1 Konvexe Funktionen

1.1 Definition

Eine Funktion f heißt **konvex**, wenn $dom f$ eine konvexe Menge ist und $\forall x,y \in dom f$ und $0 \leq \theta \leq 1$: $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ gilt.

Der eigentliche Definitionsbereich bzw. der **Domain** einer Funktion f ist definiert durch $dom f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}$.

Ist f konvex definieren wir seine **eigentlich konvexe Funktion** $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in dom f \\ \infty & x \notin dom f \end{cases}$ und $dom f = \{x : \tilde{f}(x) < \infty\}$.

Für $\tilde{f}(x)$ gilt:

Seien f_1,f_2 zwei konvexe Funktionen im $\mathbb{R}^n$. Die punktweise Summe $f = f_1 + f_2$ ist die Funktion $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \;\; \forall x \in dom f$ mit $dom f = dom f_1 \cap dom f_2$.

1.2 Bedingung 1.Ordnung

Sei f differenzierbar.
f ist konvex gdw. $dom f$ konvex ist und $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) \;\; \forall x,y \in dom f$ gilt.

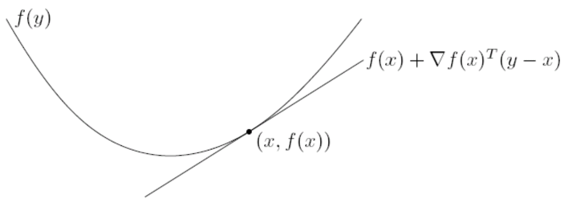


Abb. 1: Taylorentwicklung 1.Ordnung von f an der Stelle x.

Bedeutung dieser Ungleichung:

Ist $\nabla f(x) = 0$ so ist $\forall y \in dom f, \;\; f(y) > f(x)$, dh. x ist ein lokales Minimum.

1.3 Bedingung 2.Ordnung

Sei f zweimal differenzierbar.
f ist konvex gdw. $dom f$ konvex ist und $\nabla^2 f(x) \succeq 0 \ \forall x \in dom f$.
f ist konkav gdw. $dom f$ konvex ist und $\nabla^2 f(x) \preceq 0 \ \forall x \in dom f$.
Ist $\nabla^2 f(x) \succ 0 \quad \forall x \in dom f$ dann ist f strikt konvex. Die Umkehrung gilt jedoch nicht:

Beispiele:

(a) Die negative Entropie $f(x) = x \log x$ auf $\mathbb{R}_{++}$ ist konvex:

(b) Die quadratische Funktion $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ ist konvex, $y > 0$:

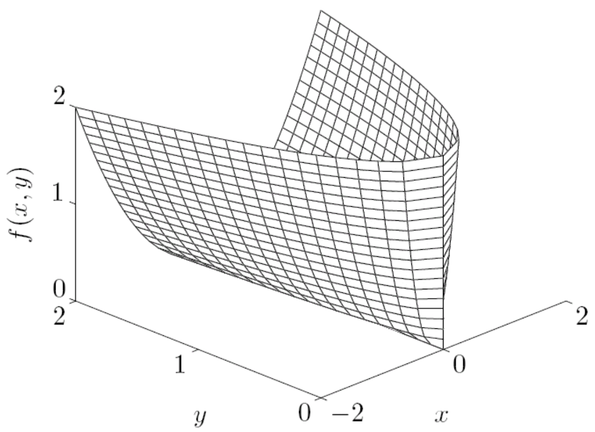


Abb. 2: Graph der Funktion $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$.

(c) Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist konvex:

1.4 Epigraph

Der **Epigraph** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
$epi f = \{(x,t) : x \in dom f,\ f(x) \leq t\}$.

Eine Funktion ist konkav gdw. sein **Hypograph** $hypo f := \{(x,t) : t \leq f(x)\}$ eine konvexe Menge ist.

Abb. 3: Hyperebene, die den Epigraphen in einem Punkt stützt.

