



# Seminar Optimierung - Regularisierte Approximation

Susann Mach

20.01.2009

## 1 Regularisierte Approximation

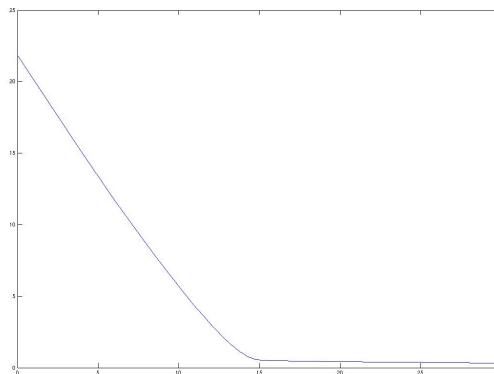
### 1.1 Aufgabenstellung

Vektoroptimierungsproblem:

$$\min (\|Ax - b\|, \|x\|) \quad (1)$$

### 1.2 Mögliche Lösungsansätze

- *Kompromiss-Kurve (trade-off curve)*  
Auftragen der minimal erreichbaren Norm des Vektors  $x$  bei gegebener Norm des Residuums.



- *Regularisation*  
Idee: Minimierung der beiden Zielfunktionen als gewichtete Summe:

$$\min \|Ax - b\| + \gamma \|x\|, \gamma > 0 \quad (2)$$

Variation von  $\gamma \in (0, \infty)$  liefert gerade die trade-off curve.

- weitere mögliche Regularisation  
gewichtete Summe der Norm-Quadrate:

$$\min \|Ax - b\|^2 + \delta \|x\|^2, \delta > 0 \quad (3)$$

Wann ist es besonders sinnvoll, regularisierte Approximation zu verwenden?

- Wissen: Lösung besitzt kleine Norm  $\Rightarrow$  Wähle entsprechen großen  $\gamma$  bzw.  $\delta$
- Probleme der Optimalen Steuerung  
 erste Term: „Kosten“ für die Abweichung vom Ziel  
 zweiter Term: „Kosten“ für die Steuerung
- $y = Ax$  ist nur für kleine  $x$  eine gute Approximation des eigentlichen Zusammenhangs  $y = f(x)$   
 lösen also  $f(x) \approx b$  durch (1)
- Bei Änderungen in der Matrix  $A$

### 1.2.1 Tikhonov Regularisation

$$\min \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|x\|_2^2 = x^T(A^T A + \delta I)x - 2b^T Ax + b^T b, \delta > 0 \quad (4)$$

(4) wird als Tikhonov Regularisations Problem bezeichnet.

analytische Lösung:

$$x = (A^T A + \delta I)^{-1} A^T b \quad (5)$$

Da  $A^T A + \delta I \succ 0 \forall \delta > 0$  ist keine Bedingungen an  $\text{Rang}(A)$  nötig für eine eindeutige Lösung.

### 1.2.2 Glättungsregularisation

Erweiterung der Regularisationsidee:

Bestrafe starke Variation (schlechte Glattheit) von  $x$  statt die Größe von  $x$ . Nutze dafür eine approximative Matrixdarstellung  $D$  des Differentialoperators erster bzw. zweiter Ordnung.

Wenn  $\Delta$  die tridiagonale Toeplitz-Matrix

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times n}$$

ist, dann ist  $\Delta x$  eine Approximation an die zweite Ableitung von  $x \Rightarrow \|\Delta x\|_2^2$  ist Maß für die Krümmung im Quadratmittel  $[0, 1]$

Tikhonov Regularisation des Problems:

$$\min \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|\Delta x\|_2^2 \quad (6)$$

$\Rightarrow$  Für große  $\delta$  werden glatte Lösungen bevorzugt.

### 1.2.3 $l_1$ -Norm Regularisation

Die  $l_1$ -Norm Regularisation kann man verwenden, um möglichst dünnbesetzte (sparse) Lösungen zu finden. Zum Beispiel bei einem LLS-Problem mit einer nichtquadratischen Matrix  $A$ .

$$\min \|Ax - b\|_2 + \gamma \|x\|_1 \quad (7)$$

Beispiel:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine nichtquadratische Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor, den wir als Linearkombination von  $k < m$  Spalten von  $A$  darstellen wollen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min \quad & \|Ax - b\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \text{card}(x) \leq k \end{aligned} \quad (8)$$

Im Allgemeinen ein schwieriges kombinatorisches Problem.

einfacher Ansatz:

alle möglichen Besetzungen des Vektors  $x$  mit  $k$  Einträgen ungleich Null untersuchen.

$\Leftrightarrow n!/(k!(n-k)! = \binom{n}{k}$  least-squares Probleme der Form  $\min \|\tilde{A}\tilde{x} - b\|_2$  lösen.  $\Rightarrow$  sehr aufwendig.

heuristischer Ansatz:

Löse (7) mit verschiedenen Werten für  $\gamma$

Finde kleinsten Wert für  $\gamma$ , für den  $x$   $\text{card}(x) = k$  erfüllt.

