Technische Universität Chemnitz
Prof. R. Griesse, F. Schmidt

Chemnitz, 26. Januar 2008
Abgabe am 2. Februar 2008

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Übung 15

1. Geben Sie eine nichtlineare stetige Abbildung zwischen NLR an, die nicht schwach stetig ist.

2. Gegeben ist die Aufgabe der optimalen Randsteuerung (vgl. Beispiel 16.3)

$$\text{Minimiere} \quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$\text{unter} \quad \begin{aligned} -\triangle y + y &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} y + |y|\, y^3 &= u \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad u \in U_{\text{ad}} = \{u \in L^\infty(\Gamma) : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \text{ f.ü. auf } \Gamma\}.$$

   a) Unter welchen Voraussetzungen an die Daten können wir die Existenz einer optimalen Steuerung beweisen?

   b) Leiten Sie mit der formalen Lagrangetechnik (wie in § 13) die notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine lokale optimale Steuerung $\overline{u} \in U_{\text{ad}}$ her.

3. Die Funktion $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei partiell nach y (dem zweiten Argument) differenzierbar und erfülle die Beschränktheitsbedingung der Ordnung 1 (Definition 21.5).

   a) Zeigen Sie, dass es zum Nachweis der lokalen Lipschitz-Bedingung der Ordnung 1 hinreichend ist, die entsprechende Forderung

$$|D^l\varphi(x, y_1) - D^l\varphi(x, y_2)| \le L(M)\,|y_1 - y_2|$$

   für $l = 1$ zu überprüfen. Die Bedingung für $l = 0$ folgt dann automatisch.

   b) Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Teil (a) mit einer Konstanten $K(M)$ die Abschätzung

$$|\varphi_y(x, y)| \le K(M)$$

   besteht für alle y mit $|y| \le M$ und fast alle $x \in E$.

Hausaufgabe Wir betrachten folgende nichtlineare Optimierungsaufgabe im Banachraum $L^\infty(0,1)$:

$$\min_{u \in L^\infty(0,1)} f(u) := -\int_0^1 \cos(u(x))\,dx, \quad 0 \le u \le 2\pi \text{ f.ü. in } (0,1)$$

Zeigen Sie, dass die Aufgabe überabzählbar viele globale Lösungen besitzt. Welchen paarweisen Abstand haben diese Lösungen in der L^2- und in der L^∞-Norm?