

# Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

## Beiblatt 11

### § 24 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Wir benötigen die

**Voraussetzung 24.1** (a) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes Lipschitzgebiet,  $N \geq 2$ .

(b) Die Funktion  $d : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Carathéodory-Bedingung. Sie sei ferner für fast alle  $x \in \Omega$  stetig partiell nach  $y$  differenzierbar und erfülle die Beschränktheits- und die lokale Lipschitz-Bedingung der Ordnung 1 (siehe Definition 21.5), also

$$\begin{aligned} |d(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |d(x, y_1) - d(x, y_2)| &\leq L(M) |y_1 - y_2| \\ |d_y(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |d_y(x, y_1) - d_y(x, y_2)| &\leq L(M) |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für f.a.  $x \in \Omega$  und alle  $y_1, y_2 \in [-M, M]$ .

Ferner sei  $d(x, y)$  für fast alle  $x \in \Omega$  monoton wachsend in  $y$ , also  $d_y(x, y) \geq 0$ .

(c) Die Funktion  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Carathéodory-Bedingung. Sie sei ferner für fast alle  $x \in \Omega$  stetig partiell nach  $y$  differenzierbar und erfülle die Beschränktheits- und die lokale Lipschitz-Bedingung der Ordnung 1, also

$$\begin{aligned} |\varphi(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| &\leq L(M) |y_1 - y_2| \\ |\varphi_y(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |\varphi_y(x, y_1) - \varphi_y(x, y_2)| &\leq L(M) |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für f.a.  $x \in \Omega$  und alle  $y_1, y_2 \in [-M, M]$ .

(d) Die Funktion  $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Carathéodory-Bedingung. Sie sei ferner für fast alle  $x \in \Omega$  stetig partiell nach  $y$  differenzierbar und erfülle die Beschränktheits- und die lokale Lipschitz-Bedingung der Ordnung 1, also

$$\begin{aligned} |\psi(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| &\leq L(M) |u_1 - u_2| \\ |\psi_u(x, 0)| &\leq K & \text{und} & & |\psi_u(x, u_1) - \psi_u(x, u_2)| &\leq L(M) |u_1 - u_2| \end{aligned}$$

für f.a.  $x \in \Omega$  und alle  $u_1, u_2 \in [-M, M]$ .

**Beachte:** Die Konvexität von  $\psi$  bzgl.  $u$  wurde nur für den Existenzbeweis einer optimalen Steuerung benötigt, hier aber nicht.

(e) Die Schranken erfüllen  $u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$  mit  $u_a(x) \leq u_b(x)$  f.ü. in  $\Omega$ .

Unter dieser Voraussetzung sind folgende Abbildungen Fréchet-differenzierbar (Satz 23.3 bzw. Lemma 21.7 und Linearität des Integrals):

$$L^r(\Omega) \ni u \mapsto y = G(u) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad \text{für } r > \frac{N}{2}$$

$$L^\infty(\Omega) \ni y \mapsto F(y) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) \, dx \in \mathbb{R}$$

$$L^\infty(\Omega) \ni u \mapsto Q(u) = \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) \, dx \in \mathbb{R}.$$

Nach Kettenregel ist also auch das **reduzierte Zielfunktional**

$$f(u) = J(G(u), u).$$

von  $L^\infty(\Omega)$  nach  $\mathbb{R}$  Fréchet-differenzierbar. Nach Satz 11.1 gilt:

**Lemma 24.2**

Ist die Voraussetzung 24.1 erfüllt, so gilt für jede lokal optimale Steuerung  $\bar{u}$  von (22.1) die VU

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U_{\text{ad}}. \quad (24.1)$$