Benutze gefundenes Besetzungsschema um die Lösung  $x$  zu finden, die  $\|Ax - b\|_2$  minimiert.

## 2 Anwendung - Signal-Rekonstruktion

Signal: Vektor des  $\mathbb{R}^n$ , der über eine Funktion  $f$  mit der Zeit verknüpft ist.

Annahme: Signal ändert sich im Allgemeinen nicht zu stark  $\Rightarrow x_i \approx x_{i+1}$ .

Signal sei durch additiven, zufälligen Fehler - Rauschen(noise) - gestört.

Ziel: ursprüngliches Signal so gut wie möglich wiederherstellen.

### 2.1 Quadratic smoothing

Quadratic smoothing nutzt Wissen: Fehler hochfrequent, ursprüngliches Signal von deutlich niedrigerer Frequenz

$\Rightarrow$  Bestrafe Lösungen mit großer zweiter Ableitung

$\Rightarrow$  Lösungen mit geringerer Krümmung werden bevorzugt.

$$\min \|\hat{x} - x_{\text{gestört}}\|_2^2 + \delta \|Dx\|_2^2 \quad (9)$$

mit

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung des Problems,  $\hat{x} = (I + \delta D^T D)^{-1} x_{\text{gestört}}$ , lässt sich sehr effizient berechnen.

Signal gestörte trigonometrischen Funktion:

Problem für ursprüngliches Signal, das einen Sprung enthält:

### 2.2 Total variation reconstruction

Total variation reconstruction kann störende Geräusche herausfiltern (glätten) und gleichzeitig ver Einzelte große Änderungen im ursprünglichen Signal erhalten.  $\Rightarrow$  Lösen des Problems:

$$\min \|\hat{x} - x_{\text{gestört}}\|_2 + \gamma \sum_{i=1}^{n-1} |\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i| = \min \|\hat{x} - x_{\text{gestört}}\|_2 + \gamma \|Dx_{\text{gestört}}\|_1 \quad (10)$$

Für das obige Beispiel eines ursprüngliches Signals, das einen Sprung enthält ergibt sich:

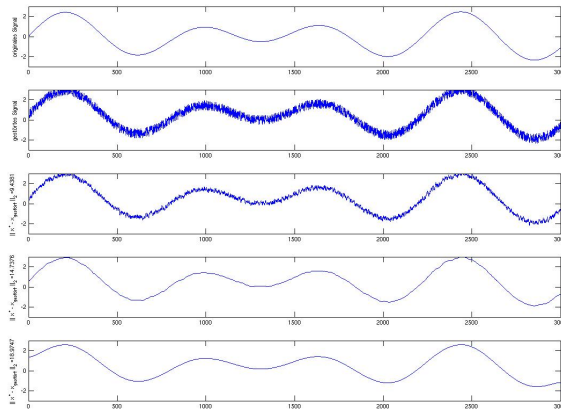


Abbildung 1: Quadratic smoothing eines glatten Signals

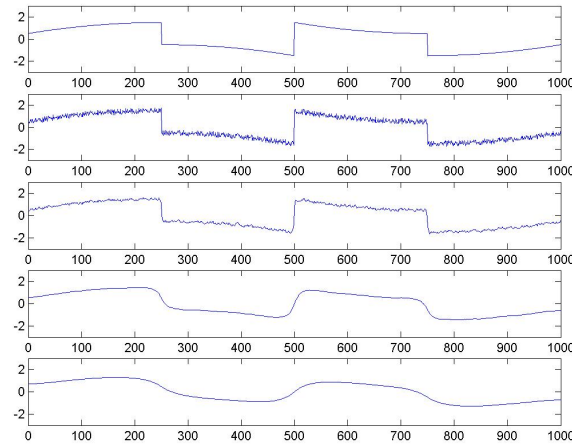


Abbildung 2: Quadratic smoothing eines nicht glatten Signals: ursprüngliches Signal oben, gestörtes Signal, rekonstruierte Signale mit  $\delta = 1, 100, 1000$  darunter

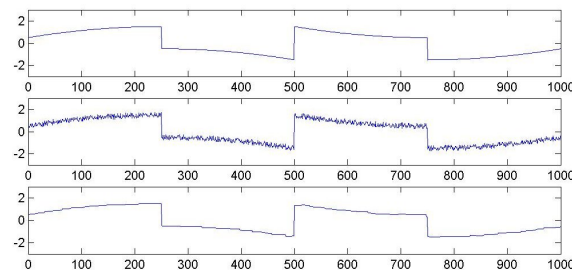


Abbildung 3: Total variation reconstruction eines nicht glatten Signals: ursprüngliches Signal oben, gestörtes Signal Mitte, rekonstruiertes Signal unten