

## Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

### Lösung von Übung 14, Aufgabe 3

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^N$ . Wir betrachten den Nemyzki-Operator  $\Phi(y) = \sin(y(\cdot))$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  in keinem  $L^p(\Omega)$  mit  $1 \leq p < \infty$  Fréchet-differenzierbar ist.

**Hinweis:** Weisen Sie nach, dass die Restgliedeigenschaft (schon für bestimmte Indikatorfunktionen  $\delta y$ ) nicht erfüllt ist, am einfachsten an der Stelle  $y \equiv 0$ .

- (b) Zeigen Sie, dass  $\Phi : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  mit  $1 \leq q < p \leq \infty$  (also mit „Norm-Gap“) Fréchet-differenzierbar ist.

**Hinweis:** Ein Nemyzki-Operator ist automatisch stetig, wenn er für  $1 \leq p_1 \leq \infty$  und  $1 \leq p_2 < \infty$  überhaupt  $L^{p_1}(\Omega)$  in  $L^{p_2}(\Omega)$  abbildet (siehe [Appell and Zabrejko \[1990\]](#)).

#### Beweis:

- (a) Es reicht zu zeigen, dass der Operator im Nullpunkt nicht differenzierbar von  $L^p(\Omega)$  nach  $L^p(\Omega)$  ist für  $1 \leq p < \infty$ .

Wir betrachten die Entwicklung mit integralem Restglied

$$\begin{aligned} \sin(y(x) + \delta y(x)) &= \sin(y(x)) + \cos(y(x)) \delta y(x) \\ &\quad + \underbrace{\int_{s=0}^1 (\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))) ds \delta y(x)}_{=: r(y, \delta y)(x)} \end{aligned}$$

für fast alle  $x \in \Omega$  und erhalten in  $y \equiv 0$ :

$$r(0, \delta y)(x) = \int_{s=0}^1 \left( \cos(0 + s \delta y(x)) - \cos(0) \right) \delta y(x) ds.$$

Man wähle nun ein beliebiges  $x_0 \in \Omega$  aus und setze

$$\delta y(x) = \begin{cases} 1 & \text{in einer Kugel } B_\varepsilon(x_0) \text{ (}\varepsilon \text{ hinreichend klein),} \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(0, \delta y)(x) = \begin{cases} \int_{s=0}^1 (\cos(s) - 1) ds = \sin(1) - 1 & \text{in } B_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|r\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{B_\varepsilon} |\sin(1) - 1|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\sin(1) - 1| \underbrace{\left( \int_{B_\varepsilon} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}}}_{= \|\delta y\|_{L^p(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\|r\|_{L^p(\Omega)}}{\|\delta y\|_{L^p(\Omega)}} = |\sin(1) - 1| \neq 0,$$

wenn  $\|\delta y\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$  mit  $\varepsilon \searrow 0$ . Damit ist die Restgliedeigenschaft verletzt, und somit ist der Nemyzki-Operator  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$  in keinem  $L^p(\Omega)$  mit  $1 \leq p < \infty$  Fréchet-differenzierbar.

**Bemerkung:** Nach Lemma 21.7 und 21.9 der Vorlesung ist der Nemyzki-Operator  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$  aber stetig Fréchet-differenzierbar in  $L^\infty(\Omega)$ .

- (b) Es sei  $1 \leq q < p < \infty$  beliebig. (Für  $p = \infty$  ist wegen Lemma 21.7 nichts zu zeigen.)

Wir betrachten wieder das integrale Restglied der Entwicklung

$$\begin{aligned} \sin(y(x) + \delta y(x)) &= \sin(y(x)) + \cos(y(x)) \delta y(x) \\ &\quad + \underbrace{\int_{s=0}^1 (\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))) ds \delta y(x)}_{=: \psi(x) \delta y(x) =: r(y, \delta y)(x) =: r(x)} \end{aligned}$$

und schätzen das Restglied mit der Hölderschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^q(\Omega)} &= \left[ \int_{\Omega} |\psi|^q |\delta y|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\psi|^{q s'} dx \right)^{\frac{1}{q s'}} \left( \int_{\Omega} |\delta y|^{q s} dx \right)^{\frac{1}{q s}}, \end{aligned}$$

