Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Herzog, F. Schmidt, G. Wachsmuth

Chemnitz, 13. Oktober 2009

Grundlagen der Optimierung

Übung 0

1. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Himmelblau-Funktion

$$f(x_1, x_2) = \big(x_1^2 + x_2 - 11\big)^2 + \big(x_1 + x_2^2 - 7\big)^2$$

und zeichnen Sie diese mit `Matlab` in $[-6, 6] \times [-6, 6]$.

2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\text{sym}}$ heißt **positiv definit** ($A \succ 0$), falls

$$x^\top Ax > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt. Gilt nur „$\geq$“, so heißt sie **positiv semidefinit** ($A \succeq 0$). Analog definiert man **negativ definit** ($A \prec 0$) und **negativ semidefinit** ($A \preceq 0$).

a) Zeigen Sie: Eine Matrix ist genau dann positiv definit (positiv semidefinit), falls alle Eigenwerte der Matrix positiv (nicht negativ) sind.

b) Sind folgende Matrizen positiv (semi-)definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Beweisen Sie: Für $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\text{sym}}$ gilt

$$|\lambda_k(A + E) - \lambda_k(A)| \leq \|E\|_2,$$

wobei die Eigenwerte aufsteigend sortiert sind ($\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$). Insbesondere hängen die Eigenwerte stetig von den Einträgen der Matrix ab.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(E) \leq \lambda_k(A + E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(E)$$

mittels des Minimax-Theorems von Courant-Fischer:

$$\lambda_k(A) = \min_{\substack{U \text{ UR} \\ \dim U = k}} \; \max_{\substack{x \in U \\ \|x\| = 1}} x^\top Ax.$$