4.4 Quadratische Optimierungsprobleme

1. Quadratische Programme (QP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} \quad & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{4.34}$$

- wobei $P \in S_+^n$, $G \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ und $A \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$
- Zielfunktion (ZF) ist (konvex) quadratisch
- Nebenbedingungen (NB) sind affin
- Minimierung über Polyeder

Beispiel 1 (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)**.**

$$\min \quad \| Ax - b \|_2^2 = x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$$

- Lösung dieses QP's lautet $A^\dagger b$
- durch untere und obere Schranke ergänzt, erhält man folgendes QP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \| Ax - b \|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & l_i \le x_i \le u_i, \quad i = 1, .., n \end{aligned}$$

Beispiel 2 (Abstand zweier Polyeder)**.**

$$\begin{aligned} \min \quad & \| x_1 - x_2 \|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x_1 \preceq b_1 \\ & A_2 x_2 \preceq b_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

- $P_1 = \{x_1 : A_1 x_1 \preceq b_1\}$ und $P_1 = \{x_2 : A_2 x_2 \preceq b_2\}$ seien 2 Polyeder
- $dist(P_1, P_2) := inf\{\| x_1 - x_2 \|_2^2 : x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$

2. Quadratische Programme mit quadratischen NB (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1,..,m \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{4.35}$$

- wobei $P_i \in S_+^n$, $i = 0, 1, .., m$
- NB sind (konvex) quadratisch
- $P_i \succ 0$: Minimierung über den Durchschnitt von Ellipsoiden

3. Second-order cone Programme (SOCP)

$$\begin{aligned} \min \quad & f^T x \\ \text{s.t.} \quad & \| A_i x + b_i \|_2 \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1,..,m \\ & Fx = g \end{aligned} \tag{4.36}$$

- wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{(n_i \times n)}$, $F \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$
- $\| A_i x + b_i \|_2 \leq c_i^T x + d_i$ heißt second-order cone constraint
- $(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \in \mathbb{R}^{n_i+1}$ (Lorentzkegel)

Robuste lineare Programme

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1,..,m \end{aligned}$$

- Streuung in c, a_i, b_i
- zur Vereinfachung: c, b_i fest und $a_i \in \varepsilon_i = \{\overline{a}_i + P_i u : \|u\|_2 \leq 1\}$ (wobei $P_i \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$)

$\Rightarrow$ robustes LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x \le b_i \quad \forall a_i \in \varepsilon_i, \quad i = 1,..,m \end{aligned} \tag{4.37}$$

$\Leftrightarrow$ SOCP:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \overline{a}_i^T x + \|P_i^T x\|_2 \le b_i, \quad i = 1,..,m \end{aligned}$$

4.6 Verallgemeinerte Ungleichungs-NB

- Verallgemeinerung des konvexen Optimierungsproblems lautet:

$$\begin{array}{rl} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1,..,m \\ & Ax = b \end{array} \tag{4.48}$$

- wobei $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K_i \subseteq \mathbb{R}^{k_i}$ eigentlicher Kegel, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k_i}$ sind K_i-konvex
- Ungleichungs-NB sind vektorwertige Funktionen

4.6.1 Konische Probleme

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Fx + g \preceq_K 0 \\ & Ax = b \end{array} \tag{4.49}$$

- heißt konisches Programm, wobei ZF linear, Ungleichungs-NB affin und K-konvex
- (4.49) in Standardform:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & x \succeq_K 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

Beispiel 3 (SOCP)**.**

- SOCP's kann man als konische Programme schreiben:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & -(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1,..,m \\ & Fx = g \end{array}$$

- wobei $K_i = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n_i+1} : \|y\|_2 \leq t\}$, d.h. der Lorentzkegel

4.6.2 Semidefinite Programme (SDP)

- SDP ist ein spezielles konisches Programm, da $K = S^k_+$:,

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & x_1F_1 + .. + x_nF_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{4.50}$$

- wobei G,$F_i \in S^k$ (i=1,..,n) und $A \in \mathbb{R}^{(p\times n)}$

- (4.50) in Standardform:

$$\begin{aligned} \min \quad & tr(CX) \\ \text{s.t.} \quad & tr(A_ix) = b_i, \quad i = 1, .., p \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

  - $C, A_i, X \in S^n$ (i=1,..,p)
  - NB bestehen aus p linearen Gleichungen und einer (Matrix) nichtnegativen Ungleichung
  - $(\sum_{i,j=1}^n C_{ij}Xij)$

Beispiel 4 (Matrixnorm-Minimierung)**.**

- geg.: $A(x) = A_0 + x_1A_1 + ... + x_nA_n, \quad A_i \in \mathbb{R}^{(p\times q)}$