wobei  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$  ist. Man wähle nun  $s$  so, dass  $q s = p$  ist, also  $s = \frac{p}{q} > 1$ . Daraus folgt

$$\frac{1}{s'} = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p - q}{p} \Rightarrow s' = \frac{p}{p - q}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^q(\Omega)} &\leq \left( \int_{\Omega} |\psi|^{\frac{pq}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \underbrace{\left( \int_{\Omega} |\delta y|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|\delta y\|_{L^p(\Omega)}} \\ &= \|\psi\|_{L^r(\Omega)} \|\delta y\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

mit  $r = \frac{pq}{p-q}$ . Beachte:  $r > 1$ . Daraus folgt

$$\frac{\|r\|_{L^q(\Omega)}}{\|\delta y\|_{L^p(\Omega)}} \leq \|\psi\|_{L^r(\Omega)}.$$

Es ist noch zu zeigen, dass  $\|\psi\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0$  geht für  $\|\delta y\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Dazu brauchen wir die Stetigkeit des cos-Operators. Wegen  $|\cos(y(\cdot))| \leq 1$  gilt trivialerweise

$$\cos: L^p(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

für alle  $1 \leq p \leq \infty$ . Damit ist der Nemyzki-Operator  $y(\cdot) \rightarrow \cos(y(\cdot))$  (automatisch) stetig von  $L^p(\Omega)$  in  $L^r(\Omega)$  mit  $r = \frac{pq}{p-q}$ ; siehe Hinweis. Es gilt also:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ mit } \|\delta y\|_{L^p(\Omega)} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\cos(y + \delta y) - \cos(y)\|_{L^r(\Omega)} < \varepsilon.$$

Für  $s \in [0, 1]$  gilt daher auch

$$\|\delta y\|_{L^p(\Omega)} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\cos(y + s \delta y) - \cos(y)\|_{L^r(\Omega)} < \varepsilon.$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^1 [\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))] ds \\ \Rightarrow \quad |\psi(x)| &\leq \int_0^1 |\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))| ds \\ \Rightarrow \quad \|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r &= \int_{\Omega} |\psi(x)|^r dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \int_0^1 \underbrace{|\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))|}_{=: f(s)} ds \right)^r dx \end{aligned}$$

Wegen  $r > 1$  besteht die Einbettung  $L^r(0, 1) \hookrightarrow L^1(0, 1)$  mit Einbettungskonstante  $1^{\frac{r}{r-1}} = 1$  (5. Ü, Aufgabe 16), d.h., es gilt

$$\left( \int_0^1 |f(s)| ds \right)^r \leq \int_0^1 |f(s)|^r ds$$

Deshalb können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r &\leq \int_{\Omega} \int_0^1 |\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))|^r ds dx \\
 &= \int_0^1 \int_{\Omega} |\cos(y(x) + s \delta y(x)) - \cos(y(x))|^r dx ds \\
 &= \int_0^1 \|\cos(y + s \delta y) - \cos(y)\|_{L^r(\Omega)}^r ds.
 \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die obige  $\varepsilon$ - $\delta$ -Abschätzung: Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|\cos(y + s \delta y) - \cos(y)\|_{L^r(\Omega)}^r < \varepsilon^r$$

gilt, also

$$\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \int_0^1 \varepsilon^r ds = \varepsilon^r.$$

Das bedeutet aber, dass  $\|\delta y\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$  auch  $\|\psi\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0$  impliziert. Die Existenz der Integrale rechtfertigt im Nachhinein die stillschweigende Annahme  $f(s) \in L^r(0, 1)$ . Zusammen mit der oben bewiesenen Abschätzung

$$\frac{\|r\|_{L^q(\Omega)}}{\|\delta y\|_{L^p(\Omega)}} \leq \|\psi\|_{L^r(\Omega)}$$

ist die Restgliedeigenschaft

$$\frac{\|r\|_{L^q(\Omega)}}{\|\delta y\|_{L^p(\Omega)}} \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad \|\delta y\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

bewiesen.

Klar ist außerdem, dass

$$L^p(\Omega) \ni \delta y \mapsto \cos(y) \delta y \in L^q(\Omega)$$

ein stetiger linearer Operator ist, weil sogar  $\cos(y) \in L^\infty(\Omega)$  gilt.

## Literatur

J. Appell and P. P. Zabrejko. *Nonlinear Superposition Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.