Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Herzog, F. Schmidt, G. Wachsmuth

Chemnitz, 15. Januar 2010
Abgabe am 22. Januar 2010

Grundlagen der Optimierung

Übung 13

1. Beweise Satz 15.10 aus der Vorlesung.
   Hinweis: Verwende dazu Satz 15.8 und Satz 13.11. (Dieser gilt auch dann, wenn f nur differenzierbar ist.) (2 Punkte)

2. **Operationen auf Kegeln**
   Beweise (e) und (f) von Satz 16.3 aus der Vorlesung (Operationen auf Kegeln). (2 Punkte)

3. a) Skizziere den Polarkegel zu
   $$X = \Big\{x = (x_1,\, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 1\Big\} \cup \Big\{(3,\, 1)^\top\Big\}.$$
   b) Beweise Lemma 16.6 aus der Vorlesung (Eigenschaften des Polarkegels).
   (6 Punkte)

4. Beweise Lemma 16.13 aus der Vorlesung (Eigenschaften des Normalenkegels). (2 Punkte)

5. Bestimme zu folgenden konvexen Kegeln den jeweiligen Polarkegel.
   a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0\}$
   b) Lorentzkegel $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \le t\}$
   c) symmetrisch positiv semidefinite Matrizen $\mathcal{S}^n_+ = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succeq 0\}$ mit $\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X^\top = X\}$

   Hinweise:
   - Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist das kanonische Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij}$. Verwende dieses Skalarprodukt in Teil c).
   - Es gilt $\langle A, B\,C\rangle = \big\langle A\,C^\top, B\big\rangle$ (für passende Dimensionen).
   - Für jede symmetrischen Matrix $X \in \mathcal{S}^n$ existiert die Spektralzerlegung. D.h. sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von X und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, dann gilt $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, v_i\, v_i^\top$.

   (4 Punkte)

6. Ein lineares Programm in Standardform

$$\begin{array}{rll} \min & c^\top x & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b & \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ & \end{array}$$

lässt sich verallgemeinern, indem die Bedingung $x \in \mathbb{R}^n_+$ durch $x \in K$ mit einem abgeschlossenen, konvexen Kegel K ersetzt wird. Im Falle von $K = \mathcal{S}^n_+$ erhält man ein sogenanntes **semidefinites Programm**, welches im Allgemeinen von der Form

$$\begin{array}{rll} \min & \langle C, X \rangle & \text{über } X \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{sodass} & \langle A_i, X \rangle = b_i, & i = 1, \ldots, p \\ & X \succeq 0 & \end{array}$$

ist. Hierbei sind (o.B.d.A.) $C, A_i \in \mathcal{S}^n$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, p)$.

a) Zeige, dass der maximale Eigenwert symmetrischer Matrizen $\lambda_{\max}(\cdot) : S^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist.
Hinweis: Nutze die Rayleigh-Ritz-Charakterisierung $\lambda_{\max}(A) = \max_{\|v\|=1} v^\top Av$.

b) Zeige, dass sich der maximale Eigenwert einer symmetrischen Matrix A als Lösung des folgenden semidefiniten Programms ergibt.

$$\lambda_{\max}(A) = \begin{array}{rll} \max & \langle A, X \rangle & \text{über } X \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{sodass} & \langle I, X \rangle = 1 & \\ & X \succeq 0 & \end{array}$$

Hinweis: Beachte die Hinweise zu Aufgabe 5.c).

(4 Punkte)