

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Übung 12, Aufgabe 2c)

Konstruktion einer Testaufgabe mit Steuerbeschränkungen

$$\text{Minimiere } J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\text{unter } \begin{cases} -\Delta y = u & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} y + \alpha y = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{und } u \in U_{\text{ad}}$$

mit

$$U_{\text{ad}} := \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

und der Wahl $\Omega = \text{Einheitskreis}$ und $\alpha \equiv 1$. $\lambda > 0$ ist beliebig.

Wir bezeichnen mit \tilde{y}, \tilde{p} etc. den Zustand, adjungierten Zustand etc. in Polarkoordinaten. Da alle Funktionen rotationssymmetrisch sind, hängen diese Funktionen nur von der Koordinate r ab. Die Ableitung $\frac{d}{dr} \tilde{p}$ bezeichnen wir auch mit \tilde{p}' etc.

Ansatz:

$$\tilde{p} = \lambda (r^2 - C) \quad (1)$$

erfüllt die Randbedingungen, wenn

$$\frac{\partial}{\partial n} p + p|_\Gamma = \tilde{p}'(1) + p(1) = \lambda(2 + 1 - C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3.$$

Daraus folgt

$$\tilde{p} = \lambda (r^2 - 3) \quad (2)$$

und

$$\tilde{u} = P_{U_{\text{ad}}} \left(-\frac{1}{\lambda} \tilde{p} \right) = P_{U_{\text{ad}}} (3 - r^2). \quad (3)$$

Die Schranken sollen z.B. bei $r = 1/4$ und $r = 3/4$ aktiv werden. Wir wählen deshalb

$$u_a := 3 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{39}{16}, \quad u_b := 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{47}{16}. \quad (4)$$

Es gilt also

$$\tilde{u} = \begin{cases} \frac{47}{16} & \text{für } 0 \leq r \leq \frac{1}{4} \\ 3 - r^2 & \text{für } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{4} \\ \frac{39}{16} & \text{für } \frac{3}{4} \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Um die Zustandsgleichung zu erfüllen, drücken wir den Laplace-Operator in Polarkoordinaten aus. Wegen der fehlenden Winkelabhängigkeit gilt

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tilde{y}') = \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r\tilde{y}') = -r\tilde{u} \quad \Rightarrow \quad r\tilde{y}' = -\int_0^r r\tilde{u} dr + D.$$

Da $r\tilde{y}'|_{r=0} = 0$ gilt, ist $D = 0$. Durch Integration erhält man:

$$r\tilde{y}' = -\int_0^r r \frac{47}{16} dr = -\frac{47}{32} r^2 \quad \text{für } 0 \leq r \leq \frac{1}{4} \quad (6)$$

und setzt $\alpha := -\frac{47}{32} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{47}{512}$. Auf dem nächsten Intervall ist

$$r\tilde{y}' = \alpha - \int_{\frac{1}{4}}^r r(3-r^2) dr = \alpha + \frac{95}{1024} - \frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4 \quad \text{für } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{4}. \quad (7)$$

Wir setzen $\beta := \alpha + \frac{95}{1024} - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = -\frac{391}{512}$. Auf dem letzten Intervall gilt

$$r\tilde{y}' = \beta - \int_{\frac{3}{4}}^r r \frac{39}{16} dr = \beta + \frac{351}{512} - \frac{39}{32} r^2 \quad \text{für } \frac{3}{4} \leq r \leq 1. \quad (8)$$

Wir setzen schließlich $\gamma := \beta + \frac{351}{512} - \frac{39}{32}(1)^2 = -\frac{664}{512}$.

Um eine Gleichung für \tilde{y} zu erhalten, müssen wir die Ausdrücke (6)–(8) durch r dividieren und nochmals integrieren. Es gilt

$$\tilde{y} = E + \int_0^r -\frac{47}{32} r dr = E - \frac{47}{64} r^2 \quad \text{für } 0 \leq r \leq \frac{1}{4}. \quad (9)$$

Die Integrationskonstante E wird später aus der Randbedingung für \tilde{y} bestimmt.

Wir setzen noch $\delta(E) := E - \frac{47}{64} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = E - \frac{47}{1024}$. Auf dem nächsten Intervall ist

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \delta(E) + \int_{\frac{1}{4}}^r \left(\alpha + \frac{95}{1024} \right) \frac{1}{r} - \frac{3}{2}r + \frac{1}{4}r^3 dr \\ &= \delta(E) - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{191}{4096} + \frac{1}{1024} \ln r - \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{16}r^4 \\ &= E + \frac{3}{4096} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{1024} \ln r - \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{16}r^4 \quad \text{für } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{4}. \quad (10) \end{aligned}$$

Wir setzen $\eta(E) := E + \frac{3}{4096} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{1024} \ln \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4}\right)^4$, also $\eta(E) = E - \frac{411}{1024} + \frac{1}{1024} \ln \frac{3}{4} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4}$. Auf dem letzten Intervall gilt

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \eta(E) + \int_{\frac{3}{4}}^r \left(\beta + \frac{351}{512} \right) \frac{1}{r} - \frac{39}{32}r dr \\ &= \eta(E) + \frac{40}{512} \ln \frac{3}{4} + \frac{351}{1024} - \frac{40}{512} \ln r - \frac{39}{64}r^2 \\ &= E - \frac{60}{1024} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{81}{1024} \ln \frac{3}{4} - \frac{40}{512} \ln r - \frac{39}{64}r^2 \quad \text{für } \frac{3}{4} \leq r \leq 1. \quad (11) \end{aligned}$$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} y + y|_{\Gamma} &= \tilde{y}'(1) + \tilde{y}(1) \\ &= \gamma + E - \frac{60}{1024} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{1024} \ln \frac{3}{4} - \frac{40}{512} \ln 1 - \frac{39}{64} (1)^2 \\ &= E - \frac{1006}{512} - \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} + \frac{81}{1024} \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

liefert die Integrationskonstante

$$\begin{aligned} E &= \frac{1006}{512} + \frac{1}{1024} \ln \frac{1}{4} - \frac{81}{1024} \ln \frac{3}{4} \\ &= \frac{503}{256} + \frac{5}{32} \ln 2 - \frac{81}{1024} \ln 3. \end{aligned} \tag{12}$$

Damit ist \tilde{y} abschnittsweise bekannt und erfüllt die PDE und die Randbedingung. Schließlich wählen wir $y_{\Omega} := y + \Delta p$, also

$$\tilde{y}_{\Omega} := \tilde{y} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tilde{p}') = \tilde{y} + 4\lambda,$$

so dass auch die adjungierte PDE erfüllt ist.