+nu)/(1-2*nu);
q = -2*lambda*nu/(1-nu) + nu^2/(1-nu)^2 *(lambda + 2*mu);

% Erzeugung des Gitters:
[p,e,t] = initmesh(decsg([3 4 10 10 0 0 1 0 0 1]'),...
    'hmax', 0.05);
n = size(p,2);

% Assemblierung der 'kleinen' Matrizen:
A11 = [ 2*mu + lambda + q , 0 ;...
        0 , mu ];
A12 = [ 0 , lambda + q ;...
        mu , 0 ];
A22 = [ mu , 0 ;...
        0 , 2*mu + lambda + q ];

[K1, M1, dummy] = assema(p,t,A11(:,1),1,0);
[K2, dummy, dummy] = assema(p,t,A12(:,0),0,0);
K3 = K2';
[K4, dummy, dummy] = assema(p,t,A22(:,0),0,0);

% Zusammenbauen:
K = [K1 K2; K3 K4];
M = [M1 sparse(n,n); sparse(n,n) M1];

% Moegliche Belastungen:
% Gewicht:
F = [M1 sparse(n,n); sparse(n,n) M1]*[zeros(n,1); ones(n,1)]...
    *-9.81*rho;
% Zug:
% F = [M1; 0*M1]*ones(2*n,1)*1;

```

```

% Dirichlet-Rand am linken Ende:
index_d = find(p(1,')==0);
index_d = [index_d index_d + n];

% Alles ohne Dirichlet-Rand:
index_nd = setdiff(1:2*n, index_d);

% Das reduzierte System:
Kr = K(index_nd, index_nd);
Mr = M(index_nd, index_nd);
Fr = F(index_nd);

u = zeros(2*n, 1);
u(index_nd) = Kr\Fr;

% 'Teilen' des Ergebnisses:
u1 = u(1:n);
u2 = u(n+1:end);

% Die Verschiebungen:
d = [u1'; u2'];

abs_d = sqrt(u1.^2 + u2.^2);
% Plotten:
pdeplot(p+10*d,e,t,'xydata','mesh','on');
colormap jet
axis equal

```

**Eine andere Implementierung** Eine andere interessante Implementation, die nicht die PDE-Toolbox verwendet, findet sich in [ACFK02]. Dadurch, dass konstante Koeffizienten vorausgesetzt werden, können die auftretenden Integrale analytisch aufgelöst und elegant berechnet werden. Damit ergibt sich ein kleiner Code, mit dem sogar 3D-Modelle berechnet werden können.

## Literatur

- [ACFK02] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN, S. FUNKEN und R. KLOSE: Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity. *Computing* 69 (2002), Nr. 3, S. 239–263
- [Bra97] D. BRAESS: *Finite Elemente*. Berlin : Springer, 1997
- [Sin09] A. SINWEL: *A New Family of Mixed Finite Elements for Elasticity*, Johannes Kepler Universität Linz, Diss., 2009