$\Rightarrow \qquad \min \quad \|A(x)\|_2$

- wissen: $\|A\|_2 \leq s \quad \Leftrightarrow \quad A^TA \preceq s^2I, \ (s \geq 0)$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & s \\ \text{s.t.} \quad & A(x)^TA(x) \preceq sI \end{aligned} \tag{*}$$

in den Variablen x und s,

- da $A(x)^TA(x) - sI$ Matrixkonvex in x und s $\Rightarrow$ (*) konvexes Optimierungsproblem mit einer NB, die eine $q \times q$ Matrix-Ungleichung ist,
  umformen der Ungleichungs-NB in eine lineare Matrix Ungleichung der Größe $(p + q) \times (p + q)$, in dem man

$$A^TA \preceq t^2I, \ (t \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} tI & A \\ A^T & tI \end{bmatrix} \succeq 0$$

  ausnutzt

$\Rightarrow$ SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} tI & A \\ A^T & tI \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

4.7 Vektoroptimierung

4.7.1 Allgemeine und konvexe Vektoroptimierungsprobleme

• Vektoroptimierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathcal{D}} \ (w.r.t.\ \mathcal{K})\ f_0(x) \\ &s.t.\ f_i(x) \leq 0,\ i=1,\dots,m \\ &\qquad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,p \end{aligned} \tag{4.56}$$

$x \in \mathbb{R}^n\ Variable,\ \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^q (eigentlicher\ Kegel),$
$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ Ungleichungsnebenbedingungen,$
$h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ Gleichungsnebenbedingungen,$
$f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q\ Zielfunktion$

(4.56) heißt konvex falls, f_0 $\mathcal{K}$-konvex, $f_1,\dots,f_m$ konvex und $h_1,\dots,h_p$ affin

Besonderheit:

4.7.2 Optimale Punkte und Optimalwerte

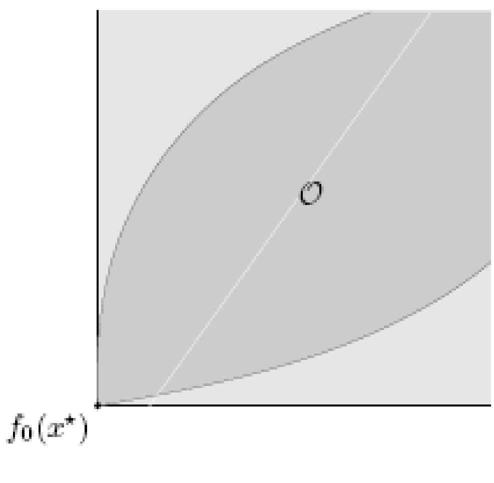
• Menge $\mathcal{O}$ der erreichbaren Zielfunktionswerte:

$$\mathcal{O} := \{f_0(x) \mid \exists\ x \in \mathcal{D},\ f_i(x) \leq 0, i=1,\dots,m,\ h_i(x)=0,\ i=1,\dots,p\}$$

x heißt optimal für (4.56) falls $\mathcal{O}$ ein Minimum hat, $f_0(x)$ heißt dann Optimalwert.

Falls ein Vektoroptimierungsproblem einen Optimalwert hat, so ist dieser eindeutig.

Satz 5.
x^* ist optimal $\Leftrightarrow$ x^* zulässig und $\mathcal{O} \subseteq f_0(x^*) + \mathcal{K}$

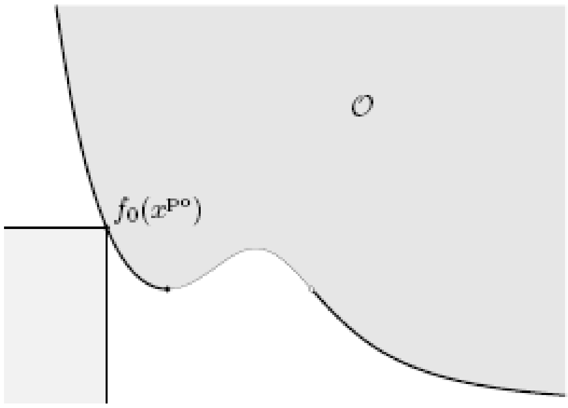


In der Regel existiert kein optimales Element.

4.7.3 Pareto-optimale Punkte und pareto-optimale Werte

Ein zulässiger Punkt x heißt pareto-optimal (bzw. effizient) für (4.56), falls $f_0(x)$ minimales Element von $\mathcal{O}$ ist. $f_0(x)$ heißt dann pareto-optimaler Wert für (4.56).

Satz 6.
x^{po} ist pareto-optimal $\Leftrightarrow$ x^{po} zulässig und $(f_0(x^{po}) - \mathcal{K}) \cap \mathcal{O} = \{f_0(x^{po})\}$



Die Menge $\mathcal{P}$ aller pareto-optimalen Punkte erfüllt .

