

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1	Optimierungsprobleme	1
1.1	Grundlegende Notation	1
1.2	Probleme in Standardform	2
1.3	Äquivalente Probleme	2
2	Konvexe Optimierung	3
2.1	Konvexe Optimalitätsprobleme in Standardform	3
2.2	Globale und lokale Optima	4
2.3	Optimalitätskriterium für differenzierbares f_0	4
2.4	Äquivalente konvexe Probleme	5
2.5	Quasikonvexe Optimierung	6
3	Lineare Optimierungsprobleme	6
3.1	Beispiele	7
3.2	Linear-gebrochene Programme	7

1 Optimierungsprobleme

1.1 Grundlegende Notation

Grundlegende Notation

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{1}$$

- $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Zielfunktion
- $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Gleichungsbeschränkungen
- $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Ungleichungsbeschränkungen

- Domain des Optimalitätsproblem

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^m \text{dom} f_i \cap \bigcap_{i=0}^p \text{dom} h_i$$

- Zulässiger Punkt x

$$\text{erfüllt } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ und } h_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

- Optimaler Punkt

$$p^* = \inf \{ f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \}$$

Globale und Lokale Optima

- Optimale Menge

$$X_{\text{opt}} = \{x \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, f_0(x) = p^*\}$$

- ε -suboptimal

$$f_0(x) \leq p^* + \varepsilon$$

- lokal optimal

$$\exists R > 0 : f_0(x) = \inf \{f_0(z) \mid f_i(z) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ h_i(z) = 0, i = 1, \dots, p, \|z - x\|_2 \leq R\}$$

- aktive Indizes

$$f_i(x) = 0$$

1.2 Probleme in Standardform

- Inhomogene Beschränkungen

$$g_i(x) = \tilde{g}_i(x) \Rightarrow h_i(x) = g_i(x) - \tilde{g}_i(x)$$

- Maximierungsprobleme

$$\max f_0(x) \Rightarrow \min -f_0(x)$$

1.3 Äquivalente Probleme

Änderung der Variablen

$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv und $\Phi(\text{dom}\Phi) \supseteq \mathcal{D}$

$$\tilde{f}_i(z) = f_i(\Phi(z)), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\tilde{h}_i(z) = f_i(\Phi(z)), \quad i = 1, \dots, p$$

$$\min \tilde{f}_0(z)$$

$$\text{s.t. } \tilde{f}_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{2}$$

$$\tilde{h}_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Transformation von Ziel- und Beschränkungsfunktion

$$\begin{aligned}\psi_0 &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ monoton steigend} \\ \psi_1, \dots, \psi_m &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ erfüllt } \psi_i(u) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0 \\ \psi_{m+1}, \dots, \psi_{m+p} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ erfüllt } \psi_i(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(x) &= \psi_i(f_i(x)), & i = 0, \dots, m \\ \tilde{h}_i(x) &= \psi_i(f_{m+i}(x)), & i = 1, \dots, p\end{aligned}$$

Schlupfvariablen

$$\begin{aligned}\min & f_0(x) \\ \text{s.t. } & s_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ & f_i(x) + s_i = 0 & i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, p\end{aligned}$$

Optimierung über mehrere Variablen

$$\inf_{x,y} f(x,y) = \inf_x \tilde{f}(x)$$

wobei

$$\tilde{f}(x) = \inf_y f(x,y)$$

2 Konvexe Optimierung

2.1 Konvexe Optimalitätsprobleme in Standardform

Einführung

$$\begin{aligned}\min & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ & a_i^T x = b_i & i = 1, \dots, p\end{aligned}$$

- f_0 konvexe Zielfunktion
- f_i ($i = 1, \dots, m$) konvexe Ungleichungsbeschränkungen
- $h_i(x) = a_i^T x - b_i$ affine Gleichungsbeschränkungen

Äquivalente Probleme

- konkave Maximierungsprobleme

$$\max f_0 \text{ (konkav)} \Leftrightarrow \min -f_0 \text{ (konvex)}$$

- Abstrakte Form konvexer Optimierungsprobleme

2.2 Globale und lokale Optima

Einführung

$$\text{lokales Optimum} \Leftrightarrow \text{globales Optimum}$$

2.3 Optimalitätskriterium für differenzierbares f_0

Einführung

- f_0 differenzierbar:

$$f_0(y) \geq f_0(x) + \nabla f_0(x)^T(y - x) \quad \forall x, y \in \text{dom} f_0$$

