

ohne darauf zu achten, ob die beteiligten Funktionen überhaupt die vorkommenden Ableitungen besitzen.

Wir erwarten, dass sich die adjungierte Gleichung aus $L_y(\bar{y}, \bar{u}, p_1, p_2) = 0$ ergibt. Die Richtungsableitung in eine beliebige Richtung δy ist dabei

$$L_y(\bar{y}, \bar{u}, p_1, p_2) \delta y = \int_{\Omega} (\bar{y} - y_{\Omega}) \delta y \, dx + \int_{\Omega} \Delta \delta y \, p_1 \, dx - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta y + \alpha \delta y \right) p_2 \, ds.$$

Um daraus etwas ablesen zu können, mussten wir im endlich-dimensionalen Fall die Matrix A transponieren. Jetzt müssen wir partiell integrieren mit dem Ziel, δy „freizustellen“:

$$\begin{aligned} L_y(\bar{y}, \bar{u}, p_1, p_2) \delta y &= \int_{\Omega} (\bar{y} - y_{\Omega}) \delta y \, dx + \int_{\Omega} \Delta p_1 \delta y \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \delta y \, p_1 \, ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} p_1 \delta y \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta y + \alpha \delta y \right) p_2 \, ds \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Nun lassen wir δy variieren und wählen zunächst $\delta y = \frac{\partial}{\partial n} \delta y = 0$ auf Γ und beliebig in Ω . Es ergibt sich

$$-\Delta p_1 = \bar{y} - y_{\Omega} \quad \text{in } \Omega,$$

die schon bekannte adjungierte PDE. Wählen wir nun $\delta y = 0$ auf Γ , aber $\frac{\partial}{\partial n} \delta y$ beliebig, so ergibt sich

$$p_1 = p_2 \quad \text{auf } \Gamma,$$

d.h., p_2 ist gleich den Randwerten von p_1 und wird nicht weiter benötigt. Schließlich erhalten wir mit $\frac{\partial}{\partial n} \delta y = 0$ und δy beliebig auf Γ

$$-\frac{\partial}{\partial n} p_1 - \alpha p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial n} p_1 + \alpha p_1 = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Wir können also $p \stackrel{\text{def}}{=} p_1$ und $p_2 \stackrel{\text{def}}{=} p|_{\Gamma}$ setzen und haben die adjungierte Gleichung mit Randbedingungen gefunden!

Analog zu § 2.5 liefert auch die VU $\nabla_u L(\bar{y}, \bar{u}, p)(u - \bar{u}) \geq 0$ das Richtige, vgl. § 11.5:

$$L_u(\bar{y}, \bar{u}, p_1, p_2)(u - \bar{u}) = \int_{\Gamma} \lambda \bar{u} (u - \bar{u}) \, ds + \int_{\Gamma} \alpha (u - \bar{u}) p \, ds \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U_{\text{ad}}.$$

Bemerkung 13.1 (i) Man kann die Lagrangefunktion auch durch Ankoppeln der *schwachen* Form der PDE definieren:

$$L(y, u, p) = J(y, u) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p \, dx + \int_{\Gamma} \alpha (u - y) p \, ds.$$

So spart man sich gleich den Multiplikator p_2 für die Randbedingung, der ohnehin überflüssig ist. Außerdem ist L jetzt für $y, p \in H^1(\Omega)$ und $u \in L^2(\Gamma)$ sauber definiert. Aus $L_y(\bar{y}, \bar{u}, p) \delta y = 0$ für alle $\delta y \in H^1(\Omega)$ erhält man die schwache Form der adjungierten PDE.

(ii) Der adjungierte Zustand kann als Lagrangemultiplikator verstanden werden, der zur Gleichungsnebenbedingung (PDE) gehört.

(iii) Die formale Lagrange-Technik alleine rechtfertigt jedoch nicht anzunehmen, dass zu einem optimalen \bar{u} mit Zustand \bar{y} tatsächlich ein adjungierter Zustand existiert, sodass die VU erfüllt ist. Dazu bräuchten wir die Karush-Kuhn-Tucker-Theorie und entsprechende Constraint Qualifications in Banachräumen, die in ihrer Anwendung auf PDE-Optimalsteuerungsaufgaben

jedoch nicht einfach sind. Das praktikabelste Vorgehen für den Beweis notwendiger Bedingungen ist deshalb:

- Bestimme mit Hilfe der formalen Lagrangetechnik die richtige adjungierte Gleichung.
- *Definiere* p als die Lösung der schwachen Form dieser Gleichung im passenden Funktionenraum. Das klärt auch die Frage nach der Existenz des adjungierten Zustandes.
- Damit kann leicht ein Resultat analog Lemma 11.7 oder Lemma 11.20 bewiesen werden. Im Beispiel also zeigt man:

$$\int_{\Omega} (\bar{y} - y_{\Omega}) y \, dx = \int_{\Gamma} \alpha p u \, ds,$$

für alle $u \in L^2(\Gamma)$, zugehörige Zustände $y(u)$ und wiederum dazu gehörende adjungierte Zustände p .

- Damit kann man den adjungierten Operator S^* in der VU ersetzen. Im Beispiel (vgl. (11.22)):

$$\begin{aligned} (S^*(S\bar{u} - y_{\Omega}) + \lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} &= (S\bar{u} - y_{\Omega}, S(u - \bar{u}))_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} \\ &= (\bar{y} - y_{\Omega}, y - \bar{y})_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} \\ &= (\alpha p, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei $y = Su$ und $\bar{y} = S\bar{u}$ eingesetzt wurden.

- (iv) Schließlich kann man auch wieder eine **erweiterte Lagrange-Funktion** definieren, vgl. § 2.7:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p, \mu_a, \mu_b) &= J(y, u) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p \, dx + \int_{\Gamma} \alpha(u - y) p \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \underbrace{(u_a - u)}_{\leq 0} \mu_a \, ds + \int_{\Gamma} \underbrace{(u - u_b)}_{\leq 0} \mu_b \, ds. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich aus $\mathcal{L}_u(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b) \delta u = 0$ für alle $\delta u \in L^2(\Gamma)$ die richtige Definition der Lagrangeschen Multiplikatoren, die ein Komplementaritätssystem analog zu den beiden letzten Gleichungen in (11.18) erfüllen. \diamond

In³⁶ werden die Optimalitätsbedingungen für ein *System* stationärer elliptischer PDEs hergeleitet.

³⁶9. Übung, A 1