4.7.4 Skalarisierung

(Standardtechnik zum Finden von pareto-optimalen Punkten)

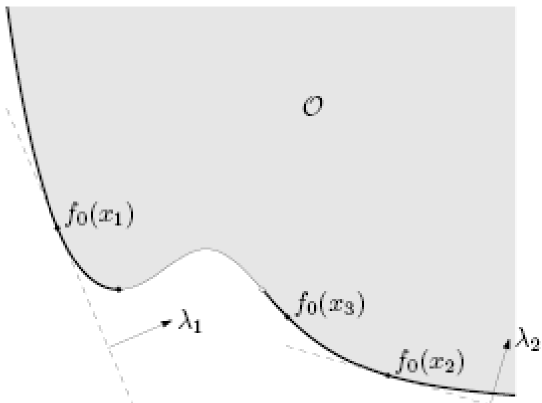
• Skalarisierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathcal{D}} \lambda^T f_0(x) \\ s.t.\ &f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \\ &h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{4.60}$$

$\lambda \succ_{K^*} 0$, Rest wie in (4.56).

Satz 7.
x^* sei optimal für (4.60) $\Rightarrow$ x^* ist pareto-optimal für (4.56)

• Variation von λ (Gewichtungsparameter) führt zu verschiedenen pareto-optimalen Punkten (unterschiedliche Wichtigkeit in Komponenten)



Geometrisch: finden beim Lösen von (4.60) nicht nur einen pareto-optimalen Punkt für (4.56), sondern auch einen Halbraum im $\mathbb{R}^q$ (stützt Menge der erreichbaren Zielfunktionswerte)

bei konvexen Vektoroptimierungsproblemen

Finden pareto-optimale Punkte eines konvexen Vektoroptimierungsproblems mithilfe eines (standard) konvexen Optimierungsprogramms.

Satz 8. *(Teilumkehrung von Satz 7.)*
Für jeden pareto-optimalen Punkt x^{po} eines konvexen Vektoroptimierungsproblems, $\exists\lambda \succeq_{\mathcal{K}^*} 0, \lambda \neq 0$, sodass x^{po} Lösung von (4.60) ist.

Finden in manchen Fällen alle pareto-optimalen Punkte von (4.56). Ansonsten

Beispiel 9. *(Minimale obere Schranke einer Menge von Matrizen)*

4.7.5 Mehrzieloptimierung/Mehrkriterienoptimierung(MCP)

Spezialfall: $\mathcal{K}$=$\mathbb{R}^q$

Betrachten $f_0(x) \,\widehat{=}\, (F_1(x), \dots, F_q(x))$ als Vektor von skalaren Funktionen und minimieren jede Komponente.

MCP heißt konvex, falls $f_1, \dots, f_m$ konvex, $h_1, \dots, h_p$ affin und die Zielfunktionen $F_1, \dots, F_q$ konvex.

Satz 10.
x^* ist optimal in einem MCP, falls $F_i(x^*) \leq F_i(y),\ \forall\ i = 1, \dots, q$ erfüllt ist (y zulässig)

$$\Leftrightarrow$$

x^* ist optimal für alle Standardoptimierungsprobleme der Form:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}}\ & F_j(x),\ \forall\ j = 1, \dots, q \\ s.t.\ & f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Die Zielfunktionen $F_1, \dots, F_q$ heißen nicht konkurrierend, falls ein optimaler Punkt x^* existiert.

Kompromissanalyse

x, y zwei pareto-optimale Punkte. Teile Indizes der Zielfunktionen auf:

$$\begin{aligned} F_i(x) &< F_i(y),\ \forall i \in A \\ F_i(x) &= F_i(y),\ \forall i \in B \\ F_i(x) &> F_i(y),\ \forall i \in C,\ mit\ A \cup B \cup C = \{1, \dots, q\}. \end{aligned}$$

Aufgabe der Kompromissanalyse: Wieviel muss ich mich in einer Komponente verschlechtern, um mich in einer anderen verbessern zu können und im Verhältnis besser zu werden.

Optimale Kompromissfläche: Menge der pareto-optimalen Werte eines MCP, $q \geq 0$.
(q=2 Kompromisskurve)
Zu Beachten:

Skalarisierung von MCPs

Betrachten skalarisierte Summe der Zielfunktionen:

$$\lambda^T f_0(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i F_i(x)\ mit\ \lambda_i > 0$$

Können die Summe beeinflussen indem wir λ_i so wählen wie wir die Komponenten gewichtet haben wollen. ⇒mehrere pareto-optimale Punkte

Beispiel 11. *(Regularisierte Methode der kleinsten Fehlerquadrate)*