- zulässige Menge:

$$X = \{x \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}$$

- x optimal:

$$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X$$

Unbeschränkte Probleme

$$\nabla f_0(x) = 0$$

Probleme mit ausschliesslich Gleichheitsbeschränkungen

-

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array}$$

-

$$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0 \quad \forall y \text{ mit } Ay = b$$

-

$$\nabla f_0(x)^T v \geq 0 \quad \forall v \in N(A)$$

•

$$\nabla f_0(x)^T v = 0 \quad \forall v \in N(A)$$

•

$$\exists v \in R \mid \nabla f_0(x)^T + A^T v = 0$$

Minimierung über den nichtnegativen Orthanten

•

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & x \succ 0 \end{array}$$

•

$$x \succ 0, \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0 \quad \forall y \succ 0$$

•

$$-\nabla f_0(x)^T x \succ 0$$

•

$$\sum_{i=1}^n (\nabla f_0(x))_i x_i = 0$$

•

$$x \succ 0, \nabla f_0(x) \succ 0, x_i (\nabla f_0(x))_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

2.4 Äquivalente konvexe Probleme

Auslöschung der Gleichheitsbeschränkungen

- spezielle Lösung x_0 von $Ax = b$
- Matrix F deren Bild im Kern von A liegt

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(Fz + x_0) \\ \text{s.t.} & f_i(Fz + x_0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Einführung von Gleichheitsbeschränkungen

- $f_i(A_i x + b)$, $A_i \in \mathbb{R}^{k_i \times n}$
- $f_i(y_i)$, $y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$
- $y_i = A_i x + b_i$

Schlupfvariablen

- Einführung von Schlupfvariablen erhält Konvexität

Epigraph Problem Form

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & f_0(x) - t \leq 0 \\ & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & a_i^T x = b_i \quad i = 1, \dots, o \end{array}$$

2.5 Quasikonvexe Optimierung

Einführung

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

Lokale Optima und Optimalitätsbedingungen

$$x \in X, \nabla f_0(x)^T (y - x) > 0 \quad \forall y \in X \setminus \{x\}$$

Quasikonvexe Optimierung über konvexe lösbare Probleme

$$\begin{array}{ll} \text{find} & x \\ \text{s.t.} & \Phi_t(x) \leq 0 \\ & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

3 Lineare Optimierungsprobleme

Einführung

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + d \\ \text{s.t.} & Gx \preceq h \quad G \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ & Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{p \times n} \end{array}$$

Umwandlung Linearer Programme in Standardform

- Schlupfvariablen

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d \\ \text{s.t.} \quad & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0 \end{aligned}$$

- Variable als zwei nichtnegative Variablen

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x^+ - c^T x^- + d \\ \text{s.t.} \quad & Gx^+ - Gx^- + s = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+ \succeq 0, x^- \succeq 0, s \succeq 0 \end{aligned}$$

3.1 Beispiele

Beispiele

- Diät Problem
- Tschebyschow Zentrum eines Polyeders

3.2 Linear-gebrochene Programme

Einführung

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{c^T x + d}{e^t + f} \\ \mathbf{dom} f_0 &= \{x \mid e^T x + f > 0\} \end{aligned}$$

Umformung in ein Lineares Programm

$$\begin{aligned}
& \min c^T y + dz \\
& \text{s.t. } Gy - hz \preceq 0 \\
& \quad Ay - bz = 0 \\
& \quad e^T y + fz = 1 \\
& \quad z \geq 0
\end{aligned}$$

$$y = \frac{x}{e^T x + f}, \quad z = \frac{1}{e^T x + f}$$

Allgemeine Linear-Gebrochene Programme

$$f_0(x) = \max_{i=1, \dots, r} \frac{c_i^T x + d_i}{e_i^T x + f_i}$$

$$\text{dom } f_0 = \{x \mid e_i^T x + f_i > 0, i = 1, \dots, r\}$$