

Grundlagen der Optimierung

Übung 4

1. Gegeben seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{L}(x_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \leq f(x_0)\}$ und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$. Die Minimierungsregel lautet: Bestimme ein $t_{min} > 0$ mit

$$f(x + t_{min}d) = \min\{f(x + td) : t \geq 0\}.$$

- a) Zeige, dass aus der Kompaktheit der Levelmenge $\mathcal{L}(x_0)$ und der Lipschitz-Stetigkeit des Gradienten ∇f folgt, dass die Minimierungsregel wohldefiniert und effizient ist.
- b) Berechne t_{min} für die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und einer Abstiegsrichtung d . Folgere die Effizienz dieser Schrittweite aus Teil a).

(4 Punkte)

2. Zeige: Wird $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2}x^\top Qx$ mit $Q = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für gegebenes $0 < c < 1$ mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs und exakter Liniensuche (d.h. Minimierungsregel) beginnend mit dem Startpunkt $x_0 = (1, c)$ berechnet, dann erhält man die Punktfolge

$$x_k = (q^k, (-1)^k c q^k)^\top \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit $q = \frac{1-c}{1+c}$. Wie viele Iterationen benötigt man, um für $c = 10^{-3}$ das Minimum auf 6 Stellen genau zu bestimmen? Vergleiche das Ergebnis mit der zweiten Aussage von Satz 6.4 aus der Vorlesung.

(4 Punkte)

3. Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\{x_k\}$ eine von Algorithmus 6.1 erzeugte Folge. Zeige: Ist x^* ein Häufungspunkt der Folge $\{x_k\}$ und $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit, so konvergiert die gesamte Folge $\{x_k\}$ gegen x^* .

Hinweis: Benutze Bemerkung 3.4 (a) und Übung 2, Aufgabe 8

(5 Punkte)

4. Implementiere das Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitenstrategie in Matlab (Algorithmus 6.1 aus der Vorlesung). Erstelle dazu eine Datei `steepest_descent.m` und verwende

`function X = steepest_descent(fhandle, x0, epsilon, s, sigma, beta)`
als erste Zeile. Dabei bezeichnet `fhandle` das Handle auf eine Funktion, `x0` den Startpunkt, `epsilon` den Parameter für das Abbruchkriterium $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$ und `s`, `sigma` und `beta` die Parameter für die Armijo-Schrittweitensuche. Zurückgegeben werden soll eine Matrix $X = [x_0, x_1, x_2, \dots]$, welche den gesamten Iterationsverlauf enthält.

Teste das implementierte Verfahren an folgenden Funktionen und Eingabewerten und visualisiere den Iterationsverlauf im eindimensionalen Fall bzw. zweidimensionalen Fall in einem `plot` bzw. `contour-plot` mit Hilfe der zurückgegebenen Matrix X . Interpretiere dabei auch die Anzahl der benötigten Iterationen.

- a) An der Cosinus-Funktion mit `x0= 1.1656`, `epsilon= 10-3`, `s= 1`, `sigma=10-2` und `beta= 0.5`
b) An der Himmelblau-Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

mit `epsilon= 10-1`, `s= 1`, `sigma=10-2`, `beta= 0.5` und den Startwerten `x0= [-0.27; -0.91]`, `x0= [-0.271; -0.91]`, `x0= [-0.25; -1.1]` und `x0= [-0.25; -1]`

- c) An der Funktion $f_1(x)$ aus Übung 2 Aufgabe 3 (i) mit `x0= [4; 1]`, `epsilon= 10-2`, `s= 1`, `sigma=10-2` und `beta= 0.5`
d) An der Rosenbrock-Funktion aus Übung 2 mit `x0= [1; -0.5]`, `epsilon= 10-2`, `s= 1`, `sigma=10-2` und `beta= 0.5`

Schicke die erzeugten Dateien an `frank.schmidt@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA-Optimierung Übung 04)!

Hinweis 1: Es können die Dateien von der Webseite der Lehrveranstaltung verwendet werden (insbesondere: `rosenbrock.m` und `ls_armijo.m`).

Hinweis 2: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren. (7 Punkte)

5. Zusatzaufgabe

Modelliere die folgenden Sudoku mit AMPL und löse sie mit MINOS und BPMPD. Schicke die Dateien zur Modellierung und die Ausgabe der Löser an `frank.schmidt@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA-Optimierung Übung 04)!

6			4		3	9	5	
1	9		5	6				8
				7		3		
3			7		9	4		6
	6		1	3			7	
	2							
			2	8		6		
								4
2	5		6				1	

1			5	6	4		2	
2	6				9	8		
			3		8			
				5				
			4	7	3			2
		9				3		
3	2					1		7
9	5				7			
7	4		2		1		6	

Was stellt man fest?

Hinweis: Benutze Entscheidungsvariablen $x_{ijk} \in \{0, 1\}$ ($1 \leq i, j, k \leq 9$) mit

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls an Position } (i,j) \text{ die Zahl } k \text{ steht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(5 Punkte)