Wir können eine Funktion durch seinen Epigraphen geometrisch interpretieren, wie in Abb. 3 dargestellt:

Betrachten die Bedingung 1.Ordnung $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$ mit f konvex und $x,y \in dom f$.

Ist $(y,t) \in epi f$, dann ist $t \geq f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$ und dies können wir ausdrücken durch
$(y,t) \in epi f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ -1 \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right] \leq 0.$

Das bedeutet, dass die Hyperebene, definiert durch $(\nabla f(x), -1)$ den Epigraphen in einem Randpunkt $(x, f(x))$ stützt.

2 Operationen, die die Konvexität bewahren

Ist f konvex, $\alpha \geq 0$, so ist αf konvex und sind f_1, f_2 zwei konvexe Funktionen, dann ist ihre Summe $f_1 + f_2$.
Fügt man beide Operationen zusammen, so ist $f = \omega_1 f_1 + \ldots + \omega_m f_m$ konvex.
Diese Eigenschaften können auf unendliche Summen und Integrale übertragen werden:
zB. sei $f(x,y)$ konvex in x für jedes $y \in A$, so ist die Funktion $g(x) = \int \omega(y) f(x,y) dy$ konvex in x (vorausgesetzt das Integral existiert).

2.1 Punktweises Maximum und Supremum

Sind f_1,f_2 zwei konvexe Funktionen, dann ist ihr **punktweises Maximum** f definiert durch $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ mit $dom f = dom f_1 \cap dom f_2$ auch konvex.
Sind $f_1, \ldots, f_m$ konvex, so ist $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ konvex.

Diese Eigenschaft kann auf das punktweise Supremum über unendlichen Mengen übertragen werden:

Ist $f(x,y)$ konvex für jedes $y \in A$, dann ist die Funktion $g(x) = \sup\limits_{y \in A} f(x,y)$ konvex, wobei der domain von g gegeben ist durch

$dom g = \{x : (x,y) \in dom f \ \ \forall y \in A, \ \sup\limits_{y \in A} f(x,y) < \infty\}$.

In Form von Epigraphen ausgedrückt entspricht das punktweise Supremum von Funktionen dem Durchschnitt von Epigraphen, dh. $epi g = \bigcap\limits_{y \in A} epi f(\cdot,y)$.

<u>Beispiel:</u> (Stützfunktion)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $C \neq \emptyset$. Die Funktion S_C, definiert durch $S_C(x) = \sup\limits_{y \in C} x^T y$ mit $dom S_C = \{x : \sup\limits_{y \in C} x^T y < \infty\}$ ist konvex.

2.2 Skalare Komposition

Seien $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ zwei Funktionen.
Dann ist ihre **Komposition** $f = h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = h(g(x))$ und $dom f = \{x \in dom g : g(x) \in dom h\}$.

Betrachten den Fall $k = 1$, dh. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und beschränken uns auf den Fall $n = 1$:
Sind h und g zweimal differenzierbare Funktionen mit $dom g = dom h = \mathbb{R}$, so wird die Konvexität auf $f''(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ reduziert, wobei die 2.Ableitung von $f = h \circ g$ durch

$f''(x) = h''(g(x))g'(x)^2 + h'g((x))g''(x)$ gegeben ist.

Daraus folgt

Ist g konvex, h konvex und nichtfallend dann ist f konvex.
Ist g konkav, h konvex und nichtsteigend dann ist f konvex.
Ist g konkav, h konkav und nichtfallend dann ist f konkav.
Ist g konvex, h konkav und nichtsteigend dann ist f konkav.

Verallgemeinerung auf den Fall $n > 1$:

Ist g konvex, h konvex und $\tilde{h}$ nichtfallend dann ist f konvex.
Ist g konkav, h konvex und $\tilde{h}$ nichtsteigend dann ist f konvex.
Ist g konkav, h konkav und $\tilde{h}$ nichtfallend dann ist f konkav.
Ist g konvex, h konkav und $\tilde{h}$ nichtsteigend dann ist f konkav.