Nach der Kettenregel gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(\bar{u}) \delta u &= F'(G(\bar{u})) \circ G'(\bar{u}) \delta u + Q'(\bar{u}) \delta u \\ &= F'(\bar{y}) \delta y + Q'(\bar{u}) \delta u \\ &= \int_{\Omega} \varphi_y(\cdot, \bar{y}) \delta y \, dx + \int_{\Omega} \psi_u(\cdot, \bar{u}) \delta u \, dx, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{y} = G(\bar{u})$  ist und  $\delta y = G'(\bar{u}) \delta u$  die schwache Lösung von (23.4) bezeichnet. Wir *definieren* den zu  $\bar{y} = G(\bar{u})$  gehörenden adjungierten Zustand als schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + d_y(x, \bar{y}) p &= \varphi_y(x, \bar{y}) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} p &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (24.2)$$

Nach Satz 20.5 ist diese eindeutig und gehört zu  $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , denn  $\varphi_y(\cdot, \bar{y}) \in L^\infty(\Omega)$ .

Wie Lemma 11.20 beweist man:

**Lemma 24.3**

Es sei  $\bar{u} \in L^r(\Omega)$ ,  $r > \frac{N}{2}$ , und  $\bar{y} = G(\bar{u}) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Es sei  $\delta u \in L^2(\Omega)$  beliebig,  $\delta y \in H^1(\Omega)$  die schwache Lösung des Ableitungsproblems (23.4) und  $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  die schwache Lösung von (24.2). Dann gilt

$$\int_{\Omega} \varphi_y(x, \bar{y}) \delta y \, dx = \int_{\Omega} p \delta u \, dx.$$

**Beachte:** Ohne die Voraussetzung  $\bar{y} \in L^\infty(\Omega)$ , die aus  $\bar{u} \in L^r(\Omega)$  folgt, wissen wir nicht, in welchem Raum die rechte Seite  $\varphi_y(\cdot, \bar{y})$  liegt.

**Korollar 24.4**

Als Folgerung erhalten wir eine Darstellung der Fréchet-Ableitung von  $f$

$$f'(\bar{u}) \delta u = \int_{\Omega} (p + \psi_u(\cdot, \bar{u})) \delta u \, dx$$

für  $\bar{u}, \delta u \in L^\infty(\Omega)$ .

Dieses Korollar und Lemma 24.2 ergeben sofort:

**Satz 24.5**

Ist die Voraussetzung 24.1 erfüllt, so gilt für jede lokal optimale Steuerung  $\bar{u}$  von (22.1) die VU

$$\int_{\Omega} (p + \psi_u(\cdot, \bar{u})) (u - \bar{u}) \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U_{\text{ad}},$$

wobei  $p$  durch die adjungierte Gleichung (24.2) mit  $\bar{y} = G(\bar{u})$  gegeben ist.

**Beispiel 24.6**

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\text{unter} \quad \begin{cases} -\Delta y + y + y^3 = u & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} y = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \end{aligned} \quad (24.3)$$

$$\text{und } u \in U_{\text{ad}} = \{u \in L^\infty(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. auf } \Omega\}.$$

Wir setzen  $y_\Omega, u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$  und  $\lambda \geq 0$  voraus. Die Existenz (mindestens) einer global optimalen Steuerung folgt aus Satz 22.5.

Die adjungierte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + 3y^2 p &= y - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} p &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (24.4)$$

Ist  $\bar{u} \in U_{\text{ad}}$  lokal optimale Lösung von (24.3) und  $\bar{y}$  der zugehörige Zustand, so gilt mit der Lösung  $p$  der adjungierten PDE (24.4) mit  $\bar{y}$  statt  $y$  die VU

$$\int_{\Omega} (p + \lambda \bar{u})(u - \bar{u}) \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U_{\text{ad}}.$$

Im Fall  $\lambda > 0$  kann man wie in § 11.2 (Theorem 11.16) die **Projektionsformel**

$$\bar{u}(x) = P_{[u_a(x), u_b(x)]} \left[ -\frac{1}{\lambda} p(x) \right]$$

für fast alle  $x \in \Omega$  herleiten.