Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Herzog, F. Schmidt, G. Wachsmuth

Chemnitz, 29. Januar 2010

Grundlagen der Optimierung

Übung 15

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{q\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ zwei Matrizen mit $\operatorname{rank}(B) = p$. Zeige, dass dann entweder das System
$$Ad < 0, \quad Bd = 0$$
lösbar ist oder dass das System
$$A^\top \mu + B^\top \lambda = 0$$
eine Lösung $(\mu, \lambda) \neq 0$ mit $\mu \geq 0$ hat.
Hinweis: Farkas-Lemma

2. a) Es sei x_0 ein zulässiger Punkt für das Optimierungsproblem
$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$
mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
   i. x_0 erfüllt die MFCQ
   ii. das System
$$\sum_{i\in\mathcal{A}(x_0)} \mu_i \nabla g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x_0) = 0 \qquad \text{mit } \mu_i \geq 0\ \forall i \in \mathcal{A}(x_0)$$
   hat nur die triviale Lösung $(\mu,\, \lambda) = 0$.

   Hinweis: Nutze Aufgabe 1.

   b) Es sei $(x^*,\, \lambda^*,\, \mu^*)$ ein KKT-Punkt von (1). Zeige die Äquivalenz von
   i. MFCQ gilt in x^*.
   ii. Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren $(\mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ist kompakt.

3. Es sei $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ ein KKT-Punkt von

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & f(x) & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & g_i(x) \le 0, & i = 1, \dots, m \\ \text{und} & h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p \end{array}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f, g_i und h_j. Zeige, dass

$$\nabla f(x^*)^\top d \ge 0 \quad \text{für alle } d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(x^*)$$

gilt.

4. a) Gegeben seien die Funktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$c(y) := \begin{cases} (y+1)^2, & y < -1, \\ 0, & -1 \le y \le 1, \\ (y-1)^2, & y > 1, \end{cases}$$

$g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1(x) := c(x_1) - x_2$, $g_2(x) := c(x_1) + x_2$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige konvexe und stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{sodass} & g_1(x) \le 0 \\ & g_2(x) \le 0 \end{array}$$

ein konvexes Problem ist, für das die Slater-Bedingung nicht erfüllt ist, jedoch der Punkt $x^* = (0,0)$ der Abadie-CQ genügt.

b) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + (x_2+1)^2 \\ \text{sodass} & -x_1^3 - x_2 \le 0 \\ & -x_2 \le 0 \end{array}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Bedingung MFCQ erfüllt ist, aber LICQ nicht erfüllt ist.

5. a) Löse folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sodass} & x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

b) Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{ll} \min & -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 \\ \text{sodass} & x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ & x_1 \le \gamma, \end{array}$$

wobei $\gamma \geq -\sqrt{2}$ eine fest vorgegebene Zahl sei. Ermittle anhand einer Skizze die Lösung $x^* = x^*(\gamma)$ (Fallunterscheidung $\gamma = -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < \gamma \leq 1$, $\gamma > 1$). Genügt x^* den Regularitätsbedingungen LICQ, MFCQ bzw. Abadie CQ? Gibt es zu x^* Lagrange-Multiplikatoren $\mu^* \in \mathbb{R}^2$, so dass (x^*, μ^*) ein KKT-Punkt ist?

c) Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lll} \min & x_3 - \frac{1}{2}x_1^2 & \\ \text{sodass} & x_3 + x_2 + x_1^2 & \geq 0 \\ & x_3 - x_2 + x_1^2 & \geq 0 \\ & x_3 & \geq 0. \end{array}$$

Gibt es zu $x^* = (0,0,0)$ Lagrange-Multiplikatoren $\mu^* \in \mathbb{R}^3$ derart, dass (x^*, μ^*) die KKT-Bedingungen erfüllt? Welche der Regularitätsbedingungen Abadie-CQ, MFCQ, LICQ sind erfüllt? Ist x^* ein lokales Minimum?

6. Ein Problem der Form

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & f(x) & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, & \\ & G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) = 0 & \end{array}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $G, H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ wird Optimierungsproblem mit Komplementaritätsbedingungen (engl: *mathematical program with complementarity constraints*, kurz: MPCC) genannt. Zeige, dass die MFCQ in keinem zulässigen Punkt von MPCC erfüllt ist.

7. Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem mit Box-Beschränkungen

$$\left.\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & f(x) & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & a \leq \widetilde{g}(x) \leq b & \\ \text{und} & h(x) = 0. & \end{array}\right\} \tag{2}$$

Hierbei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\widetilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \leq b$.

a) Formuliere eine zu (2) äquivalente Aufgabe von der Form (19.1) und gib die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

b) Zeige, dass diese KKT-Bedingungen zu den folgenden Gleichungen äquivalent sind

$$\begin{array}{ll} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla \widetilde{g}_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 & \\ 0 \leq (\mu_i^*)^+, \ \widetilde{g}_i(x^*) \leq b_i, \ (\mu_i^*)^+ (\widetilde{g}_i(x^*) - b_i) = 0 & i = 1, \ldots, m \\ 0 \leq (\mu_i^*)^-, \ a_i \leq \widetilde{g}_i(x^*), \ (\mu_i^*)^- (a_i - \widetilde{g}_i(x^*)) = 0 & i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{3}$$

Dabei bezeichnet $(\mu_i^*)^+ = \max\{0, \mu_i^*\}$ den positiven Anteil von μ_i^* und $(\mu_i^*)^- = -\min\{0, \mu_i^*\}$ den negativen Anteil.

Bei Box-Beschränkungen können also die zwei auftretenden Lagrange-Multiplikatoren (mit Vorzeichen) zu einem Multiplikator ohne Vorzeichen zusammengefasst werden.

8. Experimentiere mit der Optimization-Toolbox von Matlab. Nutze die Funktion `fmincon`, um Aufgabe 5 a) und c) zu lösen (lasse dir auch die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren ausgeben). Schreibe dazu eigene Funktionen für die Nebenbedingungen und die Zielfunktionen. Verzichte auf die Bereitstellung von Ableitungen bzw. Gradienten. Verwende $x_0^{a1} = [1; 1]$ und $x_0^{a2} = [0; 0]$ als Startwerte für Aufgabe 5 a) und $x_0^{c1} = [0; 1; 2]$ und $x_0^{c2} = [1; 1; 2]$ für Teil c). Was stellt man fest?