Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Herzog, F. Schmidt, G. Wachsmuth

Chemnitz, 22. Oktober 2009
Abgabe am 30. Oktober 2009

Grundlagen der Optimierung

Übung 3

1. Entwickeln Sie ein AMPL-Modelfile `knapsack.mod` und ein AMPL-Datafile `knapsack.dat` für das Knapsackproblem aus Übung 1, Aufgabe 4 mit den Daten $n = 10$, $p = (5\ \ 4\ \ 7\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 6\ \ 8)^\top$, $w = (10\ \ 9\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)^\top$ und $W = 35$. Nutze `knapsack.cmd` von der Lehrveranstaltungsseite, um die Instanz über NEOS mit MINTO und MINOS zu lösen. Interpretiere die Ergebnisse und schicke den MINTO/MINOS-Printout, `knapsack.mod` und `knapsack.dat` an `frank.schmidt@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA-Optimierung)!
(4 Punkte)

2. **Existenzaussage**
Sei f eine auf X unterhalbstetige Funktion (d.h. für jede Folge $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq X$ mit $\lim x_k = x$ gilt $\liminf f(x_k) \geq f(x)$). Zeige, dass das Problem
$$\min_{x\in X} f(x)$$
eine global optimale Lösung besitzt, falls
   a) $X = \mathbb{R}^n$ und $f(x_k) \to \infty$ für jede beliebige Folge $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq X$ mit $\|x_k\| \to \infty$
   b) $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f(x_k) \to \infty$ für jede beliebige Folge $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq X$ mit $\|x_k\| \to \infty$ oder $\lim x_k \in \overline{X} \setminus X$.

(2 Punkte)

3. Beweise oder widerlege: Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es eine wohldefinierte effiziente Schrittweitenstrategie. (2 Punkte)

4. Zeige: Bricht das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 4.4) nicht nach endlich vielen Schritten ab und ist x^* ein Häufungspunkt der durch dieses Verfahren konstruierten Folge $\{x_k\}$, so ist x^* kein lokales Maximum der stetigen Funktion f. Gilt diese Aussage auch, wenn der Algorithmus nach endlich vielen Schritten in einem Punkt x^* abbricht? (2 Punkte)

5. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine durch das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 4.4) erzeugte Folge derart, dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$-\frac{\nabla f(x_k)^\top d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \, \|d_k\|} \geq c$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h., es gilt die Winkelbedingung;

b) Die Schrittweiten $t_k > 0$ sind effizient für alle $k \in \mathbb{N}$;

c) Es gilt $\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$.

Zeige: Ist die Levelmenge $\mathcal{L}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ kompakt und besitzt die Zielfunktion f nur endlich viele stationäre Punkte in dieser Levelmenge, so konvergiert die gesamte Folge $\{x_k\}$ gegen einen dieser stationären Punkte.

(3 Punkte)

6. Zeige: Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine durch das allgemeine Abstiegsverfahren erzeugte Folge. Sind x^* und x^{**} zwei Häufungspunkte der Folge $\{x_k\}$, so gilt $f(x^*) = f(x^{**})$. (2 Punkte)

7. Implementiere die Armijo-Schrittweitenstrategie aus der Vorlesung in Matlab. Erstelle dazu eine Datei `ls_armijo.m` und verwende
`function t = ls_armijo(fhandle, x, d, s, sigma, beta)`
als erste Zeile. Dabei bezeichnet `fhandle` das Handle auf eine Funktion (`help function_handle` und `doc function_handle`; Beispiel: `@rosenbrock`), die den Funktionswert und ggf. den Gradienten zurückgibt, `x` den Ausgangspunkt, `d` eine Abstiegsrichtung, `s` die Startschrittweite und `sigma` und `beta` die in der Vorlesung eingeführten Parameter des Algorithmus. Zurückgegeben werden soll eine Schrittweite `t`, welche die Armijo-Bedingung erfüllt.

Teste die Funktion an folgenden Beispielen und Eingabewerten.

a) An der Rosenbrock-Funktion aus Übung 2 mit `x`$= [1.7; 1.5]$, `d`$= [-1; 0]$, `s`$= 4$, `sigma`$=0.1$ und `beta`$= 0.5$.

b) An der Rosenbrock-Funktion aus Übung 2 mit `x`$= [0; 0]$, `d`$= [1; 0]$, `s`$= 1$, `sigma`$=0.1$ und `beta`$= 0.5$.

c) An

$$\varphi(x) := \omega(c_1)\sqrt{(1-x)^2 + c_2^2} + \omega(c_2)\sqrt{x^2 + c_1^2}$$

mit $\omega(c) = \sqrt{1+c^2} - c$, $c_1 = 0.01$, $c_2 = 0.001$, `x`$= 0$, `d`$= 1$, `s`$= 1$, `beta`$= 0.5$. Variiere `sigma` zwischen 0.01 und 0.5. Was stellt man fest?

Schicke die erzeugten Dateien an `frank.schmidt@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA-Optimierung)!

Hinweis 1: Es kann die Datei `rosenbrock.m` von der Webseite der Lehrveranstaltung für Teil a) und b) verwendet werden. Für Teil c) empfiehlt es sich, eine ähnliche Datei zu erstellen.
Hinweis 2: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren. (5 Punkte)