Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Herzog, F. Schmidt, G. Wachsmuth

Chemnitz, 16. Oktober 2009
Abgabe am 23. Oktober 2009

Grundlagen der Optimierung

Übung 2

1. Auf einem Schachbrett (8×8) sind soviele Damen wie möglich zu platzieren, ohne dass sie sich gegenseitig bedrohen. Formuliere zur Lösung ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem. (Damen ziehen horizontal, vertikal oder diagonal beliebig weit.) (2 Punkte)

2. Löse das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sodass} \quad & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

geometrisch. Zeichne dazu die Niveaulinien von f und die zulässige Menge und markiere darin die optimale Lösung. (2 Punkte)

3. Bestimme Gradienten und Hessematrix folgender Funktionen.
   a) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + b^\top x + d$ für $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$
   b) $f_2(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$ (*Rosenbrockfunktion*)

   Wie vereinfacht sich die Darstellung, falls $Q = Q^\top$ vorausgesetzt wird?
   Zeichne $f_1(x)$ für $b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $d = 2$ und $Q =$
   (i) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, (iv) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
   auf $[-10, 10] \times [-10, 10]$ und $f_2(x, y)$ auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Nutze dazu die Matlab-Funktionen `mesh` und `contour` (es ist günstig, geeignete Niveaus vorzugeben; siehe Beispieldatei `Plot_Himmelblau.m`). (4 Punkte)

4. Lineare Regression:
   Gegeben seien die Messwerte $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, m$. Ein zugrunde liegendes physikalisches Modell sagt den linearen Zusammenhang

$$y(x) = ax + b$$

   voraus. Anhand der Messwerte sollen die Parameter a und b bestimmt werden, sodass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird, d.h. es ist das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \quad f(a, b) = \sum_{i=1}^{m} \left(y(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

zu lösen.

a) Wie lauten die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung (vgl. Satz 3.1 und Aufgabe 3a)?

b) Zeige, dass $\nabla^2 f$ überall positiv semidefinit ist und sogar positiv definit, falls mindestens zwei x_i verschieden sind.

(2 Punkte)

5. Besitzt die Funktion $f(x) = (x_1 - x_2^2)(2x_1 - x_2^2)$ im Punkt $x = (0, 0)$ ein lokales Minimum (Begründung!)? (2 Punkte)

6. Bestimmen Sie die Extrempunkte von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4c^2xy$$

mit $c \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

7. Die (orthogonale) *Projektion* eines Punktes $p \in \mathbb{R}^m$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^m$ mit $C \neq \emptyset$ ist der Punkt $\hat{x} \in C$, welcher das Optimierungsproblem $\inf\{\|x - p\| : x \in C\}$ löst ($\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm).

(a) Zeige, dass die Projektion wohldefiniert ist (und somit eine Funktion $\mathrm{proj}_C(\cdot) : \mathbb{R}^m \to C$ definiert). (1 Punkt)

(b) Bestimme eine explizite Formel für die Projektion auf einen linearen Unterraum, der durch $\{A^T y : y \in \mathbb{R}^n\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($n \leq m$, voller Zeilenrang) gegeben ist.
Hinweis: Betrachte das Optimierungsproblem $\min \frac{1}{2}\|A^T y - p\|^2$.
Warum darf man hier das Quadrat der Zielfunktion verwenden? (3 Punkte)

Hinweis: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit $x, y \in C$ und $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ liegt.

8. Es sei $\{f_k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge mit einer gegen f^* konvergenten Teilfolge, d.h. $f_{k'} \to f^*$. Zeige, dass sogar die ganze Folge f_k gegen f^* konvergiert. (2 Punkte)

9. Lies Kapitel 1-4 des AMPL-Tutorials (`amplguide.pdf`).