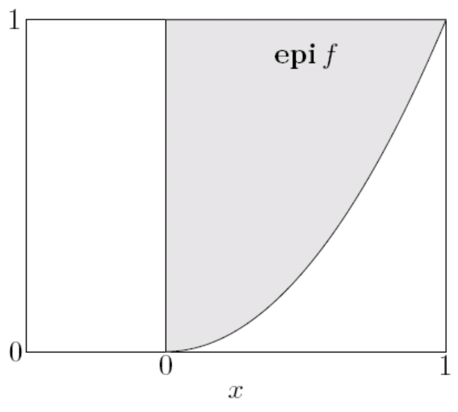
$\tilde{h}$ bezeichnet hierbei die Erweiterung der Funktion h.
Das $\tilde{h}$ nichtfallend ist bedeutet, dass für beliebige $x,y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, $\quad \tilde{h}(x) < \tilde{h}(y)$ ist, das heißt für $y \in domh$ ist $x \in domh$. Also weitet sich $domh$ unendlich in die negative Richtung aus: das ist entweder $\mathbb{R}$ oder ein Intervall $(-\infty,a)$ oder $(-\infty,a]$.
Für h konvex und $\tilde{h}$ nichtsteigend bedeutet das, dass h nichtsteigend ist und $domh$ sich unendlich in die positive Richtung ausweitet.

Beispiele:

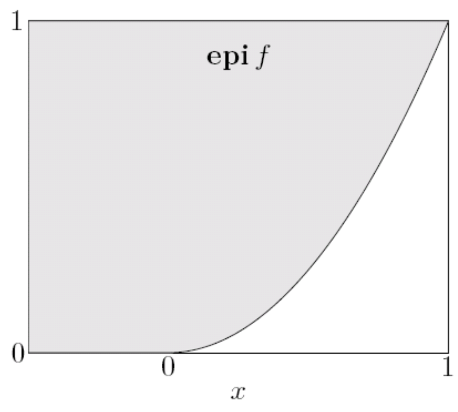
(a)

(b)

(c)



(a) Die Funktion $f(x) = x^2$ mit $domf = \mathbb{R}_+$.



(b) Die Funktion $f(x) = \max\{x,0\}^2$ mit $domf = \mathbb{R}$.

2.3 Minimierung

Sei f konvex in (x,y) und C eine konvexe nichtleere Menge, dann ist $g(x) = \inf\limits_{y \in C} f(x,y)$ konvex in x, sofern $g(x) > -\infty \ \ \forall x$. Der domain von g ist die Projektion von $domf$ auf seine x-Koordinate, dh. $domg = \{x : (x,y) \in domf \ \text{ für bel. } \ y \in C\}$.

Mit f, g und C wie oben und angenommen das Infimum über $y \in C$ ist erreicht für jedes x gilt in Form von Epigraphen $epig = \{(x,t) : (x,y,t) \in epif, \ y \in C\}$.

2.4 Perspektive

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist die **Perspektive** von f die Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x,t) = tf(\frac{x}{t})$ mit $dom g = \{(x,t) : \frac{x}{t} \in dom f, \quad t > 0\}$.
Epig ist das Urbild von *epif* unter der perspektiven Abbildung, die (u,v,w) zu $\frac{(u,w)}{v}$ macht:

Beispiel: (Entropie)

Betrachten die konvexe Funktion $f(x) = -\log x$ auf $\mathbb{R}_{++}$.
Seine Perspektive ist $g(x,t) = -t\log(\frac{x}{t}) = t\log(\frac{t}{x}) = t\log t - t\log x$ und ist konvex auf $\mathbb{R}^2_{++}$.
Diese Funktion g nennt man die **Relative Entropie** von t und x.

(a)

(b)