

Grundlagen der Optimierung

Beispiel einer linearen Optimierungsaufgabe

Beispiel 8.1 (Mozartproblem)

Eine Firma stellt Mozartkugeln und Mozarttaler her und benötigt dafür folgende Zutaten:

	Marzipan	Nougat	Bitterschokolade	Verkaufspreis
Mozartkugeln	1	2	1	9
Mozarttaler	1	1	2	8
Lagerbestand	6	11	9	

Frage: Welche Menge an Mozartkugeln und -talern sollte produziert werden, um den Umsatz zu maximieren?

Es sei

x_1 = Menge an Mozartkugeln

x_2 = Menge an Mozarttalern.

Wir erhalten folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\left. \begin{array}{l}
 \max \quad 9x_1 + 8x_2 \\
 \text{sodass} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 \quad \quad \quad 2x_1 + x_2 \leq 11 \\
 \quad \quad \quad x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 \text{und} \quad x_1 \geq 0 \\
 \quad \quad \quad x_2 \geq 0.
 \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Aus der Modellierung ergibt sich folgende typische Gestalt einer linearen Optimierungsaufgabe:

$$\left. \begin{array}{l}
 \max \quad c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\
 \text{sodass} \quad Ax \leq b \\
 \text{und} \quad x \geq 0.
 \end{array} \right\} \quad (8.2)$$

Dabei sind $c \in \mathbb{R}^n$ (**Kostenvektor**), $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 0$. Die Ungleichungen sind komponentenweise zu verstehen. Ein LP der Gestalt (8.2) heißt in **kanonischer Form**, und x heißt **Variable** des Problems.

In (8.1) ist z.B.

$$c = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

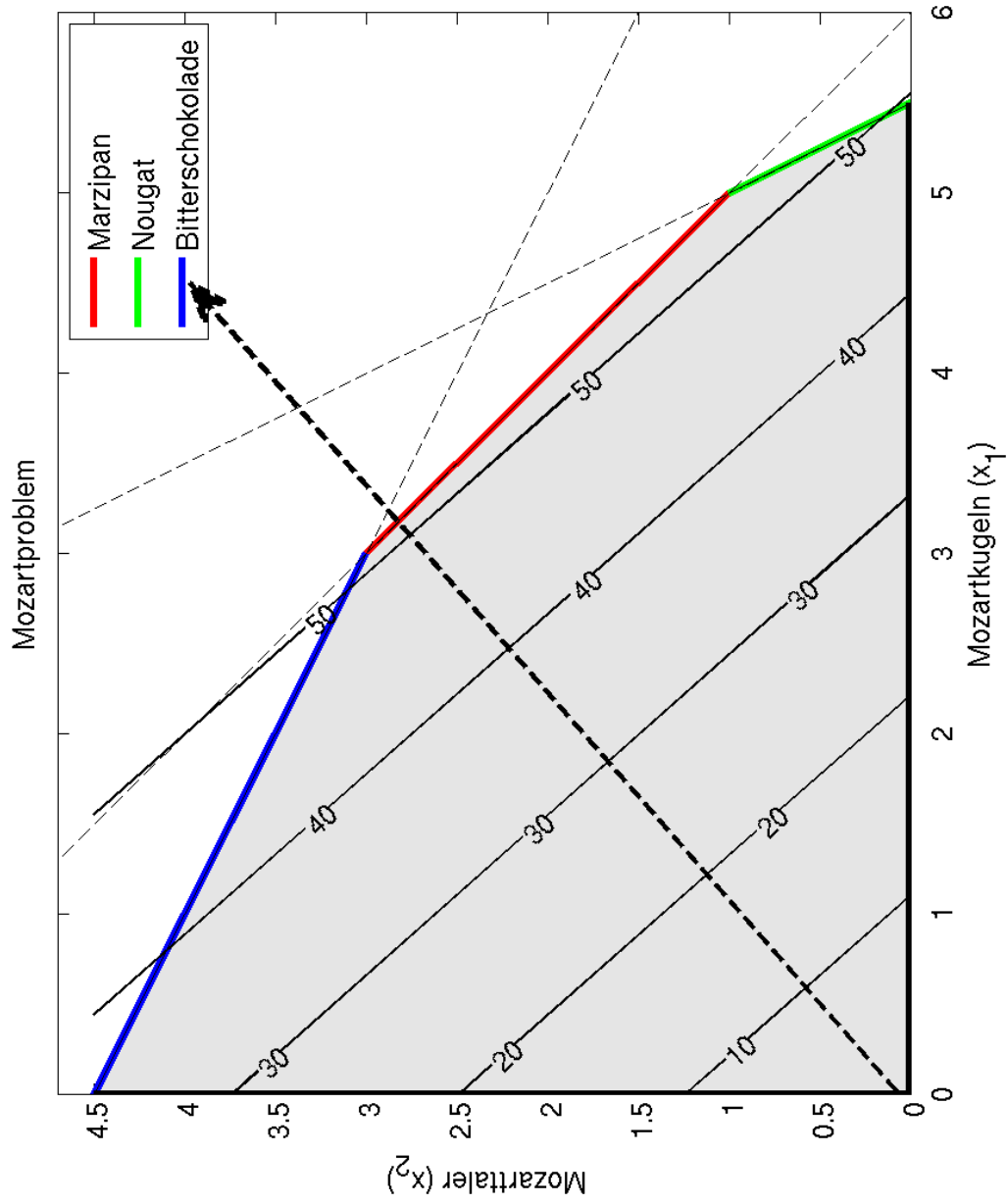


Abbildung 1: zulässige Menge (grau), Kostenvektor c und einige Höhenlinien (mit Funktionswerten) der Zielfunktion beim Mozartproblem